Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Física
Departamento de Física
Professor: ***Rudi Gaelzer***
Disciplina: ***Mecânica Clássica II***
Cursos: ***Bacharelados e Licenciatura em Física***

Lista de Exercícios 1 – Cálculo de Variações

1) Encontre as funções $y(x)$ que fornecem os valores extremos dos funcionais abaixo:

(a) $I[y] = \int_0^1 \left(y'^2 + xy\right) dx; \qquad y(0) = y(1) = 0.$

(b) $I[y] = \int_0^1 \left(y - y'^2\right) dx; \qquad y(0) = y(1) = 0.$

(c) $I[y] = \int_0^1 \left(y'^2 + y^2 + 2ye^x\right); \qquad y(0) = 0,\ y(1) = \frac{1}{2e}.$

---

2) Dadas as funções $y(x) \in \mathcal{C}^1[x_1, x_2]$, o funcional

$$I[y; x_1, x_2] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}dx$$

calcula a extensão da curva que pertence ao gráfico de $y(x)$ entre os pontos $x = x_1$ e $x = x_2$.

(a) Sejam os valores de $y(x)$ nos pontos extremos dados por $y_1 = y(x_1)$ e $y_2 = y(x_2)$, formando-se assim os pares ordenados $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1)$ e $\boldsymbol{r}_2 = (x_2, y_2)$. Considere então somente as funções contidas na classe $\mathcal{C}^1[x_1, x_2]$ que possuem os mesmos pares ordenados nos pontos extremos. Ou seja, considere apenas as funções que partem do ponto $\boldsymbol{r}_1$ e chegam ao ponto $\boldsymbol{r}_2$. Mostre que a menor distância entre os pontos $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$ é uma linha reta, ou seja mostre que o *extremum* de $I[y; x_1, x_2]$ é a função

$$y(x) = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)x + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}.$$

(b) Considere os pares ordenados $\boldsymbol{r}_1 = (0, 0)$ e $\boldsymbol{r}_2 = (1, 1)$. Mostre que o *extremum* de $I[y; 0, 1] = \sqrt{2}$, ou seja, a extensão da reta ligando os pontos $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$ é $\sqrt{2}$. O gráfico de qualquer outra função com os mesmos pontos extremos necessariamente tem uma extensão maior. Verifique isso calculando a extensão da curva $y(x) = x^2$ entre $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$ e verifique que

$$I\left[x^2; 0, 1\right] = \frac{1}{4}\left[2\sqrt{5} - \operatorname{arcsenh}(2)\right] \approx 1{,}47894 > \sqrt{2}.$$

---

3) Considere o funcional

$$I[y] = \int_0^1 \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y^2\right] dx.$$

(a) Encontre a curva $y(x)$ que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$ e que minimiza $I[y]$.

(b) Qual é o valor do mínimo de $I[y(x)]$?

(c) Calcule $I[y]$ para a reta $y(x) = x$ e compare.

---

4) Os vértices de um retângulo estão situados ao longo da elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

(a) Onde os vértices devem se situar para maximizar a área do retângulo?

(b) Qual a fração da área da elipse que é coberta por este retângulo?

---

5) ***O problema isoperimétrico.*** Dentre todas as curvas fechadas no plano cartesiano com o mesmo perímetro ℓ, encontre aquela que confima a maior área.

Sugestão: use coordenadas plano-polares.

---

6) Revise o problema abordado em aula a respeito da curva geodésica entre dois pontos sobre uma superfície esférica, completando os passos que não foram explicitados.

---

7) Duas cidades estão localizadas na mesma latitude, mas em diferentes longitudes.

(a) Calcule a distância ℓ_{12}^p entre as cidades ao longo da paralela.

(b) Calcule a distância ℓ_{12} entre as cidades ao longo da geodésica conectando as mesmas. Trace um gráfico de $\ell_{12}^p/\ell_{12} \times \varphi$ para $\theta = \pi/4$, $\varphi_1 = 0$ e $\varphi_2 = \pi/2$ e verifique que $\ell_{12} \leqslant \ell_{12}^p$. Em que latitude $\ell_{12} = \ell_{12}^p$?

---

8) ***A braquistócrona.*** Considere a ciclóide da figura abaixo.

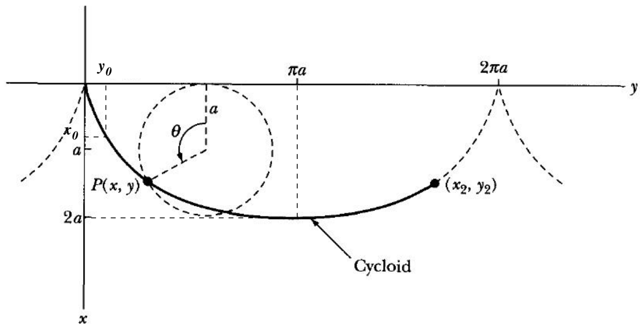
(a) Revise a resolução da braquistócrona para $x_0 = y_0 = 0$.

(b) Mostre que o tempo que a partícula leva para se deslocar de $x_0 = y_0 = 0$ a $x_2 = 2a$, $y_2 = \pi a$ ao longo da ciclóide é igual a

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

(c) Calcule o tempo para a partícula se deslocar de (x_0, y_0) a (x_2, y_2) ao longo de uma reta ligando estes dois pontos. Mostre que o tempo é maior que ao longo da braquistócrona.

(d) ***A Tautócrona.*** Para qualquer $0 \leqslant x_0 < 2a$, mostre que o tempo para a partícula se deslocar ao longo da ciclóide até o ponto mínimo $(x_2, y_2) = (2a, \pi a)$ é sempre igual ao valor de T obtido em *(b)*.



---

9) Mostre que a geodésica sobre a superfície lateral de um cilindro é um segmento de uma hélice.

---

10) Determine as geodésicas de um cone com ângulo de abertura 2α. Descreva a geodésica no caso em que seu ponto inicial é o vértice do cone, situado na origem do sistema de coordenadas.

---

11) Encontre o caminho mais curto entre os pontos $(x, y, z) = (0, -1, 0)$ e $(0, 1, 0)$ sobre a superfície cônica $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$. Qual é a extensão do caminho? Note que este é o caminho mais curto para atravessar uma montanha.

12) ***(Ensemble Grande Canônico)*** Considere um sistema estatístico em equilíbrio termodinâmico com um reservatório de calor e partículas. Nesta situação, não somente os níveis energéticos internos do sistema podem variar, como também o número de partículas em um determinado estado de energia. Neste ensemble, além dos dois vínculos do ensemble canônico, existe um terceiro vínculo que fixa o número médio de ocupação de cada estado, *i. e.*,

$$N \doteq \langle N \rangle = \sum_{i=1}^{W} \eta_i p_i = \text{cte.},$$

sendo η_i o número de ocupação do i-ésimo estado.

Empregando a equação de estado

$$\left.\frac{\partial S}{\partial N}\right|_{U,V} = -\frac{\mu}{T},$$

onde μ é o *potencial químico*, obtenha a função de partição do ensemble grande canônico

$$Z = \sum_{i=1}^{W} e^{-(\varepsilon_i - \mu\eta_i)/k_B T}$$

e a probabilidade de ocupação do i-ésimo estado

$$p_i = Z^{-1} e^{-(\varepsilon_i - \mu\eta_i)/k_B T}, \ (i = 1, \ldots, W).$$

RESPOSTAS

(3) *(a)* O *extremum* é

$$y(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 1}.$$

(b) Para esta função,

$$I[y] = \operatorname{cotan} 1 \approx 0,642093.$$

(c) Se $y(x) = x$,

$$I[y] = \frac{2}{3} \approx 0,6666667.$$

---

(5) A curva pode ser escrita como

$$(x - \lambda \operatorname{sen} \gamma)^2 + (y - \lambda \cos \gamma)^2 = \lambda^2$$

a qual é a equação de uma circunferência de raio λ centrada em $(\lambda \operatorname{sen} \gamma, \lambda \cos \gamma)$, sendo γ e λ constantes a ser determinadas pelas condições de contorno.

---

(7) *(a)*

$$\ell_{12}^{p} = R \operatorname{sen} \theta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = R \operatorname{sen} \theta \left(\varphi_2 - \varphi_1\right).$$

(b)

$$\ell_{12} = 2R \tan^{-1}\left[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1}} \tan\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)\right],$$

sendo

$$\alpha = \tan \theta_L \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right), \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta_L.$$

Realizando-se o limite $\theta \to \pi/2$ (equador), observa-se que $\ell_{12}^{p} = \ell_{12}$.
Se $\theta_L = \pi/4$, $\varphi_1 = 0$ e $\varphi_2 = \pi/2$,

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

e

$$\ell_{12} = 2 \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) R \approx 1.047R < \ell_{12}^{p} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} R \approx 1.111R.$$

Como $R = 6370\,\mathrm{km}$, $\ell_{12}^{p} - \ell_{12} \approx 405,9\,\mathrm{km}$!

---

(8) *(b)*

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_2} \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{x}} = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{\pi} d\theta = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$