

ÁLGEBRA E ANÁLISE TENSORIAIS

A O LONGO DO PROCESSO HISTÓRICO de desenvolvimento das ciências da natureza, observou-se com frequência a necessidade da definição e do uso de estruturas matemáticas com graus crescentes de generalidade e abstração. Um exemplo disso é a evolução da mecânica newtoniana.

Conforme é a prática usual em cursos contemporâneos de física básica, a mecânica é inicialmente apresentada e aplicada a sistemas físicos compostos por um número pequeno de partículas que interagem entre si através de forças conservativas, tais como as interações gravitacional e eletrostática. Para tais sistemas simples, o arcabouço matemático usualmente necessário limita-se ao cálculo infinitesimal e aos conceitos básicos de espaços vetoriais, nos quais as definições abstratas de vetores, produto interno e operadores lineares são apresentadas. Na mecânica newtoniana, estas entidades matemáticas abstratas (os vetores) são então identificadas com grandezas físicas mensuráveis tais como posição, velocidade, aceleração e força.

Contudo, quando o formalismo da mecânica foi aplicado ao estudo de sistemas com um grau de complexidade física maior, tais como sistemas com vínculos, meios contínuos e transformações de referenciais, e também com a descoberta e pesquisa de outros tipos de interações e objetos que levaram à criação de novas teorias físicas, tais como o eletromagnetismo, a mecânica quântica e a teoria da relatividade, constatou-se a necessidade do uso de estruturas matemáticas mais abrangentes do que aquelas oferecidas pelas definições de um espaço vetorial, conforme usualmente apresentadas em disciplinas básicas de álgebra linear. Uma classe destas novas estruturas (ou objetos) matemáticos são os *tensores*.

De uma forma simplista, pode-se caracterizar um tensor como um conjunto de objetos matemáticos (em geral) ou físicos (em particular) que estão relacionados entre si e que determinam algum tipo de relação entre duas outras entidades matemáticas (ou físicas). Estes diferentes objetos podem ser identificados de forma prática com o uso de um número finito de índices e possuem leis de transformação bem definidas quando sua representação é alterada de um dado sistema de coordenadas ou referencial para outros.

Neste capítulo, será realizada uma introdução à definição, à álgebra e à análise de tensores.

9.1 INTRODUÇÃO E DEFINIÇÕES

Partindo das definições de espaços vetoriais e operadores lineares,¹ neste capítulo será realizada uma investigação mais aprofundada das propriedades de tensores, operadores e outros objetos relacionados, os quais existem em espaços vetoriais específicos.

O termo *tensor* foi utilizado pela primeira vez em 1846 por William Rowan Hamilton (1805 – 1865), matemático bastante conhecido também por suas contribuições para a mecânica newtoniana. Porém, este termo foi utilizado em um contexto distinto daquele empregado atualmente. Historicamente, as primeiras concepções do que viria a posteriori ser denominado de análise tensorial foram introduzidas por Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), em seu pioneiro trabalho a respeito de geometria diferencial. Estes conceitos foram então desenvolvidos ao longo do século XIX, sendo que o termo *tensor*, neste contexto, foi introduzido em 1898 por Woldemar Voigt (1850 – 1919).

O cálculo tensorial foi desenvolvido em definitivo a partir de 1890 com os trabalhos de Woldemar Voigt, Elwin Bruno Christoffel (1829 – 1900), Gregorio Ricci-Curbastro (1853 – 1925) e

¹Discutidos na seção 3.4.

Tullio Levi-Civita (1873 – 1941), com a designação inicial *cálculo diferencial absoluto*. Já no século XX, esta área da álgebra e análise matemáticas passou a ser denominada em definitivo como *análise tensorial*, tendo a sua popularização muito a dever com a proposta, em 1915, da teoria da relatividade geral formulada por Albert Einstein (1879 – 1955). Durante a formulação da teoria da relatividade geral, inteiramente baseada no conceito de tensores, Einstein contou com a colaboração intensa tanto de Levi-Civita quanto do matemático Marcel Grossmann (1878 – 1936).

O desenvolvimento da análise tensorial também está ligada ao estudo da mecânica de meios contínuos, sendo o *tensor de stress*, o qual determina as tensões internas que surgem no meio quando este é submetido a esforços aplicados em diferentes direções do espaço, uma das quantidades físicas que surgiram desde os primeiros estudos nesta área da física e engenharia.

De uma forma genérica, tensores são objetos geométricos que descrevem relações lineares entre escalares, vetores e outros tensores. Na formulação da álgebra e análise tensoriais, as quantidades físicas identificadas usualmente como escalares e vetores são elas próprias casos particulares de tensores. Porém, esta formulação realiza a extensão lógica destes conceitos, permitindo o tratamento de estruturas matemáticas mais abstratas e complexas. Esta extensão possibilitou o desenvolvimento posterior das áreas da física mencionadas acima (entre outras).

Como já mencionado, tensores são importantes em muitas áreas da física, as quais estudam diferentes tipos de sistemas, tais como sólidos, gases ionizados, teoria eletromagnética, relatividade restrita e geral e mecânica quântica. Um meio contínuo inhomogêneo e/ou anisotrópico é um exemplo típico de sistema físico onde o conceito e a necessidade do uso de tensores ocorrem de forma natural.

Um exemplo inicial pode ser mencionado a partir do problema do fluxo de corrente elétrica em um meio anisotrópico. A Lei de Ohm é apresentada em textos de física básica como

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (9.1)$$

sendo as quantidades vetoriais \mathbf{J} e \mathbf{E} respectivamente a densidade de corrente elétrica e o campo elétrico. Em um meio homogêneo e isotrópico, a relação entre estes campos é determinada pela quantidade escalar σ , denominada a *condutividade* do meio.

Se o meio for anisotrópico, por outro lado, a relação empírica (9.1) não é válida em geral, pois o agente que gera a anisotropia do meio determina a existência de pelo menos uma direção preferencial no espaço. Então, verifica-se empiricamente que, como consequência, a densidade de corrente resulta distinta caso o campo \mathbf{E} esteja orientado na direção da anisotropia ou contido sobre o plano perpendicular a esta direção. Neste caso, a expressão correta para o i -ésimo componente do vetor \mathbf{J} é

$$J_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} E_j, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (9.2a)$$

sendo que o conjunto de 9 valores $\{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \dots, \sigma_{32}, \sigma_{33}\}$ pode ser expresso na forma matricial. Assim, a forma generalizada (9.2a) para a Lei de Ohm pode ser expressa também como uma multiplicação matricial,

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}. \quad (9.2b)$$

Os 9 elementos da matriz de condutividade $\{\sigma_{ij}\}$ ($i, j = 1, \dots, 3$) estão relacionados entre si tanto do ponto de vista do seu significado físico, sendo os valores da condutividade do meio em função da orientação relativa entre os campos \mathbf{E} e \mathbf{J} , quanto do ponto de vista matemático, uma vez que a matriz de condutividade obedece as regras da álgebra de matrizes.

Porém, verifica-se, também de forma empírica, que os elementos da matriz $\{\sigma_{ij}\}$ obedecem a um conjunto de regras mais amplo que a simples álgebra matricial. Estas regras determinam, por exemplo, como as quantidades físicas em (9.2) devem se alterar quando é realizada uma mudança no sistema de referências do laboratório, ou quando se muda o sistema de coordenadas em um dado referencial. Observa-se então que os elementos do conjunto $\{\sigma_{ij}\}$ devem se transformar de forma a satisfazer a definição de um *tensor*, sendo que estas regras de transformação também são verificadas empiricamente. Portanto, a denominação mais correta para o conjunto $\{\sigma_{ij}\}$ é *tensor de condutividade* do meio anisotrópico, o qual pode ser expresso na forma matricial. Usualmente, empregando as propriedades microscópicas do meio ou fazendo uso de propriedades de simetria, é possível se mostrar que diferentes componentes do tensor de condutividade estão relacionadas entre si.

Generalizando e expandindo o argumento acima, espera-se que a descrição quantitativa dos processos físicos, ou seja, as leis físicas que descrevem a evolução espaço-temporal das quantidades físicas mensuráveis, não dependam do sistema de coordenadas empregado em um dado referencial, nem da transformação de um referencial (inercial) a outro. A aplicação deste princípio às leis físicas, dentre as quais a Lei de Ohm (9.1) ou (9.2) é apenas um exemplo, irá determinar a natureza e a classificação das quantidades matemáticas envolvidas na descrição dessas leis.

Antes, porém, de se entrar em maiores detalhes neste ponto, serão introduzidos tanto a notação básica a ser empregada ao longo deste capítulo, quanto dois símbolos tensoriais empregados amiúde em todos os textos de física-matemática: os símbolos da delta de Kronecker e de Levi-Civita.

9.1.1 CONVENÇÃO DE SOMA DE ÍNDICES E SÍMBOLOS AUXILIARES

Para evitar o acúmulo de símbolos de soma nas expressões apresentadas, será utilizada a *convenção de somas implícitas*, usualmente atribuída a Einstein.

Qualquer índice *minúsculo* que apareça *exatamente duas vezes* em quaisquer termos de uma expressão algébrica é assumido implicitamente como sendo somado sobre todos os valores possíveis que aquele índice possa assumir. Por outro lado, o caso particular em que esta convenção não deve ser empregada deve ser considerado como uma exceção, sendo feita então uma observação explícita deste caso. Usualmente, inclui-se o termo “NS” (não somado) nas proximidades da expressão.

Alguns exemplos desta convenção, válidos para expressões no espaço vetorial \mathcal{R}^3 definido no exemplo 3.3, e empregando um sistema de coordenadas Cartesiano, são os seguintes:

- Produto escalar dos vetores a e b :

$$a_i b_i \equiv \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

- Produto matricial entre as matrizes A e B :

$$(AB)_{ik} = A_{ij} B_{jk} \equiv \sum_{j=1}^3 A_{ij} B_{jk} = A_{i1} B_{1k} + A_{i2} B_{2k} + A_{i3} B_{3k}, \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

- Produto misto entre matrizes e vetores:

$$a_{ij} b_{jk} c_k \equiv \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ij} b_{jk} c_k = a_{i1} b_{11} c_1 + a_{i1} b_{12} c_2 + a_{i1} b_{13} c_3 + a_{i2} b_{21} c_1 + \cdots + a_{i3} b_{32} c_2 + a_{i3} b_{33} c_3.$$

- Divergente do campo vetorial $v(\mathbf{r})$:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \equiv \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

- Laplaciano do campo escalar $\phi(\mathbf{r})$:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i} \equiv \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} = \nabla^2 \phi.$$

Algumas observações adicionais a respeito desta convenção devem ser realizadas.

- Índices repetidos são denominados *índices mudos*, enquanto que os demais são chamados *índices livres*. Uma característica de índices (ou de variáveis) mudos está no fato de que o resultado final não mais depende dos mesmos; portanto, o resultado independe do caractere alfabético realmente empregado para representar o índice mudo. Ou seja,

$$a_i b_i = a_j b_j \text{ ou } a_{ij} b_{jk} c_k = a_{ik} b_{kj} c_j,$$

onde no último exemplo acima realizou-se a troca $j \leftrightarrow k$, o que não afeta o resultado final da operação algébrica.

- Quando há índices mudos e livres em uma expressão, não é permitida a permuta de caracteres entre os mesmos. Ou seja, em geral

$$a_{ij}b_{jk}c_k \neq a_{ji}b_{ik}c_k.$$

- Ao se introduzir novos índices mudos em uma expressão, deve-se tomar cuidado para não repetir índices já presentes, quer sejam estes mudos ou livres. Ou seja, a troca

$$a_{ij}b_{jk}c_k \longrightarrow a_{ij}b_{jj}c_j$$

não é permitida, pois gera uma ambiguidade na maneira como as somas implícitas devem ser realizadas.

9.1.2 SÍMBOLOS AUXILIARES: KRONECKER E LEVI-CIVITA

Dois símbolos tensoriais muito úteis para as expressões empregadas neste capítulo serão introduzidos agora.

Delta de Kronecker. Trata-se da quantidade δ_{ij} , definida por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Símbolo (ou tensor) de Levi-Civita. Trata-se da quantidade ϵ_{ijk} , com três índices, a qual estabelece uma relação totalmente antissimétrica entre os índices. A sua definição é

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{se } \{i, j, k\} \text{ é uma permutação par de } \{1, 2, 3\} \\ -1, & \text{se } \{i, j, k\} \text{ é uma permutação ímpar de } \{1, 2, 3\} \\ 0, & \text{se dois ou mais índices são repetidos} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} [(j-i)(k-i)(k-j)].$$

Alguns exemplos: $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1$, $\epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1$ e $\epsilon_{113} = \epsilon_{122} = \epsilon_{111} = 0$.

O símbolo ϵ_{ijk} possui ao todo $3^3 = 27$ valores que podem ser organizados em uma matriz $3 \times 3 \times 3$. Se o símbolo for escrito $\epsilon_{i_1 i_2 i_3}$ ($1 \leq i_j \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$), este pode também ser calculado como

$$\epsilon_{i_1 i_2 i_3} = \prod_{1 \leq j < k \leq 3} \text{sgn}(i_k - i_j) = \text{sgn}(i_2 - i_1) \text{sgn}(i_3 - i_1) \text{sgn}(i_3 - i_2),$$

sendo $\text{sgn}(x)$ a função sinal de x .

Algumas propriedades matemáticas importantes que fazem uso dos símbolos acima são as seguintes:

$$a_i = \delta_{ij} a_j \quad (9.3a)$$

$$a_{ij} \delta_{jk} = a_{ij} \delta_{kj} = a_{ik} \quad (9.3b)$$

$$a_{ij} b_{ji} = a_{ij} b_{jk} \delta_{kl} \quad (9.3c)$$

$$\delta_{ij} \delta_{ik} = \delta_{jk} \quad (9.3d)$$

$$\delta_{ii} = 3 \quad (9.3e)$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} = \det \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \quad (9.3f)$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \quad (9.3g)$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ljk} = 2\delta_{il} \quad (9.3h)$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = 6 \quad (9.3i)$$

$$\epsilon_{ijk} \delta_{ij} = 0. \quad (9.3j)$$

Generalizações do símbolo de Levi-Civita, como sendo o objeto matricial totalmente antissimétrico em um espaço de n dimensões, também existem. Por exemplo, se $n = 4$,

$$\epsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \begin{cases} +1, & \text{se } \{i_1, i_2, i_3, i_4\} \text{ é uma permutação par de } \{1, 2, 3, 4\} \\ -1, & \text{se } \{i_1, i_2, i_3, i_4\} \text{ é uma permutação ímpar de } \{1, 2, 3, 4\} \\ 0, & \text{se dois ou mais índices são repetidos} \end{cases} = \prod_{1 \leq j < k \leq 4} \text{sgn}(i_k - i_j),$$

existindo ao todo $4^4 = 256$ valores que podem ser organizados em uma matriz $4 \times 4 \times 4 \times 4$.

Em geral, em um espaço de n dimensões,

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} +1, & \text{se } \{i_1, \dots, i_n\} \text{ é uma permutação par de } \{1, \dots, n\} \\ -1, & \text{se } \{i_1, \dots, i_n\} \text{ é uma permutação ímpar de } \{1, \dots, n\} \\ 0, & \text{se dois ou mais índices são repetidos} \end{cases} = \prod_{1 \leq j < k \leq n} \text{sgn}(i_k - i_j),$$

sendo que os n^n valores podem ser organizados em uma matriz $n \times \dots \times n$.

9.2 PROPRIEDADES DE TRANSFORMAÇÃO DE ESCALARES, VETORES E TENSORES

Retorna-se agora à discussão envolvendo a invariância das leis físicas frente a diferentes transformações realizadas no sistema de referências e a sua relação com as leis de transformação dos tensores empregados na descrição dessas leis físicas. Relações semelhantes às formas da Lei de Ohm (9.1) ou (9.2) podem ser generalizadas considerando-se a relação entre dois campos vetoriais quaisquer $A = A(\mathbf{r})$ e $B = B(\mathbf{r})$, dada por

$$A_i = \alpha_{ij} B_j,$$

sendo $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(\mathbf{r})$ a matriz que descreve a **relação constitutiva** entre os campos.

Nesta seção será iniciada a discussão de *tensores Cartesianos* e suas transformações. Serão considerados objetos matemáticos denominados *escalares*, *vetores* e *tensores* em geral, aos quais serão atribuídas as noções intuitivas de *campos escalares*, *vetoriais* ou *tensoriais*, respectivamente. Uma definição mais rigorosa destes campos será apresentada posteriormente. Para o presente momento, será assumido que todos os campos envolvidos (escalares, vetoriais e tensoriais) existem em um espaço vetorial particular, o *espaço vetorial Euclidiano de dimensão três*, denotado por \mathbb{E}^3 . O espaço \mathbb{E}^3 é, na verdade, um espaço afim que é também um espaço vetorial métrico no qual a norma induz a métrica. A definição do \mathbb{E}^3 foi realizada no exemplo 3.5. Um espaço Euclidiano é aquele no qual as noções geométricas intuitivas de espaço, dimensão e deslocamento em um *sistema de coordenadas Cartesiano* ou *retangular*² são respeitadas, em conjunto com as noções algébricas de vetores posição que ligam a origem do sistema com um dado ponto do espaço e de vetores deslocamento que são setas orientadas que ligam dois pontos quaisquer no referencial. Por ser um espaço afim, o \mathbb{E}^3 identifica tanto “pontos” do espaço, os quais podem ser ocupados por partículas, por exemplo, como “linhas orientadas”, que são os vetores posição e deslocamento. Por ser também um espaço métrico, o comprimento de qualquer segmento de reta pode ser obtido pela fórmula de Pitágoras, concordando assim com medidas experimentais das posições e deslocamentos das partículas. As definições realizadas no exemplo 3.5 para um espaço de dimensão 3 pode ser automaticamente generalizada para o \mathbb{E}^n , o qual é o espaço Euclidiano de dimensão (finita) n .

Sobre o substrato algébrico/geométrico fornecido pelo espaço \mathbb{E}^3 , atribui-se agora a cada ponto do mesmo um *campo escalar* $\phi = \phi(\mathbf{r}) \equiv \phi(x_1, x_2, x_3)$ ou um *campo vetorial* $A = A(\mathbf{r}) \equiv A(x_1, x_2, x_3)$. Portanto, os campos escalares e os componentes dos campos vetoriais que pertencem a este espaço são funções do vetor posição

$$\mathbf{r} = x_i \hat{e}_i \equiv x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3, \quad (9.4)$$

ou seja,

$$A = A(\mathbf{r}) \equiv A(x_1, x_2, x_3) = A_i(\mathbf{r}) \hat{e}_i.$$

²Ver figuras 3.1.

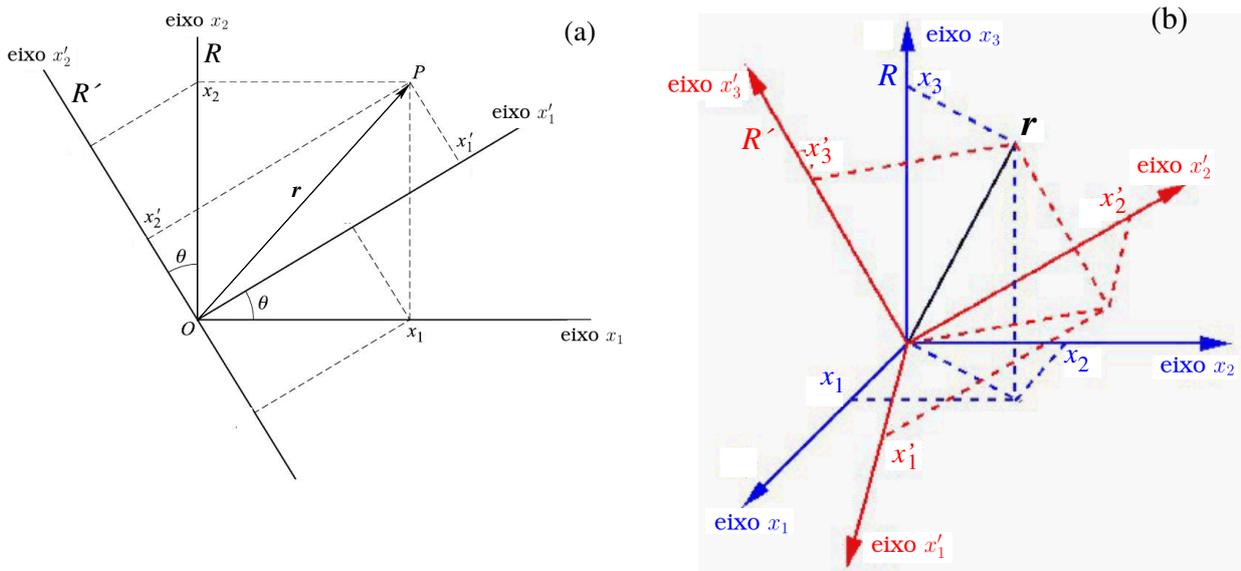


Figura 9.1: (a) Rotação sobre o plano (x_1, x_2) (em torno do eixo x_3) por um ângulo θ . (b) Rotação arbitrária de eixos em torno da origem do sistema de coordenadas. Pode-se observar que em ambos os casos as rotações mantêm a norma do vetor r invariante.

Em (9.4), o conjunto de vetores *ortonormais* $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ forma uma base do espaço \mathbb{E}^3 . Neste caso, em se tratando de um sistema Cartesiano, emprega-se a base canônica $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\} = \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$, onde $\hat{i} = (1, 0, 0)$, $\hat{j} = (0, 1, 0)$ e $\hat{k} = (0, 0, 1)$. Como é usual, assume-se que o sistema de coordenadas Cartesiano é *dextrógiro*, isto é, a base canônica obedece a relação³

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \epsilon_{ijk} \hat{e}_k. \quad (9.5)$$

Algumas propriedades básicas de escalares e vetores que pertencem ao espaço Euclidiano frente a transformações no sistema de coordenadas serão brevemente discutidas agora. Em seguida, esta discussão será generalizada para tensores Cartesianos em geral.

A hipótese de que as quantidades físicas apresentem propriedades matemáticas bem definidas frente a certos tipos de transformação de coordenadas impõe limitações e exigências importantes às leis físicas. É necessário, portanto, discutir em algum detalhe as propriedades de transformação de algumas quantidades físicas escalares ou vetoriais.

Alguns dos tipos mais importantes de transformações de coordenadas para a física são *rotações*, *reflexão espacial* ou *transformação de paridade* e *reversão temporal*. Já para a relatividade restrita, também são fundamentais as mudanças entre diferentes *referenciais inerciais*, dadas por uma *translação* entre os dois referenciais. Embora a rotação seja o tipo de transformação para o qual será dada a maior atenção neste capítulo, é importante realizar também uma breve discussão a respeito das outras transformações.

9.2.1 ROTAÇÕES

Uma rotação no \mathbb{E}^3 é uma transformação linear das coordenadas, realizada em torno de um ponto fixo e de tal forma que a *norma* do espaço permaneça invariante. Este ponto fixo usualmente é a origem do sistema de coordenadas e pode ocorrer sobre um determinado plano (subespaço) de \mathbb{E}^3 ou sobre todo o espaço. A figura 9.1 ilustra rotações de eixos sobre o plano ou no espaço.

O caso particular ilustrado na figura 9.1a, onde é realizada uma rotação do sistema de coordenadas sobre o plano em torno do eixo x_3 por um ângulo θ , será considerado como referência na discussão a seguir. As conclusões obtidas serão então generalizadas para uma rotação arbitrária dos eixos no \mathbb{E}^3 , representada na figura 9.1b. A discussão feita neste ponto pode ser então facilmente generalizada para rotações em um espaço vetorial de n dimensões.

O vetor posição r é representado no sistema de coordenadas Cartesiano original por $r = x_i \hat{e}_i$, onde $\{x_1, x_2, x_3\}$ são as **componentes** (ou **projeções**) de r que constituem a sua **representação**

³Esta relação segue a definição de produto vetorial entre vetores do \mathcal{R}^3 dada em (3.7).

no sistema de coordenadas R . Realizando então uma rotação de eixos arbitrária, ilustrada na figura 9.1b, o vetor posição passa a ser, em princípio, representado por

$$\mathbf{r}' = x'_i \hat{e}'_i,$$

onde $\{x'_i\}$ são suas componentes no sistema de coordenadas R' e $\{\hat{e}'_i\}$ são os vetores de base no sistema rotado.

Atribuindo agora uma realidade física ao vetor posição r , assume-se que o espaço é isotrópico; isto é, não há direção preferencial ou, em outras palavras, todas as direções são equivalentes. Então, o sistema físico em estudo, para o qual uma lei física está sendo aplicada fazendo-se uso de quantidades vetoriais, não pode depender da orientação do sistema de coordenadas. Como consequência desta exigência, necessariamente

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \implies x_i \hat{e}_i = x'_i \hat{e}'_i. \quad (9.6)$$

Observando a figura 9.1a, percebe-se a seguinte relação imediata entre $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$ e $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2\}$:

$$\begin{aligned} \hat{e}'_1 &= \cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2 \\ \hat{e}'_2 &= -\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_2. \end{aligned}$$

Generalizando para o caso de uma rotação arbitrária dos eixos no \mathbb{E}^3 , como ilustrado na figura 9.1b, pode-se escrever, em geral,

$$\hat{e}'_i = S_{ji} \hat{e}_j, \quad (9.7a)$$

onde $\{S_{ij}\}$ são os elementos da *matriz de rotação* S . No caso particular da rotação em torno de x_3 , mostrado na figura 9.1a, esta matriz tem ordem 2 e seus elementos são

$$S = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

ou seja, estes elementos dependem somente de um parâmetro (ou ângulo) fixo.

Retornando ao caso geral, a relação (9.7a) pode ser escrita na forma matricial ao se definir as seguintes matrizes coluna e linha

$$\hat{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\hat{\mathbf{e}}} \equiv \hat{\mathbf{e}}^T = (\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3)$$

para os vetores unitários, sendo que os símbolos “ \sim ” ou “ T ” indicam a transposição da matriz. Neste caso, a transformação (9.7a) pode ser representada pela multiplicação matricial

$$\hat{\mathbf{e}}'^T = \hat{\mathbf{e}}^T S, \text{ ou } \hat{\mathbf{e}}' = \tilde{S} \hat{\mathbf{e}}.$$

Para uma rotação em torno de um eixo, somente um ângulo se faz necessário. Já no caso geral, é necessário pelo menos um ângulo adicional, mas esta rotação arbitrária sempre pode ser escrita em termos da matriz quadrada S de ordem 3, cujos elementos são funções de um ou mais parâmetros (ângulos) fixos. Para se construir essa matriz de rotação S para o caso geral, retorna-se inicialmente à figura 9.1a e define-se o **cosseno diretor**

$$S_{ji} \doteq \hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j \doteq \cos \theta_{ji},$$

o qual é a projeção do vetor \hat{e}'_i sobre o vetor \hat{e}_j . Este cosseno diretor é simplesmente o cosseno do ângulo θ_{ij} entre os vetores de base. Ou seja, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \hat{e}'_1 &= \cos \theta_{11} \hat{e}_1 + \cos \theta_{21} \hat{e}_2 = \cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2 \\ \hat{e}'_2 &= \cos \theta_{12} \hat{e}_1 + \cos \theta_{22} \hat{e}_2 = -\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_2, \end{aligned}$$

onde foi chamado $\theta_{11} = \theta$ e, por consequência, $\theta_{21} = \frac{\pi}{2} - \theta$, $\theta_{22} = \theta$ e $\theta_{12} = \frac{\pi}{2} + \theta$, de onde resultam as últimas expressões. Fazendo referência agora à figura 9.1b, observa-se que uma rotação geral do referencial R' em relação a R pode sempre ser expressa em termos dos 9 cossenos diretores $\{\theta_{ij}\}$. Contudo, será mostrado em seguir que somente 3 desses ângulos são independentes entre si.

A expressão (9.7a) descreve uma mudança de bases na transformação $\{\hat{e}_i\} \rightarrow \{\hat{e}'_i\}$ de um sistema de coordenadas Cartesiano para outro, rotado em relação ao original. A transformação inversa $\{\hat{e}'_i\} \rightarrow \{\hat{e}_i\}$ consiste na rotação inversa $\theta \rightarrow -\theta$ aplicada sobre a base $\{\hat{e}'_i\}$; esta transformação é escrita como

$$\hat{e}_i = (S^{-1})_{ji} \hat{e}'_j, \quad (9.7b)$$

onde S^{-1} é a matriz de rotação inversa.

O objetivo agora consiste em tomar a expressão para a mudança de bases $\{\hat{e}_i\} \leftrightarrow \{\hat{e}'_i\}$ para se obter uma relação entre as coordenadas dos sistemas, ou seja, para escrever $x'_i = x'_i(\{x_j\})$ ou $x_i = x_i(\{x'_j\})$. Antes, porém, com o intuito de simplificar a notação, introduz-se a *matriz de transformação* L tal que $L = S^{-1}$. Introduzindo então as relações (9.7a,b) em (9.6), resulta

$$\begin{cases} \hat{e}'_i = (L^{-1})_{ji} \hat{e}_j \\ \hat{e}_i = L_{ji} \hat{e}'_j \end{cases} \implies \begin{cases} x'_i = (S^{-1})_{ij} x_j = L_{ij} x_j \\ x_i = S_{ij} x'_j = (L^{-1})_{ij} x'_j. \end{cases} \quad (9.7c)$$

Cabe ressaltar agora que, definindo a matriz coluna $r = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T$, as transformações de coordenadas acima podem ser representadas pelas multiplicações matriciais

$$r' = Lr, \quad r = L^{-1}r'.$$

Levando em conta agora a exigência adicional de invariância da *norma* do espaço Euclidiano \mathbb{E}^3 , isto é, $\|r\| = \|r'\|$, resulta

$$x_i x_i = x'_i x'_i \implies x_i x_i = L_{ij} L_{ik} x_j x_k.$$

A identidade somente pode ser obedecida em geral se a seguinte **condição de ortogonalidade** é satisfeita:

$$L_{ki} L_{kj} = \delta_{ij} \text{ ou } L_{ik} L_{jk} = \delta_{ij}. \quad (9.8)$$

Comparando esta condição com a definição da matriz inversa de L , $L_{ij} (L^{-1})_{ki} = \delta_{jk}$, resulta que $L^{-1} = \tilde{L}$, sendo esta última a *transposta* da matriz L . A segunda expressão em (9.8) é consequência disto. Portanto, as leis desejadas para a transformação dos sistemas de coordenadas podem ser escritas como

$$\begin{cases} \hat{e}'_i = L_{ij} \hat{e}_j \\ \hat{e}_i = L_{ji} \hat{e}'_j \end{cases} \iff \begin{cases} x'_i = L_{ij} x_j \\ x_i = L_{ji} x'_j. \end{cases} \quad (9.9a)$$

A condição de ortogonalidade (9.8) também leva à seguinte classificação para a classe de rotações executadas no sistema de coordenadas. Escrevendo (9.8) na forma matricial, sendo I_3 a matriz identidade, e calculando o determinante, resulta

$$L\tilde{L} = I_3 \implies \det(L\tilde{L}) = \det(L) \det(\tilde{L}) = [\det(L)]^2 = 1.$$

Classifica-se, então,

$$\begin{aligned} \det(L) = +1 &\rightsquigarrow \text{Rotações próprias} \\ \det(L) = -1 &\rightsquigarrow \text{Rotações impróprias.} \end{aligned} \quad (9.9b)$$

Em (9.9b), uma rotação própria é aquela em que a transformação $R \rightarrow R'$ pode ser obtida por uma sequência de rotações infinitesimais. Já uma rotação imprópria corresponde a uma reflexão dos eixos (transformação de paridade), seguida por uma rotação própria.

A partir das relações de mudança de bases (9.7a,b) e lembrando que a matriz L depende somente de parâmetros fixos, as seguintes relações também podem ser deduzidas,

$$\begin{aligned} \hat{e}'_i = L_{ij} \hat{e}_j &\implies L_{ij} = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j \\ \hat{e}_i = L_{ji} \hat{e}'_j &\implies L_{ji} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}'_j \end{aligned} \quad (9.9c)$$

$$\begin{aligned} x'_i = L_{ij} x_j &\implies L_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \\ x_i = L_{ji} x'_j &\implies L_{ji} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j}. \end{aligned} \quad (9.9d)$$

Lembrando finalmente dos cossenos diretores, escreve-se $L_{ij} = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j = \cos \theta_{ij}$ e então, a partir da condição de ortogonalidade (9.8), resultam as equações

$$\begin{aligned} L_{1i}^2 + L_{2i}^2 + L_{3i}^2 &= 1 \quad (i = 1, 2, 3) \\ L_{1i}L_{1j} + L_{2i}L_{2j} + L_{3i}L_{3j} &= 0 \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Ou seja, a condição de ortogonalidade implica em 6 equações distintas que relacionam os diferentes valores de ângulo.

Por conseguinte, dos 9 cossenos diretores, somente 3 ângulos são realmente independentes. Uma das definições com frequência empregada para esses ângulos será discutida na seção 9.5.2.

A discussão recém realizada, sob o ponto de vista geométrico, acerca das propriedades das matrizes de rotação L e S ($= \tilde{L}$) já foi abordada nos exemplos 4.19, 4.20, 4.25 e 4.29 no contexto de grupos de Lie. Ou seja, a matriz de rotação L (própria ou imprópria) é uma representação do grupo $O(3)$.

Exercício 9.1. Encontre a matriz L (3×3) que realiza a rotação (própria) de eixos representada na figura 9.1a.

Solução. Usando os elementos da matriz S apresentados acima e sabendo que $S = L^{-1} = \tilde{L}$, resulta

$$S = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \tilde{L} \implies L = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observa-se que a matriz L obtida corresponde à representação $R^{(3)}(\theta) \in SO(3)$ derivada no exemplo 4.30.

Com base na lei de transformação (9.9a-e), é possível agora realizar uma classificação das quantidades físicas de acordo com o seu comportamento frente a uma rotação arbitrária no sistema de coordenadas adotado para representá-las.

Escalares (tensores de posto zero). Seja $\phi(\mathbf{r})$ uma quantidade física que, em geral, pode depender da posição de observação da mesma em relação à origem do sistema de coordenadas, mas que não é um vetor, ou seja, esta pode ser caracterizada por um único número. Se $\phi(\mathbf{r})$ for invariante frente a uma rotação arbitrária do sistema de coordenadas, descrita pela matriz L , então esta quantidade é denominada um *escalar* ou *tensor de posto* (ou *ordem*) *zero*.

Exemplos de quantidades físicas escalares são: massa, carga elétrica, potencial elétrico e energia. Certos produtos escalares de vetores e divergentes de campos vetoriais também são quantidades escalares.

Vetores (tensores de posto um). Seja $A \equiv A(\mathbf{r}) = A_i(\mathbf{r}) \hat{e}_i$ uma quantidade física representada por um conjunto de três quantidades escalares $\{A_i(\mathbf{r})\}$ no \mathbb{E}^3 , quando medidas em relação ao sistema de coordenadas Cartesiano R . Ao se aplicar uma rotação arbitrária $R \rightarrow R'$ ao sistema de coordenadas, descrita pela matriz L , as componentes desta quantidade física passam a ser representadas por $\{A'_i(\mathbf{r})\}$. A quantidade $A(\mathbf{r})$ é, então, um *vetor* ou um *tensor de posto um* se e somente se a relação equivalente a (9.9a), ou seja,

$$A'_i = L_{ij}A_j, \quad (9.10)$$

também se aplica entre suas componentes nos respectivos sistemas de coordenadas.

Posteriormente serão apresentadas algumas quantidades físicas vetoriais.

Tensores de posto (ou ordem) dois. Antes de se introduzir uma definição formal de tensores, será feita uma breve menção sobre tensores de posto dois, uma vez que estes aparecem com frequência em problemas físicos. A relação constitutiva (Lei de Ohm) (9.2) mostra que em um meio anisotrópico a relação entre os vetores \mathbf{J} e \mathbf{E} é determinada pela matriz de condutividade $\{\alpha_{ij}\}$, a qual possui 9 elementos no \mathbb{E}^3 . Esta matriz será a representação de um *tensor de posto dois* (tensor de condutividade elétrica) se e somente se, após realizada a transformação $R \rightarrow R'$, quando seus elementos serão então transformados $\{\alpha_{ij}\} \rightarrow \{\alpha'_{ij}\}$, estes elementos se relacionarem por

$$\alpha'_{ij} = L_{ik}L_{j\ell}\alpha_{k\ell}.$$

Além do tensor de condutividade elétrica, outros exemplos de tensores de posto dois são o tensor de campo eletromagnético e o tensor energia-momento, também denominado tensor de stress de Maxwell.

Finalmente, pode-se também classificar rotações e outras transformações como *passivas* ou *ativas*.

Transformação passiva. Em uma transformação passiva o sistema físico é mantido inalterado e somente o sistema de coordenadas é alterado. As rotações ilustradas na figura 9.1 são exemplos de transformações passivas.

Transformação ativa. Já em uma transformação ativa, o referencial é mantido fixo e a transformação é aplicada ao sistema físico em estudo. A figura 9.2 ilustra uma rotação ativa realizada sobre um sistema composto por duas cargas elétricas interagentes.

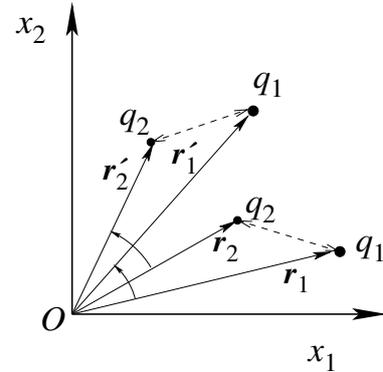


Figura 9.2: Exemplo de uma transformação ativa.

Na seção seguinte será realizada uma definição formal de tensores, partindo das leis de transformação (9.9a-e) aqui deduzidas. Antes, porém, outros tipos de transformações serão brevemente discutidos.

9.2.2 TRANSFORMAÇÕES DE PARIDADE OU REFLEXÕES

Uma *transformação de paridade*, também denominada *reflexão espacial* ou *inversão de paridade*, é uma transformação em que uma ou mais coordenadas do sistema de referência são invertidas, ou seja, $x_i \rightarrow -x_i$. Uma reflexão espacial em um plano consiste em inverter o sinal da coordenada normal ao plano, mantendo as coordenadas sobre o plano inalteradas. Assim, uma reflexão no plano $x_1 - x_2$ consiste em realizar a transformação

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2, -x_3).$$

Já uma *inversão espacial* ou transformação de paridade é realizada invertendo-se os sinais de todas as coordenadas do referencial, ou seja,

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = -\mathbf{r}. \quad (9.11)$$

A matriz de transformação para (9.11) pode ser escrita simplesmente como $L_{ij} = -\delta_{ij}$. Ou seja, $\det(L) = -1$, implicando que uma inversão espacial é sempre imprópria.

Esta transformação permite a definição de uma nova classificação das quantidades físicas em função de seu comportamento frente a inversões espaciais.

Escalares ou pseudoescalares. Dado o campo $\phi(\mathbf{r})$, esta quantidade é um *escalar* se permanecer inalterado frente a uma operação de inversão espacial. Caso contrário, esta quantidade é um *pseudoescalar*.

Um exemplo de um pseudoescalar é obtido a partir do produto misto $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, desde que \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} sejam todos *vetores polares*, os quais serão definidos a seguir.

Vetores polares ou vetores axiais (pseudovetores). Um *vetor polar* ou simplesmente vetor é aquela quantidade $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ que continua se transformando de acordo com a relação (9.10), mesmo quando realizada uma reflexão espacial, ou seja, se

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = -\mathbf{A} \text{ quando } \mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}.$$

Um *vetor axial* ou *pseudovetor* é aquela quantidade $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$ que frente a uma transformação de paridade comporta-se como

$$\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}' = \mathbf{B}.$$

Um exemplo de um vetor axial é obtido partindo-se de dois vetores polares \mathbf{a} e \mathbf{b} e obtendo-se o vetor \mathbf{c} a partir de $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Neste caso, o vetor \mathbf{c} é um pseudovetor.

Tensores ou pseudotensores. As propriedades de transformação de tensores de posto N arbitrário podem ser deduzidas facilmente se estes são puderem ser construídos a partir de produtos de vetores polares e/ou axiais. Se for realizada uma transformação de paridade sobre um tensor de posto N e este se transformar com o fator $(-1)^N$, então este é denominado um *tensor verdadeiro* ou simplesmente *tensor*. Contudo, se a inversão espacial levar ao fator $(-1)^{N+1}$, então este é denominado de *pseudotensor* de posto N .

9.2.3 REVERSÃO TEMPORAL

Um outro tipo de transformação relevante aos sistemas físicos é a *transformação de reversão temporal* $t \rightarrow t' = -t$. Embora esta transformação não se aplica a sistemas descritos pela mecânica newtoniana, na qual a dependência temporal no comportamento do sistema físico é considerada de forma distinta da sua dependência espacial, mesmo assim é importante que esta seja discutida.

As leis básicas da física comportam-se de maneira bem determinada frente a inversão no sentido de evolução do tempo, e esse comportamento permite classificar as quantidades físicas como *pares* ou *ímpares* frente a uma reversão temporal.

Transformação par. Uma determinada quantidade física é *par* frente a uma reversão temporal se a lei física que a determina não muda de sinal frente à transformação $t \rightarrow t' = -t$.

Um exemplo simples de uma quantidade par é o vetor posição, $\mathbf{r} \xrightarrow{t \rightarrow -t} \mathbf{r}$. Um outro vetor par é a aceleração de uma partícula, pois

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \xrightarrow{t \rightarrow -t} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{a}.$$

Transformação ímpar. Uma quantidade física é *ímpar* frente a uma reversão temporal se a lei física que a determina muda de sinal frente a esta transformação.

Um exemplo de quantidade ímpar é o momentum de uma partícula, pois (para massa constante)

$$\mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \xrightarrow{t \rightarrow -t} -m \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{p}.$$

As propriedades de algumas quantidades fundamentais na mecânica clássica e no eletromagnetismo frente às transformações discutidas nas seções 9.2.1 – 9.2.3 são apresentadas na tabela 9.1.

As definições e o comportamento das quantidades físicas frente a transformações passivas do sistema de coordenadas, discutidos nesta seção, serão desenvolvidos em maiores detalhes nas seções posteriores. Para esta discussão aprofundada acerca dos tensores Cartesianos, será considerada de forma preponderante a transformação de rotação (própria) do sistema de referência.

9.3 TENSORES CARTESIANOS

Nesta seção serão realizadas definições um pouco mais rigorosas dos campos escalares, vetoriais e tensoriais e suas propriedades sob transformações em geral. A discussão ainda estará restrita aos chamados *tensores Cartesianos*. Esta restrição será posteriormente eliminada na seção 9.7.

Uma vez que os campos de interesse na física dependem de forma contínua nas coordenadas do vetor posição, será realizada inicialmente uma breve discussão a respeito de espaços funcionais e suas classes. Essa discussão servirá como uma continuação à definição 2.22 de uma função.

9.3.1 ESPAÇOS FUNCIONAIS

Um *espaço funcional* é formado por um conjunto de funções $f : X \mapsto Y$ (definição 2.22) de um determinado tipo ou *classe*, que estabelecem um mapeamento do conjunto X ao conjunto Y .

Tabela 9.1: Propriedades de transformação de algumas quantidades físicas na mecânica clássica e no eletromagnetismo.

Quantidade Física		Rotação (posto do tensor)	Inversão Espacial	Reversão Temporal
Mecânica Clássica				
Posição	r	1	Polar	Par
Momentum linear	p	1	Polar	Ímpar
Momentum angular	$L = r \times p$	1	Axial	Ímpar
Força	F	1	Polar	Par
Torque	$\tau = r \times F$	1	Axial	Par
Energia Cinética	$p^2/2m$	0	Escalar	Par
Energia potencial	$U(r)$	0	Escalar	Par
Eletromagnetismo				
Densidade de carga	$\rho(r)$	0	Escalar	Par
Densidade de corrente	$J(r)$	1	Polar	Ímpar
Campo elétrico	$E(r)$	1	Polar	Par
Deslocamento elétrico	$D(r)$	1	Polar	Par
Polarização	$P(r)$	1	Polar	Par
Indução magnética	$B(r)$	1	Axial	Ímpar
Campo magnético	$H(r)$	1	Axial	Ímpar
Vetor de Poynting	$S = E \times B$	1	Polar	Ímpar
Tensor de stress	T_{ij}	2	Tensor	Par

Este conjunto de funções é denominado um *espaço* porque em muitas aplicações de interesse para a física esse conjunto forma um *espaço topológico*⁴ (incluindo espaços métricos⁵), um espaço vetorial,⁶ ou ambos. Por exemplo, o conjunto de todas as transformações lineares⁷ (ou funções) do espaço vetorial \mathcal{V} ao espaço vetorial \mathcal{W} sobre o mesmo corpo \mathbb{K} é, em si mesmo, um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{K} .

Alguns exemplos relevantes destes espaços funcionais são:

- $\mathcal{C}[a, b]$, o conjunto de todas as funções reais $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ contínuas no intervalo (fechado) $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
- $\mathcal{C}^r[a, b]$, o conjunto de todas as funções reais que são contínuas até a derivada de ordem r no intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
- $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, o conjunto de todas as funções reais contínuas que são nulas no infinito.
- $\mathcal{C}^r(\mathbb{R})$, o conjunto de todas as funções reais que são contínuas até a derivada de ordem r .
- $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, o conjunto de todas as funções reais que possuem derivadas em todas as ordens. Estas funções também são denominadas de *funções suaves*.
- $\mathcal{L}_1[a, b]$, o conjunto de todas as funções reais cujo valor absoluto é integrável no intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
- $\mathcal{L}_2[a, b]$, o conjunto de todas as funções reais quadraticamente integráveis no intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

A partir desta definição de espaços funcionais é possível prosseguir com a definição de campos tensoriais em geral. Inicialmente serão tratados os campos escalares e vetoriais, os quais serão em seguida generalizados.

9.3.2 TENSORES CARTESIANOS DE POSTOS ZERO E UM

Nesta seção serão apresentadas as definições dos campos escalares e vetoriais, bem como suas propriedades de transformação.

⁴Definição 3.40.

⁵Definição 3.35.

⁶Capítulo 3.

⁷Seção 3.4.

Sejam os conjuntos \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n , respectivamente formados pelos produtos Cartesianos⁸ de \mathbb{R} ou \mathbb{C} consigo mesmos $n - 1$ vezes. Uma **região** Ω de \mathbb{R}^n ou de \mathbb{C}^n consiste em um subconjunto dos mesmos que é não vazio, aberto e conectado.⁹ O subconjunto Ω é uma **região fechada** se este contiver o *fecho* do mesmo, isto é, seus pontos-limite. Esta definição de região de um conjunto numérico pode ser imediatamente estendida para referir a subconjuntos de qualquer estrutura mais complexa, como corpos, espaços vetoriais ou espaços afim.

Nas definições a seguir, os campos escalares e vetoriais são definidos sobre espaços vetoriais Euclidianos.¹⁰ A generalização para espaços não Euclidianos será apresentada na seção 9.7.

Definição 9.1 (Campo escalar). Seja $U \subset \mathbb{E}^n$ uma região do espaço Euclidiano \mathbb{E}^n de dimensão n . Um *campo escalar* ϕ da classe C^r sobre U é o mapeamento

$$\phi : U \mapsto \mathbb{K}$$

sobre o corpo \mathbb{K} , o qual atribui a cada ponto $r \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$ a função $\phi = \phi(r) \equiv \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^r(U)$.

Nas aplicações para a física, usualmente $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Alguns dos exemplos mais conhecidos de campos escalares:

- *Campos potenciais*, tais como o potencial escalar elétrico ou o potencial escalar gravitacional.
- Em hidrodinâmica, *temperatura*, *humidade* e *pressão* também são descritos como campos escalares.
- Na teoria quântica de campos, os campos escalares são atribuídos a partículas de spin 0.

Já um campo vetorial é apresentado desde as disciplinas básicas de física e matemática como um conjunto de setas orientadas, tangenciais às *linhas de força* oriundas do(s) agente(s) que gera(m) o campo. Um exemplo típico de visualização de um campo vetorial é apresentado na figura 9.3. Duas cargas elétricas pontuais geram o campo elétrico representado em alguns pontos da figura como setas orientadas que são tangenciais às linhas de força. Uma terceira carga elétrica posicionada em qualquer ponto do espaço irá sentir uma força elétrica cuja direção será paralela à reta tangente à linha de força nessa posição.

A aparente simplicidade desta concepção visual do que é um campo vetorial esconde uma complexidade intrínseca devido ao conjunto de objetos matemáticos distintos envolvidos e nas suas inter-relações.

Um campo vetorial é composto por *vetores*, que são os componentes de um espaço vetorial. Observando com atenção a definição do que é um espaço vetorial, realizada na seção 3.1, nota-se que os vetores são, estritamente, objetos algébricos, *i. e.*, não lhes é atribuída *a priori* nenhuma estrutura geométrica ou analítica.

Porém, um campo vetorial também possui uma concepção geométrica inerente, uma vez que o campo se distribui no espaço a partir do(s) agente(s) gerador(es). Além disso, para o seu cálculo, o campo vetorial também necessita de um sistema de referências, com uma escala de medidas bem definida. Por isso, um campo vetorial também deve ser um tipo de espaço métrico (definição 3.35).

A estrutura matemática que estabelece a interrelação entre um espaço vetorial e um espaço métrico é o espaço afim (definição 3.46), o qual estabelece de forma rigorosa os conceitos de *vetores posição* e *deslocamento*, os quais localizam os pontos do espaço métrico através de setas

⁸Definição 2.27.

⁹Um conjunto ou *espaço conectado* é um espaço topológico que não pode ser formado pela união de dois ou mais subconjuntos não vazios disjuntos.

¹⁰Ver exemplo 3.5.

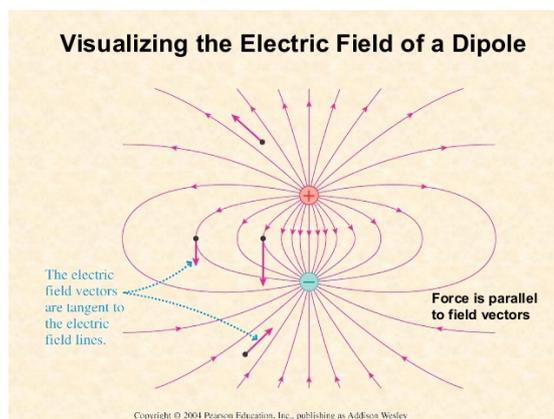


Figura 9.3: Visualização das linhas de força de um dipolo elétrico e do campo elétrico resultante em alguns pontos particulares.

orientadas que partem da origem do sistema de coordenadas. Qualquer transformação de um ponto do espaço a outro é então realizada pelo vetor deslocamento, o qual é uma seta orientada que parte do primeiro a termina no segundo (nesta seção serão considerados campos vetoriais sobre o espaço vetorial Euclidiano \mathbb{E}^n , exemplo 3.5).

Finalmente, sobre cada ponto do espaço \mathbb{E}^n localizado pelo vetor \mathbf{r} será atribuído um vetor do campo vetorial, vinculado a esse ponto. Esse vetor terá a característica adicional de possuir uma topologia, *i. e.*, os conceitos de limite e continuidade são supostos válidos em relações aos vetores do campo em pontos da vizinhança imediata de \mathbf{r} , de tal forma que seja possível realizar operações do cálculo infinitesimal (derivações ou integrações), pelo menos na vizinhança do ponto.

Definição 9.2 (Campo vetorial). Seja $\mathbb{E}^n = (\mathbb{E}^n, \mathcal{R}^n)$ o espaço vetorial Euclidiano e seja $U \subset \mathbb{E}^n$ uma região deste espaço. Seja \mathcal{K}^n um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{K} de dimensão n , o qual pode ser o espaço real \mathcal{R}^n ou o espaço complexo \mathcal{C}^n (definições 3.3 e 3.4). Um *campo vetorial* \mathbf{A} da classe \mathcal{C}^r sobre U é o mapeamento

$$\mathbf{A} : U \mapsto \mathcal{K}^n,$$

o qual atribui a cada ponto $\mathbf{r} \equiv (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^n$ a *função vetorial*

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{A}(x_1, \dots, x_n) \doteq (A_1(\mathbf{r}), A_2(\mathbf{r}), \dots, A_n(\mathbf{r})) \in \mathcal{K}^n,$$

para a qual cada componente é o campo escalar

$$A_k(\mathbf{r}) \in \mathcal{C}^r(U), \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

O conjunto de todos os campos vetoriais da classe $\mathcal{C}^r(U)$ sobre U é denotado por $\mathfrak{A}^r(U)$. O conjunto de todos os espaços vetoriais da classe $\mathcal{C}^\infty(U)$ sobre U é denotado por $\mathfrak{A}^\infty(U)$ ou simplesmente por $\mathfrak{A}(U)$.

Retomando então as definições e considerações realizadas na seção 9.2.1, serão impostas agora condições adicionais às componentes de um campo vetorial. A quantidade $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_i(\mathbf{r}) \hat{e}_i$ é um **vetor** ou um **tensor Cartesiano de posto (ou ordem) um** de um campo vetorial se e somente se suas componentes comportam-se frente a uma rotação do sistema de coordenadas de acordo com as relações (9.9a-d) e (9.10), repetidas aqui juntamente com a respectiva transformação inversa,

$$A'_i = L_{ij} A_j = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} A_j \quad (9.12a)$$

$$A_i = L_{ji} A'_j = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} A'_j, \quad (9.12b)$$

uma vez que a matriz de rotação é ortogonal, de acordo com (9.8).

Exercício 9.2. Considere a matriz de rotação L obtida no exercício 9.1, a qual executa uma rotação passiva de R por um ângulo θ em torno de x_3 . Verifique se as triplas ordenadas $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (v_1(\mathbf{r}), v_2(\mathbf{r}), v_3(\mathbf{r}))$, dadas por

$$(i) \mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x_2, -x_1, x_3) \quad (ii) \mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x_2, x_1, x_3) \quad (iii) \mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x_1^2, x_2^2, x_3)$$

correspondem a campos vetoriais no \mathbb{E}^3 .

Solução. Dada a matriz

$$L = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

como o eixo x_3 não é transformado pela rotação, este não precisa ser considerado. Por outro lado, de acordo com a relação (9.9a), $x'_i = L_{ij} x_j$, ou seja,

$$\begin{aligned} x'_1 &= L_{1j} x_j = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\ x'_2 &= L_{2j} x_j = -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta. \end{aligned}$$

Tripla (i). As componentes de $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ são $v_1(\mathbf{r}) = x_2$, $v_2(\mathbf{r}) = -x_1$ e $v_3(\mathbf{r}) = x_3$.

Se esta tripla realmente é um vetor, então espera-se que suas componentes se transformem como

$$\begin{aligned}v_1 &\longrightarrow v'_1 = x'_2 = -x_1 \operatorname{sen} \theta + x_2 \operatorname{cos} \theta \\v_2 &\longrightarrow v'_2 = -x'_1 = -x_1 \operatorname{cos} \theta - x_2 \operatorname{sen} \theta.\end{aligned}$$

Para verificar se isto ocorre, aplica-se a relação (9.12a), ou seja, $v'_i = L_{ij}v_j$, de onde se obtém

$$\begin{aligned}v'_1 &= v_1 \operatorname{cos} \theta + v_2 \operatorname{sen} \theta = x_2 \operatorname{cos} \theta - x_1 \operatorname{sen} \theta \\v'_2 &= -v_1 \operatorname{sen} \theta + v_2 \operatorname{cos} \theta = -x_2 \operatorname{sen} \theta - x_1 \operatorname{cos} \theta.\end{aligned}$$

Como ambas as expressões são as mesmas, a quantidade $v = (x_2, -x_1, x_3)$ de fato é um vetor.

Tripla (ii). As componentes desta tripla devem se transformar como

$$\begin{aligned}v'_1 &= x'_2 = -x_1 \operatorname{sen} \theta + x_2 \operatorname{cos} \theta \\v'_2 &= x'_1 = x_1 \operatorname{cos} \theta + x_2 \operatorname{sen} \theta.\end{aligned}$$

Verificando, de $v'_i = L_{ij}v_j$ obtém-se

$$\begin{aligned}v'_1 &= v_1 \operatorname{cos} \theta + v_2 \operatorname{sen} \theta = x_2 \operatorname{cos} \theta + x_1 \operatorname{sen} \theta \\v'_2 &= -v_1 \operatorname{sen} \theta + v_2 \operatorname{cos} \theta = -x_2 \operatorname{sen} \theta + x_1 \operatorname{cos} \theta,\end{aligned}$$

as quais são distintas das expressões acima. Portanto este objeto não é um vetor.

Tripla (iii). Para este objeto, basta verificar que a primeira componente,

$$v'_1 = (x'_1)^2 = x_1^2 \operatorname{cos}^2 \theta + x_2^2 \operatorname{sen}^2 \theta + 2x_1x_2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta$$

não satisfaz a condição, uma vez que deveria resultar

$$v'_1 = v_1 \operatorname{cos} \theta + v_2 \operatorname{sen} \theta = x_1^2 \operatorname{cos} \theta + x_2^2 \operatorname{sen} \theta.$$

Portanto, este objeto também não é um vetor.

Um vetor, portanto, é um tensor cujos componentes são identificados com um único índice, por enquanto posicionado somente na posição inferior (subscrito). Os componentes deste tensor devem se alterar, frente a uma rotação do sistema de coordenadas, de acordo com as relações (9.12).

Já um *campo escalar* ou, simplesmente, um *escalar*, por sua vez, é descrito por uma única função $\phi(\mathbf{r})$ e, por esta razão, é também denominado um *tensor de posto zero*, pois não necessita de índices para identificação de componentes. Por conseguinte, um objeto matemático somente será classificado como um escalar se este for invariante frente à rotação do referencial.

Objetos escalares também podem ser contruídos a partir do produto escalar de dois vetores. Sendo $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ dois vetores quaisquer, então, usando (9.12a) e (9.8),

$$\phi(\mathbf{r}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \xrightarrow{R \rightarrow R'} \phi'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}' = L_{ij}L_{ik}A_jB_k = A_jB_j = \phi(\mathbf{r}).$$

Esta propriedade possui aplicações físicas importantes, pois diversas quantidades escalares como trabalho, energia potencial e densidade de energia nos campos eletromagnéticos são obtidas a partir de produtos escalares de vetores. Estas propriedades são, respectivamente, proporcionais a $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, $q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$, $\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$ e $\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$.

Outra maneira de se obter um escalar a partir de um vetor é através do operador divergente. Se $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ é um vetor, então

$$\phi(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \xrightarrow{R \rightarrow R'} \phi'(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_i} \right)' = \frac{\partial A'_i}{\partial x'_i}.$$

Levando em conta agora que deve existir uma lei de transformação $x'_i = x'_i(\{x_j\})$ bem definida, pode-se usar a regra da cadeia e escrever, usando (9.9d), (9.12a) e (9.8),

$$\phi'(\mathbf{r}) = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial A'_i}{\partial x_j} = L_{ij}L_{ik} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_j} = \phi(\mathbf{r}).$$

De forma recíproca, é possível obter-se um vetor a partir de um escalar. Uma maneira de realizar este feito consiste na aplicação do operador gradiente sobre um campo escalar $\phi(\mathbf{r})$, resultando assim

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \hat{e}_i.$$

Dada a lei de transformação $x_i = x_i(\{x'_j\})$, emprega-se a derivação em cadeia, realiza-se a mudança de base $\{\hat{e}_i\} \rightarrow \{\hat{e}'_i\}$, e, empregando (9.9d), resulta

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \frac{\partial\phi}{\partial x'_j} L_{ki} \hat{e}'_k = L_{ji} L_{ki} \frac{\partial\phi}{\partial x'_j} \hat{e}'_k = \frac{\partial\phi}{\partial x'_j} \hat{e}'_j,$$

a qual é justamente a expressão para o vetor $\mathbf{A}' = \nabla'\phi$ no referencial R' .

9.3.3 TENSORES CARTESIANOS DE POSTO DOIS OU SUPERIOR

Seguindo na discussão iniciada na seção 9.2.1 acerca de tensores de posto dois, a definição prévia então realizada será agora generalizada.

Tensores são objetos geométricos que estabelecem relações lineares entre vetores, escalares e outros tensores. Um exemplo que já foi empregado é o tensor de condutividade (9.2) que relaciona o campo elétrico com o vetor densidade de corrente elétrica.

Um tensor pode ser representado por uma matriz multidimensional de valores numéricos. O **posto** ou **ordem** de um tensor é a dimensão da matriz necessária para a sua representação. Desta maneira, um *escalar* é um tensor de posto zero e um *vetor* é um vetor de posto um.

Por expressar uma relação entre vetores, a representação empregada para um tensor irá depender da base do sistema de coordenadas e do referencial empregado. Grande parte dos tensores empregados na física estabelecem relações entre objetos definidos no espaço vetorial Euclidiano \mathbb{E}^n usando uma base ortonormal. Estes são usualmente denominados de tensores Cartesianos.

Definição 9.3 (Tensor Cartesiano). Um *tensor Cartesiano* é aquele tensor cuja representação é obtida a partir de uma base ortonormal do espaço vetorial Euclidiano \mathbb{E}^n , no qual é empregado o sistema Cartesiano de coordenadas. O número de índices necessário para identificar todos os seus componentes determina o *posto* ou a *ordem* do tensor.

Da mesma maneira como foi argumentado para vetores na seção 9.2.1, o *tensor* como uma entidade fisico-matemática deve permanecer invariante frente a uma transformação no sistema de coordenadas. Esta exigência fundamental estabelece simultaneamente a lei de transformação de seus elementos ou componentes, bem como a própria definição de um tensor de um determinado posto. Será apresentada primeiro a definição de um tensor do posto dois.

Definição 9.4 (Tensor Cartesiano de posto 2). Seja \mathbb{E}^3 o espaço vetorial Euclidiano de dimensão 3 e $\hat{e} \doteq \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ uma base ortonormal do mesmo. Seja $T[\hat{e}]$ a matriz quadrada 3×3 cujos elementos $T_{ij}[\hat{e}]$ estão representados na base \hat{e} . Seja também a transformação de coordenadas $\hat{e} \rightarrow \hat{e}'$, em conjunto com a transformação inversa $\hat{e}' \rightarrow \hat{e}$, tais que

$$\hat{e}'_i = L_{ij} \hat{e}_j = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \hat{e}_j, \quad \hat{e}_i = L_{ji} \hat{e}'_j = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \hat{e}'_j.$$

Se os elementos da matriz $T[\hat{e}]$ se transformarem frente às transformações $\hat{e} \leftrightarrow \hat{e}'$ de acordo com a lei de transformação

$$T'_{ij} = L_{ik} L_{j\ell} T_{k\ell} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x'_j}{\partial x_\ell} T_{k\ell} \quad (9.13a)$$

$$T_{ij} = L_{ki} L_{\ell j} T'_{k\ell} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_k} \frac{\partial x_j}{\partial x'_\ell} T'_{k\ell}, \quad (9.13b)$$

então a matriz $T[\hat{e}]$ representa um *tensor Cartesiano de posto dois*.

Da mesma maneira como foi realizado com vetores, os índices que identificam os distintos componentes do tensor estão na posição inferior. Posteriormente, no contexto de tensores generalizados, será permitido o posicionamento de índices tanto na posição inferior (subíndices) quanto na superior (superíndices). Isto será discutido na seção 9.7.

Como a extensão lógica da definição 9.13, considera-se agora uma matriz $T[\hat{e}]$ de n dimensões, isto é, a coleção de 3^n quantidades identificadas pelo símbolo $T_{i_1 \dots i_n}[\hat{e}]$, o qual contém n índices. Então, a seguinte definição é realizada.

Definição 9.5 (Tensor Cartesiano de posto n). Seja \mathbb{E}^3 o espaço vetorial Euclidiano de dimensão 3 e $\hat{e} \doteq \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ uma base ortonormal do mesmo. Seja $T[\hat{e}]$ a matriz cujos elementos

$$T_{i_1 i_2 \dots i_n}[\hat{e}], \quad (i_1, i_2, \dots, i_n = 1, 2, 3)$$

estão representados na base \hat{e} . A matriz $T[\hat{e}]$ representa um *tensor Cartesiano de posto n* se e somente se suas coordenadas se transformarem de acordo com a lei de transformação

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_n} = L_{i_1 j_1} L_{i_2 j_2} \dots L_{i_n j_n} T_{j_1 j_2 \dots j_n} = \frac{\partial x'_{i_1}}{\partial x_{j_1}} \frac{\partial x'_{i_2}}{\partial x_{j_2}} \dots \frac{\partial x'_{i_n}}{\partial x_{j_n}} T_{j_1 j_2 \dots j_n} \quad (9.14a)$$

$$T_{i_1 \dots i_n} = L_{j_1 i_1} L_{j_2 i_2} \dots L_{j_n i_n} T'_{j_1 j_2 \dots j_n} = \frac{\partial x_{i_1}}{\partial x'_{j_1}} \frac{\partial x_{i_2}}{\partial x'_{j_2}} \dots \frac{\partial x_{i_n}}{\partial x'_{j_n}} T'_{j_1 j_2 \dots j_n}. \quad (9.14b)$$

Obviamente, a definição (9.14) contém os tensores de ordem zero, um e dois como casos particulares.

Uma das desvantagens das definições 9.4 e 9.5 está no fato de não ser evidente a invariância do tensor frente a transformação de coordenadas. Embora essa invariância possa ser demonstrada, é interessante apresentar também uma definição mais moderna, a qual independe do sistema de coordenadas e da base adotados para representar o tensor.

A definição a seguir interpreta um tensor de posto n como uma *forma multilinear*¹¹ que realiza a projeção do produto Cartesiano \mathcal{V}^n do espaço vetorial \mathcal{V} sobre o corpo subjacente \mathbb{K} .

Definição 9.6 (Espaço tensorial (Cartesiano)). Seja \mathcal{V} um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{K} . Seja

$$\mathcal{V}^n \doteq \underbrace{\mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V}}_{n \text{ vezes}}$$

o produto Cartesiano de \mathcal{V} . A forma multilinear

$$T : \mathcal{V}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

é denominada um *tensor Cartesiano sobre \mathcal{V}* . A potência n do produto \mathcal{V}^n determina o *posto* do tensor. Conjunto de tensores sobre \mathcal{V} podem formar espaços vetoriais denominados *espaços tensoriais Cartesianos*.

Retornando agora à discussão feita na página 333 sobre a concepção intuitiva de um campo vetorial, dado o espaço Euclidiano, sobre cada ponto do mesmo atribui-se um tensor Cartesiano, cujos elementos são contínuos e diferenciáveis, de tal forma que seja possível a aplicação de operadores íntegro-diferenciais sobre os mesmos.

Antes de se realizar a definição de um campo tensorial, é necessário definir um campo vetorial generalizado.

Definição 9.7 (Campo vetorial generalizado). Seja $\mathbb{E}^m = (\mathbb{E}^m, \mathcal{R}^m)$ o espaço vetorial Euclidiano de dimensão m e seja $U \subset \mathbb{E}^m$ uma região deste espaço. Sejam $A_1(\mathbf{r}), A_2(\mathbf{r}), \dots, A_n(\mathbf{r})$ um conjunto de n campos vetoriais de dimensão m e da classe $\mathcal{C}^r(U)$. Um *campo vetorial generalizado de ordem n e da classe \mathcal{C}^r sobre U* é a m^n -upla ordenada

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}) \doteq (A_{11}(\mathbf{r}), \dots, A_{1m}(\mathbf{r}), A_{21}(\mathbf{r}), \dots, A_{ij}(\mathbf{r}), \dots, A_{nm}(\mathbf{r})),$$

formada pelos campos escalares $\{A_{ij}(\mathbf{r}) \in \mathbb{K}, \forall i = 1, \dots, n \text{ e } j = 1, \dots, m\}$.

Definição 9.8 (Campo tensorial Cartesiano). Seja $\mathbb{E}^m = (\mathbb{E}^m, \mathcal{R}^m)$ o espaço vetorial Euclidiano de dimensão m e seja $U \subset \mathbb{E}^m$ uma região deste espaço. Seja $\mathcal{T}(\mathbf{r})$ um campo vetorial generalizado de ordem n e da classe $\mathcal{C}^r(U)$. Sendo

$$T_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{r}), \quad (i_j = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n),$$

uma componente deste espaço vetorial, se para todos $\{i_1, \dots, i_n = 1, \dots, m\}$ esta componente se transformar como um tensor Cartesiano de posto n (equações 9.14) frente a uma transformação de coordenadas em \mathbb{E}^m , então $\mathcal{T}(\mathbf{r})$ forma um *campo tensorial Cartesiano de posto n e da classe \mathcal{C}^r sobre U* .

¹¹Ver definição 3.12.

Serão apresentados agora alguns exercícios referentes a campos tensoriais.

Exercício 9.3. Mostre que os componentes da matriz

$$T = \begin{pmatrix} x_2^2 & -x_1x_2 \\ -x_1x_2 & x_1^2 \end{pmatrix}$$

formam um tensor de posto 2 frente a uma rotação dos eixos coordenados.

Solução. Dadas as relações entre as coordenadas $x'_1 = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta$ e $x'_2 = -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta$, espera-se que

$$\begin{aligned} T' &= \begin{pmatrix} (x'_2)^2 & -x'_1x'_2 \\ -x'_1x'_2 & (x'_1)^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)^2 & (x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)(x_1 \sin \theta - x_2 \cos \theta) \\ (x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)(x_1 \sin \theta - x_2 \cos \theta) & (x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para verificar, emprega-se a lei de transformação (9.13a), resultando

$$\begin{aligned} T'_{11} &= x_2^2 \cos^2 \theta - 2x_1x_2 \sin \theta \cos \theta + x_1^2 \sin^2 \theta \\ T'_{12} &= -x_2^2 \sin \theta \cos \theta - x_1x_2 \cos^2 \theta + x_1x_2 \sin^2 \theta + x_1^2 \sin \theta \cos \theta \\ T'_{21} &= T'_{12} \\ T'_{22} &= x_2^2 \sin^2 \theta + 2x_1x_2 \sin \theta \cos \theta + x_1^2 \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

Ou seja, as expressões para os componentes são idênticas, o que confirma que T é de fato um tensor de posto 2.

Exercício 9.4 (Símbolos de Kronecker e Levi-Civita). Mostre que os símbolos de Kronecker (δ_{ij}) e de Levi-Civita (ϵ_{ijk}) apresentados na seção 9.1.2 são, na verdade, tensores de postos dois e três, respectivamente, sob o ponto de vista de rotações próprias no espaço.

Solução. Dados os símbolos δ_{ij} e ϵ_{ijk} , definidos conforme é descrito na seção 9.1.2 em um determinado sistema de coordenadas. Se estes objetos forem realmente tensores, respectivamente de segunda e terceira ordens, então a aplicação da lei de transformação geral (9.14) a ambos irá gerar outros tensores que possuem as mesmas propriedades no outro sistema de coordenadas.

Verificando esta propriedade para a delta de Kronecker, de (9.14) e (9.8) resulta

$$\delta'_{ij} = L_{ik}L_{jm}\delta_{km} = L_{ik}L_{jk} = \delta_{ij}.$$

Ou seja, a lei de transformação $R \rightarrow R'$ gera um símbolo de Kronecker δ'_{ij} que possui os mesmos componentes do sistema original. Portanto, δ_{ij} transforma-se da maneira esperada para um tensor de posto dois.

Verificando agora para o símbolo de Levi-Civita, novamente de (9.14) resulta

$$\epsilon'_{ijk} = L_{im}L_{jn}L_{kl}\epsilon_{mnl}.$$

Emprega-se agora a seguinte fórmula para o cálculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem 3: sendo A uma matriz qualquer, então

$$\det(A) \epsilon_{ijk} = A_{im}A_{jn}A_{kl}\epsilon_{mnl}. \quad (9.15)$$

Substituindo na expressão acima os elementos de A pelos respectivos elementos da matriz de transformação L , resulta então que

$$\epsilon'_{ijk} = \det(L) \epsilon_{ijk}.$$

Portanto, de acordo com (9.9c), se a transformação realizada em R for própria, como é o caso de uma rotação dos eixos, então, $\epsilon'_{ijk} = \epsilon_{ijk}$ e o símbolo de Levi-Civita satisfaz a lei de transformação.

Exercício 9.5. Mostre que o tensor de stress de Maxwell, definido por

$$T_{ij} = \epsilon_0 \left[E_i E_j + c^2 B_i B_j - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + c^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \delta_{ij} \right],$$

sendo \mathbf{E} e \mathbf{B} respectivamente os campos elétrico e de indução magnética, ϵ_0 a constante de permissividade elétrica do vácuo e c a velocidade da luz no vácuo, é realmente um tensor de posto dois.

Solução. Como ϵ_0 e c são escalares e \mathbf{E} e \mathbf{B} vetores por hipótese, então na transformação $R \rightarrow R'$, $E'_i = L_{ij}E_j$, $B'_i = L_{ij}B_j$ e $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ e $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$ também são escalares. Portanto, se T_{ij} é um tensor de posto 2, então este deve satisfazer (9.13),

$$\begin{aligned} T'_{ij} &= L_{ik}L_{jm}T_{km} \\ &= \epsilon_0 \left[L_{ik}L_{jm}E_kE_m + c^2L_{ik}L_{jm}B_kB_m - \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + c^2\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})L_{ik}L_{jm}\delta_{km} \right] \\ &= \epsilon_0 \left[E'_iE'_j + c^2B'_iB'_j - \frac{1}{2}(\mathbf{E}' \cdot \mathbf{E}' + c^2\mathbf{B}' \cdot \mathbf{B}')\delta_{ij} \right]. \end{aligned}$$

Ou seja, T_{ij} possui a mesma estrutura em qualquer sistema de coordenadas.

Um comentário final importante se refere à simbologia utilizada para representar um tensor de posto N . Um tensor de posto 2 pode ser representado naturalmente por uma matriz; assim, se o conjunto $\{T_{ij}\}$ compreende os 9 componentes de um tensor deste posto, este pode ser representado coletivamente por \mathbf{T} a qual é a notação empregada neste texto para uma matriz genérica.

Contudo, tensores de postos mais altos não podem ser representados por matrizes. Assim, se $\{T_{ijk}\}$ contém os 27 componentes de um tensor de posto 3, este pode ser representado de forma genérica como \mathcal{T} , sem mostrar explicitamente o seu posto.

A notação introduzida acima será empregada para representar um tensor genérico, quando o seu posto não for importante. Esta notação permite também tratar o tensor como um objeto geométrico genérico, onde não é feita menção do sistema de coordenadas em particular onde seus componentes são calculados.

Assim, o tensor \mathcal{T} tem os seus componentes dados por $\{T_{ijk}\}$ no sistema de coordenadas R , ao passo que os componentes do mesmo tensor no referencial rotado R' são dados por $\{T'_{ijk}\}$. Desta forma, o tensor pode ser representado de uma maneira semelhante aos operadores diferenciais gradiente (∇), divergente ($\nabla \cdot$) e rotacional ($\nabla \times$), cujos símbolos são os mesmos, independente do sistema adotado. Esta notação será aplicada na próxima seção.

9.4 ÁLGEBRA TENSORIAL

Como os tensores consistem em extensões lógicas dos conceitos de vetores e matrizes, é natural que as regras algébricas impostas a estes objetos sejam equivalentes àquelas aplicadas às estruturas mais simples citadas, e se reduzam a estas regras como casos particulares. Estas regras de álgebra serão discutidas nesta seção.

9.4.1 ADIÇÃO DE TENSORES

A adição (e também a subtração) de tensores é definida naturalmente como a extensão lógica das adições de vetores e matrizes. Para que esta generalização tenha sentido, contudo, deve-se impor como condição necessária que todos os tensores sendo adicionados tenham o mesmo posto.

Se $\{T_{ij\dots r}\}$ e $\{U_{ij\dots r}\}$ são os componentes dos tensores \mathcal{T} e \mathcal{U} , ambos de posto N , então a soma e a diferença destes geram, respectivamente, os tensores \mathcal{S} e \mathcal{D} de mesmo posto, cujos componentes são dados por

$$\begin{aligned} S_{ij\dots r} &= T_{ij\dots r} + U_{ij\dots r} \\ D_{ij\dots r} &= T_{ij\dots r} - U_{ij\dots r}. \end{aligned}$$

Estas operações podem ser representadas de forma genérica como $\mathcal{S} = \mathcal{T} + \mathcal{U}$ e $\mathcal{D} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$, respectivamente.

9.4.2 SIMETRIA E ANTISSIMETRIA

É simples demonstrar que, se $\{T_{ij\dots k}\}$ são os componentes de um tensor, então o conjunto de funções obtido pela permutação de quaisquer dois índices do conjunto original, ou seja, $\{T_{ji\dots k}\}$, também será um tensor. Contudo, este tensor não irá apresentar, em geral, uma simetria bem

definida frente a permuta quaisquer dois de seus índices. Somente uma classe particular de tensores apresenta tais propriedades.

Restringindo inicialmente a discussão para tensores de posto 2, dado o \mathcal{T} , cujos componentes são $\{T_{ij}\}$. Se suas componentes apresentarem uma simetria bem definida frente a troca $i \leftrightarrow j$, esta pode se manifestar de duas maneiras:

$$\begin{aligned} \text{se } T_{ij} &= T_{ji} \rightsquigarrow \text{tensor } \mathbf{simétrico}; \\ \text{se } T_{ij} &= -T_{ji} \rightsquigarrow \text{tensor } \mathbf{antissimétrico}. \end{aligned}$$

Embora um outro tensor \mathcal{U} não necessariamente apresente propriedades de simetria bem definidas, este sempre pode ser escrito como uma combinação de suas partes simétrica e antissimétrica através da identidade

$$U_{ij} = \frac{1}{2}(U_{ij} + U_{ji}) + \frac{1}{2}(U_{ij} - U_{ji}),$$

sendo que o primeiro termo a *parte simétrica* de U_{ij} , enquanto que o segundo termo é a sua *parte antissimétrica*.

Considerando agora um tensor de posto N qualquer, seja $\{T_{ijk\dots r}\}$ o conjunto de componentes de \mathcal{T} . Se este tensor apresentar propriedade de simetria, então há duas possibilidades:

$$T_{ijk\dots r} = T_{jik\dots r}, \quad T_{ijk\dots r} = T_{kji\dots r}, \text{ etc}$$

é **simétrico** com respeito aos índices i e j ou i e k , *etc*; ou,

$$T_{ijk\dots r} = -T_{jik\dots r}, \quad T_{ijk\dots r} = -T_{kji\dots r}, \text{ etc}$$

é **antissimétrico** com respeito aos mesmos índices.

Da mesma maneira, um tensor genérico \mathcal{U} pode sempre ser escrito como uma combinação de suas partes simétrica e antissimétrica, frente uma permutação de dois índices quaisquer, como

$$U_{ijk\dots r} = \frac{1}{2}(U_{ijk\dots r} + U_{jik\dots r}) + \frac{1}{2}(U_{ijk\dots r} - U_{jik\dots r}),$$

ou

$$U_{ijk\dots r} = \frac{1}{2}(U_{ijk\dots r} + U_{kji\dots r}) + \frac{1}{2}(U_{ijk\dots r} - U_{kji\dots r}),$$

etc.

A separação de tensores ou operadores em suas partes simétrica e antissimétrica é de extrema importância em diversas disciplinas, tais como mecânica e eletromagnetismo de meios contínuos e mecânica quântica.

9.4.3 TENSORES HERMITIANOS OU ANTI-HERMITIANOS

Uma propriedade adicional relacionada a tensores de posto dois e cujas componentes são funções analíticas complexas é a hermiticidade dos mesmos.

Usualmente representados por matrizes, tensores de posto dois também são *Hermitianos* ou *anti-Hermitianos* se apresentarem simetria frente a operação de **conjugação Hermitiana**, definida da seguinte maneira. Seja A uma matriz quadrada cujos elementos $\{A_{ij}\}$ são complexos. O seu *Hermitiano conjugado* ou *adjunto*, denotado por A^\dagger , é obtido a partir da conjugação complexa dos elementos da matriz transposta, isto é,

$$A^\dagger = (A^*)^T = (A^T)^*,$$

sendo que os elementos de A^\dagger são dados por

$$(A^\dagger)_{ij} = A_{ji}^*.$$

Como é sempre possível usar uma representação matricial para um tensor de posto dois, em muitas aplicações físicas é aplicada a operação de conjugação Hermitiana ao mesmo.

Da mesma forma como é definido para matrizes, portanto, um tensor de posto dois \mathcal{A} é *Hermitiano* ou *autoadjunto* se satisfaz a propriedade

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^\dagger.$$

Por outro lado, este tensor é *anti-Hermitiano* se

$$\mathcal{A} = -\mathcal{A}^\dagger.$$

É possível então definir as partes Hermitiana e anti-Hermitiana de um tensor \mathcal{A} respectivamente por

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^H &= \frac{1}{2} (\mathcal{A} + \mathcal{A}^\dagger) \\ \mathcal{A}^{aH} &= \frac{1}{2i} (\mathcal{A} - \mathcal{A}^\dagger).\end{aligned}$$

Desta forma, sempre se pode escrever \mathcal{A} como

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^H + i\mathcal{A}^{aH}.$$

Em muitos meios descritos por tensores complexos, as respectivas partes Hermitiana e anti-Hermitiana estão relacionadas com processos físicos distintos que ocorrem neste meio.

Exemplo 9.1. Em um meio contínuo, linear e homogêneo, mas anisotrópico e dissipativo, a relação constitutiva entre o campo elétrico \mathbf{E} e o vetor deslocamento elétrico \mathbf{D} pode ser escrita, no espaço de Fourier, como

$$D_i(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega),$$

onde \mathbf{k} e ω são, respectivamente, o vetor de onda e a frequência angular das ondas que se propagam neste meio e $\{\varepsilon_{ij}\}$ são as componentes do tensor dielétrico do meio. Para este meio, o teorema de Poynting, que descreve a conservação de energia entre campos e partículas, pode ser escrito como

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_g U) = -\frac{\omega}{8\pi} \mathbf{E} \cdot \varepsilon^{aH} \cdot \mathbf{E},$$

sendo $\mathbf{v}_g = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$ a velocidade de grupo das ondas e¹²

$$U = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{\partial(\omega \varepsilon^H)}{\partial\omega} \right] : \mathbf{E}\mathbf{E}$$

a densidade de energia contida nos campos.

Na equação acima, o termo $\mathbf{v}_g U = \mathbf{S}$ corresponde ao vetor de Poynting, ou seja, ao fluxo local de energia. Conclui-se, portanto, que a parte Hermitiana de ε_{ij} está relacionada com a refração ou ao fluxo da energia transportada pelas ondas, ao passo que a parte anti-Hermitiana está relacionada com a dissipação irreversível de energia devido a interação dos campos com o meio.

9.4.4 PRODUTO EXTERNO DE TENSORES

O *produto externo* de dois ou mais tensores, também denominado *produto direto* ou *produto tensorial*, consiste em uma operação que permite a construção de um tensor com posto mais alto que os tensores-pais. De fato, o posto do tensor resultante é exatamente igual à soma dos postos de seus progenitores.

O produto externo é realizado de diferentes maneiras. A maneira usual consiste na multiplicação direta de componentes dos tensores envolvidos. Uma outra maneira de se construir um tensor de posto mais alto consiste em se aplicar os componentes de um operador sobre os componentes de outro tensor. Ambas as maneiras serão abordadas nesta seção.

9.4.4.1 PRODUTO EXTERNO DE DOIS TENSORES

Considera-se inicialmente um caso mais simples. Dados os vetores $\mathbf{a} = a_i \hat{\mathbf{e}}_i$ e $\mathbf{b} = b_i \hat{\mathbf{e}}_i$, deseja-se contruir a partir destes um tensor de posto dois \mathcal{T} , cujos componentes são dados pelo produto externo dos vetores acima, ou seja,

$$T_{ij} = a_i b_j.$$

¹²Ver notação de diádicas e seus produtos nas seções 9.4.4.2 e 9.4.5.3.

Os componentes T_{ij} resultantes desta construção de fato pertencem ao tensor \mathcal{T} , o que pode ser facilmente demonstrado. Se isto for verdade, então na transformação $R \rightarrow R'$ devem resultar os componentes

$$T'_{ij} = a'_i b'_j.$$

Usando a lei de transformação para os vetores, resulta

$$T'_{ij} = L_{ik} L_{j\ell} a_k b_\ell = L_{ik} L_{j\ell} T_{k\ell},$$

a qual é justamente a lei de transformação de um tensor do posto 2.

Na sua representação matricial, o tensor \mathcal{T} pode ser escrito como a matriz 3×3

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}.$$

Este tipo de produto externo é representado de diferentes maneiras, todas independentes do sistema de coordenadas adotado. Uma maneira usual consiste em empregar o símbolo \otimes . Nesta notação, dados os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} acima, o tensor \mathcal{T} é representado como

$$\mathcal{T} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a_i b_j \hat{e}_i \otimes \hat{e}_j, \quad (9.16a)$$

e as componentes resultantes deste tensor também podem ser representadas por

$$T_{ij} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij}. \quad (9.16b)$$

9.4.4.2 DIÁDICAS

No caso particular de tensores de posto dois, uma outra representação, um tanto ultrapassada mas ainda empregada em alguns textos, é a de uma diádica. Esta é uma outra maneira de se representar o produto externo de dois vetores, estendendo a álgebra vetorial usual e resultando em um tensor. Dados os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} , a diádica \mathcal{T} é obtida pela simples justaposição destes vetores, ou seja,

$$\mathcal{T} = \mathbf{a}\mathbf{b} = a_i b_j \hat{e}_i \hat{e}_j.$$

Uma vantagem que esta notação possui está na praticidade de realização de produtos de diádicas entre si ou com vetores, como será mostrado a seguir. Contudo, em se tratando de uma prática em desuso, será dada preferência para a notação de produto externo introduzida em (9.16).

9.4.4.3 GRADIENTE DE UM VETOR

Uma outra maneira de se construir um tensor de posto 2 consiste em aplicar o operador gradiente sobre um vetor, operação esta que não está definida na álgebra vetorial ordinária.

Dado o operador $\nabla = \hat{e}_i \partial / \partial x_i$ e o vetor $\mathbf{v} = v_i \hat{e}_i$, o componente T_{ij} do tensor \mathcal{T} é definido como

$$T_{ij} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}.$$

Esta expressão pode ser escrita de uma forma genérica, independente do sistema de coordenadas adotado, como

$$\mathcal{T} = \nabla \mathbf{v} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \hat{e}_i \hat{e}_j.$$

Neste caso em particular, a notação empregada é em muito semelhante ao de uma diádica, exceto que é feito uso de um operador diferencial no lugar de um vetor ordinário.

9.4.4.4 PRODUTO EXTERNO EM GERAL

Considera-se agora o caso mais geral de produto externo entre dois tensores arbitrários. Dado o tensor \mathcal{T} de posto M e o tensor \mathcal{U} de posto N , o produto externo destes gera o tensor \mathcal{V} com posto $M + N$, cujas componentes são

$$\underbrace{V_{i \dots pq \dots}}_{M+N \text{ índices}} = \underbrace{T_{i \dots p}}_{M \text{ índices}} \underbrace{U_{q \dots}}_{N \text{ índices}}.$$

A notação para este produto externo é, então

$$\mathcal{V} = \mathcal{T} \otimes \mathcal{U}.$$

9.4.5 CONTRAÇÃO E PRODUTO INTERNO

A definição do produto externo, na seção 9.4.4, possibilitou a construção de um tensor de um dado posto a partir de outros tensores de ordem mais baixa. Processos inversos também são definidos na álgebra tensorial, ou seja, operações aplicadas sobre um determinado tensor de posto N que reduzem o seu posto, resultando em outro tensor de posto $N - 2$. Uma destas operações é denominada de *contração de índices* ou, simplesmente, *contração*. Uma outra operação, denominada *produto interno*, está relacionada com a contração dos índices e será também discutida. Obviamente, para que esta operação tenha sentido, é necessário que $N \geq 2$.

9.4.5.1 CONTRAÇÃO

Dado um tensor \mathcal{T} de posto $N \geq 2$, uma contração deste tensor consiste em tomar qualquer par de seus índices, representá-los com o mesmo símbolo e executar então a sua soma implícita. A resultante desta operação será um novo tensor \mathcal{U} de posto $N - 2$. Dado então o conjunto $\{T_{ijkl\dots r}\}$, as expressões a seguir apresentam algumas de suas possíveis contrações:

$$U_{kl\dots r} = T_{iikl\dots r}, V_{il\dots r} = T_{ijjl\dots r}, W_{jl\dots r} = T_{ijil\dots r}, X_{ikl\dots} = T_{ijkl\dots j}, \text{ etc.}$$

Claramente, o número de contrações possíveis depende do posto do tensor. Se $N = 2$, somente uma contração é possível. Neste caso, a operação é equivalente ao cálculo do traço da matriz que representa o tensor e o resultado da operação é uma quantidade escalar. Se o posto for $N = 3$, há 3 contrações possíveis, gerando o mesmo número de vetores distintos. Em geral, um tensor de posto $N \geq 2$ pode gerar por contrações um total de $N!/2 (N - 2)!$ tensores de posto $N - 2$.

Para mostrar que o objeto resultante da contração é realmente um tensor de posto $N - 2$, parte-se da lei de transformação (9.14a) aplicada a \mathcal{T} ,

$$T'_{ij\dots\ell\dots m\dots k} = L_{ip}L_{jq}\dots L_{lr}\dots L_{ms}\dots L_{kn}T_{pq\dots r\dots s\dots n}.$$

Contraindo os índices ℓ e m no componente transformado à esquerda e utilizando a condição de ortogonalidade (9.8), resulta

$$\begin{aligned} T'_{ij\dots\ell\dots\ell\dots k} &= L_{ip}L_{jq}\dots L_{lr}\dots L_{ls}\dots L_{kn}T_{pq\dots r\dots s\dots n} \\ &= L_{ip}L_{jq}\dots \delta_{rs}\dots L_{kn}T_{pq\dots r\dots s\dots n} \\ &= \underbrace{L_{ip}L_{jq}\dots L_{kn}}_{N-2 \text{ fatores}} T_{pq\dots r\dots r\dots n}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$U'_{ij\dots k} = L_{ip}L_{jq}\dots L_{kn}U_{pq\dots n},$$

ou que mostra que \mathcal{U} é realmente um tensor de posto $N - 2$.

9.4.5.2 PRODUTO INTERNO

O produto interno, conforme definido em espaços vetoriais, é bem conhecido. Se a e b são membros do espaço vetorial \mathcal{V} , então o produto interno entre ambos, usualmente representado por $\langle a, b \rangle$, terá como resultado uma quantidade escalar.

A forma mais empregada do produto interno para aplicações físicas é o *produto escalar* entre dois vetores a e b do \mathbb{E}^3 ,¹³ resultando no escalar c ,

$$c = a \cdot b. \tag{9.17}$$

De acordo com a terminologia aqui empregada, trata-se de um produto entre dois tensores de posto um, resultando em um tensor de posto zero.

Estendendo o conceito de produto interno a tensores de posto mais alto e relacionando esta operação com a definição de contração de índices anteriormente apresentada, pode-se dizer que a operação realizada em (9.17) consiste, inicialmente, no produto externo dos vetores a e b , resultando em um tensor de posto 2, seguida posteriormente pela contração dos índices deste tensor, o que resulta finalmente em um escalar:

$$C = a \otimes b \rightsquigarrow c = C_{ii} = a_i b_i.$$

¹³Exemplo 3.3.

A única característica própria nesta operação em relação ao processo geral de contração de índices está no fato de que no produto interno a contração é realizada sobre os índices de tensores-pais (de postos M e N) distintos, os quais foram inicialmente justapostos por uma operação de produto externo, resultando em um tensor-filho de ordem $M + N$. Como resultado do produto interno, igualmente resulta um tensor de posto $M + N - 2$.

Assim, se \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} e \mathcal{D} são tensores de postos M , N , $M + N$ e $M + N - 2$, respectivamente a seguinte cadeia de operações ilustra a o produto interno entre \mathcal{A} e \mathcal{B} , resultando no tensor \mathcal{D} ,

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} &\rightsquigarrow \underbrace{C_{ijk\dots r}}_M \underbrace{\ell mn\dots s}_N = A_{ijk\dots r} B_{\ell mn\dots s} \\ &\implies \underbrace{D_{ik\dots r mn\dots s}}_{M+N-2} \equiv C_{ijk\dots r} B_{mn\dots s} = A_{ijk\dots r} B_{jmn\dots s}. \end{aligned}$$

No caso acima, foi realizada a contração no índices j de cada tensor. Obviamente, a contração em outros índices irá gerar tensores de posto $M + N - 2$ em geral distintos de \mathcal{D} . Por conseguinte, há diversos produtos internos possíveis entre tensores de ordem maior que dois.

9.4.5.3 PRODUTOS COM DIÁDICAS

A definição de produto interno acima realizada é particularmente útil na notação de diádicas (seção 9.4.4.2). Sendo a e b vetores e \mathcal{C} uma diádica, formada pela justaposição dos vetores,

$$\mathcal{C} = \mathbf{ab} = a_i b_j \hat{e}_i \hat{e}_j,$$

Esta poderá sofrer produto interno com um outro vetor c , tanto à esquerda quanto à direita, resultando nos vetores d e e , em geral distintos entre si. Além disso, o produto interno envolvendo diádicas utiliza a mesma notação do produto escalar entre vetores. Assim,

$$\begin{aligned} d &= c \cdot \mathcal{C} = c_i a_i b_j \hat{e}_j \\ e &= \mathcal{C} \cdot c = a_i b_j c_j \hat{e}_i. \end{aligned}$$

Na verdade, no caso específico de produtos envolvendo diádicas é possível também definir o *produto vetorial* de uma diádica por um vetor, com a mesma definição empregada na álgebra vetorial.¹⁴ Agora, o resultando desta operação é uma outra diádica e também são possíveis produtos à esquerda ou à direita. Assim, sendo \mathcal{F} e \mathcal{G} diádicas, o produto vetorial de c por \mathcal{C} pela esquerda ou pela direita resultam em

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = c \times \mathcal{C} &= (c \times a) b = c_i a_j b_k (\hat{e}_i \times \hat{e}_j) \hat{e}_k = \epsilon_{ilk} a_k b_j c_\ell \hat{e}_i \hat{e}_j \\ \mathcal{G} = \mathcal{C} \times c &= a (b \times c) = a_i b_j c_k \hat{e}_i (\hat{e}_j \times \hat{e}_k) = \epsilon_{jkl} a_i b_k c_\ell \hat{e}_i \hat{e}_j, \end{aligned}$$

onde se fez uso de (9.5). Portanto, há quatro operações possíveis envolvendo uma diádica e um vetor.

Existem também 7 possíveis produtos, tanto escalares quanto vetoriais, envolvendo duas diádicas. Considerando agora os vetores a , b , c e d e as diádicas $\mathcal{A} = ab$ e $\mathcal{B} = cd$, estas são apresentadas na tabela 9.2.

9.4.6 REGRA DO QUOCIENTE

Como consequência da definição de produto externo na seção 9.4.4, foi demonstrado que se \mathcal{A} e \mathcal{B} são tensores de postos M e N , respectivamente, então o produto externo destes gera o tensor $\mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, de posto $M + N$.

A regra do quociente consiste na propriedade recíproca do produto externo. Assumindo agora que \mathcal{B} e \mathcal{C} são tensores de postos N e $M + N$, respectivamente, caso exista um conjunto de objetos $\{A_{ij\dots k\dots m}\}$, identificados por M índices, tal que

$$\underbrace{A_{ij\dots k\dots m}}_{M \text{ índices}} \underbrace{B_{np\dots q\dots r}}_{N \text{ índices}} = \underbrace{C_{ij\dots k\dots mn p\dots q\dots r}}_{M+N \text{ índices}}$$

então $\{A_{ij\dots k\dots m}\}$ necessariamente compõe os componentes do tensor \mathcal{A} de posto M .

¹⁴Exemplo 3.6.

Tabela 9.2: Possíveis operações de produto entre duas diádicas.

	Produtos escalares	Produtos vetoriais
Operação única	Produto escalar $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = (ab) \cdot (cd) = (b \cdot c) ad$	N/A
Contração de índices	O fator de expansão consiste na contração de índices usual: $\text{Tr}(\mathcal{A}) = a \cdot b = a_i b_i$	O fator de rotação origina-se do produto vetorial entre os vetores da diádica: $A \equiv \langle \mathcal{A} \rangle = a \times b$ $= a_i b_j \hat{e}_i \times \hat{e}_j$ $= \epsilon_{ikj} a_k b_j \hat{e}_i.$
Operação dupla incluindo produto escalar	Produto escalar duplo $\mathcal{A} : \mathcal{B} = (ab) : (cd)$ $= a_i b_j c_k d_\ell (\hat{e}_i \hat{e}_j) : (\hat{e}_k \hat{e}_\ell)$ $= a_i b_j c_k d_\ell (\hat{e}_j \cdot \hat{e}_k) (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_\ell)$ $= (a \cdot d) (b \cdot c)$	Produto escalar-vetorial $\mathcal{A} \dot{\times} \mathcal{B} = (ab) \dot{\times} (cd) = (a \cdot c) (b \times d)$
Operação dupla incluindo produto vetorial	Produto vetorial-escalar $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = (ab) \times (cd) = (a \times c) (b \cdot d)$	Duplo produto vetorial $\mathcal{A} \times \times \mathcal{B} = (ab) \times \times (cd) = (a \times c) (b \times d)$

Demonstração. A demonstração deste teorema segue da lei de transformação de tensores. Como \mathcal{B} (posto N) e \mathcal{C} (posto $M + N$) são, por hipótese, tensores, então a transformação $R \rightarrow R'$ leva os componentes do conjunto $\{A_{\dots}\}$ a um outro conjunto de valores $\{A'_{\dots}\}$, ainda não determinados. Como consequência, existe a seguinte relação no sistema R' ,

$$A'_{ij\dots k\dots m} B'_{np\dots q\dots r} = C'_{ij\dots k\dots mnp\dots q\dots r}.$$

Dada agora a lei de transformação (9.14a),

$$A'_{ij\dots k\dots m} L_{na} L_{pb} \dots L_{qc} \dots L_{rd} B_{ab\dots c\dots d} = L_{ie} L_{jh} \dots L_{ks} \dots L_{mv} L_{na} L_{pb} \dots L_{qc} \dots L_{rd} C_{eh\dots s\dots vab\dots c\dots d},$$

$$L_{na} L_{pb} \dots L_{qc} \dots L_{rd} (A'_{ij\dots k\dots m} B_{ab\dots c\dots d} - L_{ie} L_{jh} \dots L_{ks} \dots L_{mv} C_{eh\dots s\dots vab\dots c\dots d}) = 0.$$

Como a transformação é arbitrária, a equação acima somente pode ser satisfeita para todos os componentes se

$$A'_{ij\dots k\dots m} B_{ab\dots c\dots d} - L_{ie} L_{jh} \dots L_{ks} \dots L_{mv} C_{eh\dots s\dots vab\dots c\dots d} = 0.$$

Introduzindo agora a relação original entre os conjuntos $\{A_{\dots}\}$, $\{B_{\dots}\}$ e $\{C_{\dots}\}$,

$$A'_{ij\dots k\dots m} B_{ab\dots c\dots d} - L_{ie} L_{jh} \dots L_{ks} \dots L_{mv} A_{eh\dots s\dots v} B_{ab\dots c\dots d} = 0,$$

$$(A'_{ij\dots k\dots m} - L_{ie} L_{jh} \dots L_{ks} \dots L_{mv} A_{eh\dots s\dots v}) B_{ab\dots c\dots d} = 0.$$

Como esta identidade deve ser satisfeita para qualquer tensor \mathcal{B} , então, necessariamente,

$$A'_{ij\dots k\dots m} = L_{ie} L_{jh} \dots L_{ks} \dots L_{mv} A_{eh\dots s\dots v}.$$

Ou seja, a relação entre os conjuntos $\{A_{\dots}\}$ e $\{A'_{\dots}\}$ é idêntica à lei de transformação (9.14a). Portanto, \mathcal{A} é realmente um tensor de posto M . \square

O uso da regra do quociente para determinar se um determinado conjunto de objetos é de fato um tensor consiste, muitas vezes, em uma maneira mais conveniente de se cumprir este objetivo do que a aplicação direta das leis de transformação. Uma maneira particular de se realizar esta tarefa consiste em efetuar contração de índices de forma a obter-se um escalar ou um tensor de posto mais baixo.

A mesma conclusão obtida acima com relação ao produto externo de dois tensores também é válida para o seu produto interno. Sendo novamente $\{A_{ij\dots k\dots m}\}$ um conjunto de M objetos e \mathcal{B} e \mathcal{D} tensores de postos N e $M + N - 2$, respectivamente, então a relação

$$A_{ij\dots k\dots m} B_{np\dots k\dots r} = D_{ij\dots mnp\dots r}$$

implica em que $\{A_{\dots}\}$ forma o conjunto de componentes de um tensor de posto M .

Demonstração. A demonstração segue novamente da relação equivalente no sistema transformado,

$$\begin{aligned} A'_{ij\dots\ell\dots m} B'_{np\dots\ell\dots r} &= D'_{ij\dots mnp\dots r}, \\ L_{na} L_{pb} \dots L_{rd} (L_{\ell k} A'_{ij\dots\ell\dots m} B_{ab\dots k\dots d} - L_{ie} L_{jh} \dots L_{mv} D_{eh\dots vab\dots d}) &= 0, \\ L_{\ell k} A'_{ij\dots\ell\dots m} B_{ab\dots k\dots d} - L_{ie} L_{jh} \dots L_{mv} D_{eh\dots vab\dots d} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{\ell k} A'_{ij\dots\ell\dots m} B_{ab\dots k\dots d} - L_{ie} L_{jh} \dots L_{mv} A_{eh\dots k\dots v} B_{ab\dots k\dots d} &= 0, \\ (L_{\ell k} A'_{ij\dots\ell\dots m} - L_{ie} L_{jh} \dots L_{mv} A_{eh\dots k\dots v}) B_{ab\dots k\dots d} &= 0, \\ L_{\ell k} A'_{ij\dots\ell\dots m} - L_{ie} L_{jh} \dots L_{mv} A_{eh\dots k\dots v} &= 0. \end{aligned}$$

Usando a condição de ortogonalidade (9.8) no resultado acima, resulta

$$\begin{aligned} L_{nk} L_{\ell k} A'_{ij\dots\ell\dots m} - L_{ie} L_{jh} \dots L_{nk} \dots L_{mv} A_{eh\dots k\dots v} &= 0, \\ A'_{ij\dots n\dots m} &= L_{ie} L_{jh} \dots L_{nk} \dots L_{mv} A_{eh\dots k\dots v}, \end{aligned}$$

a qual é a lei de transformação do tensor \mathcal{A} de posto M . □

Obviamente, como há mais de uma contração de índices possível para tensores de posto maior que um, o produto interno ilustrado acima poderia ser realizado em qualquer par de índices dos tensores \mathcal{A} e \mathcal{B} .

Exercício 9.6. Use a lei do quociente para mostrar que a matriz \mathbb{T} do exercício 9.3 é realmente a representação de um tensor de posto dois.

Solução. Dado que a diádica rr é um tensor de posto dois, realiza-se a contração dupla de índices das componentes desta diádica com a matriz \mathbb{T} , o que pode ser representado pela seguinte multiplicação matricial,

$$T_{ij} x_i x_j = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} x_2^2 & -x_1 x_2 \\ -x_1 x_2 & x_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} x_1 x_2^2 - x_1 x_2^2 \\ -x_1^2 x_2 + x_1^2 x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Como o resultado desta contração é um escalar e rr é um tensor, então, pela lei do quociente, \mathcal{T} também deve ser um tensor.

Exemplo 9.2. Considera-se uma partícula de massa m rigidamente conectada à origem do referencial. Se r e p forem, respectivamente, a posição e momentum linear instantâneos da partícula, então a i -ésima componente de seu momentum angular é dada por

$$L_i = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k.$$

Como a partícula está presa a uma distância fixa da origem O , então

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}),$$

sendo $\boldsymbol{\omega}$ a sua velocidade angular instantânea. Portanto, L_i pode ser escrito, fazendo uso de (9.3), como

$$L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k = m \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} x_j x_m \omega_l = m (r^2 \omega_i - x_i x_j \omega_j) = m (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \omega_j \equiv I_{ij} \omega_j.$$

A quantidade

$$I_{ij} = m (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j)$$

é denominada *tensor de inércia* da partícula em relação a O .

O conjunto $\{I_{ij}\}$ ($i, j = 1, 2, 3$) realmente compõe um tensor de posto dois, uma vez que L e $\boldsymbol{\omega}$ são tensores de posto um e, de acordo com a lei do quociente, segue então que \mathcal{I} é necessariamente um tensor de posto dois.

9.5 COMPOSIÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES, ROTAÇÕES INFINITESIMAIS E TENSORES ISOTRÓPICOS

Nesta seção serão discutidos alguns tópicos de interesse geral.

9.5.1 COMPOSIÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES

Quando mais de uma transformação é realizada sobre o sistema de coordenadas de forma concomitante, a transformação resultante sempre pode ser escrita em termos de uma única matriz de transformação.

Restringindo a tensores de posto um, realizam-se duas transformações concomitantes ao referencial,

$$R \xrightarrow{L^{(1)}} R' \xrightarrow{L^{(2)}} R''.$$

Dado então um vetor a , este será transformado como

$$a'_i = L_{ij}^{(1)} a_j \rightsquigarrow a''_i = L_{ij}^{(2)} a'_j = L_{ij}^{(2)} L_{jk}^{(1)} a_k.$$

Ou seja, as transformações concomitantes irão corresponder a uma única transformação

$$a''_i = L_{ij} a_j,$$

cujas matriz de transformação é

$$L_{ij} = L_{ik}^{(2)} L_{kj}^{(1)} \longrightarrow L = L^{(2)} L^{(1)}.$$

Em particular, duas rotações seguidas em torno do eixo x_3 , de ângulos θ_1 e θ_2 , consecutivamente, correspondem a uma única rotação por um ângulo $\theta_1 + \theta_2$. Pode-se verificar facilmente que, neste caso, estas rotações podem ser realizadas em qualquer ordem.

O exemplo acima, contudo, é um caso particular onde as transformações são permutáveis. Em geral, a multiplicação matricial não comuta, isto é, $L^{(2)}L^{(1)} \neq L^{(1)}L^{(2)}$.

9.5.2 ROTAÇÕES INFINITESIMAIS

Rotações arbitrárias são um exemplo de transformações não comutáveis. Dadas duas matrizes de rotações gerais $L^{(1)}$ e $L^{(2)}$, em geral a ordem de realização das mesmas é importante.

Uma forma comum de se realizar uma rotação arbitrária de eixos consiste no emprego dos *ângulos de Euler*, os quais são ilustrados na figura 9.4. Com o uso destes ângulos, pode-se construir uma matriz genérica de rotação, a qual é uma função somente dos parâmetros ϕ , θ e ψ . Fazendo isso, a expressão obtida para a matriz de rotação E é

$$\begin{aligned} E_{11} &= \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & E_{12} &= \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & E_{13} &= \sin \psi \sin \theta \\ E_{21} &= -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & E_{22} &= -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & E_{23} &= \cos \psi \sin \theta \\ E_{31} &= \sin \theta \sin \phi & E_{32} &= -\sin \theta \cos \phi & E_{33} &= \cos \theta. \end{aligned}$$

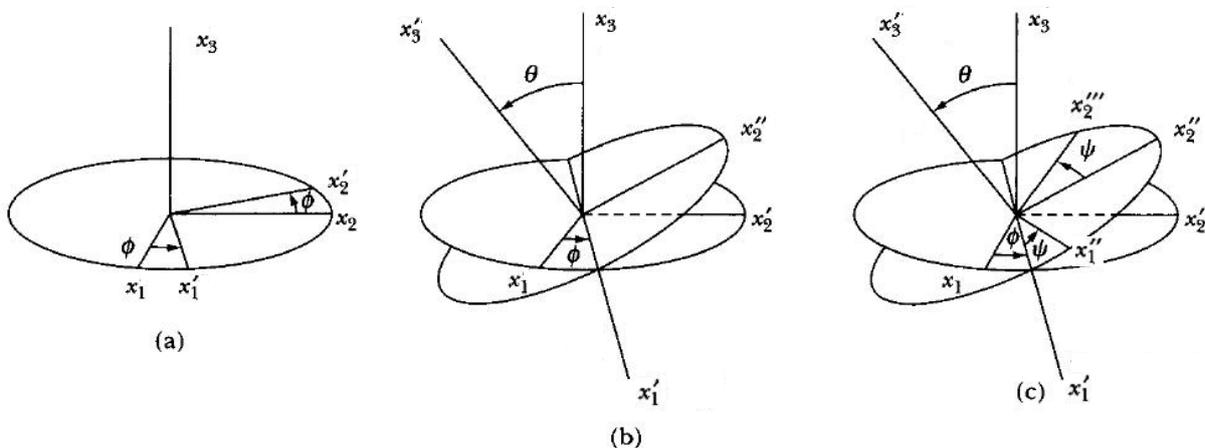


Figura 9.4: Ângulos de Euler usualmente empregados para executar uma rotação arbitrária no sistema de coordenadas. (a) Primeira rotação: sentido anti-horário em torno de x_3 , por um ângulo ϕ . (b) Segunda rotação: sentido anti-horário por um ângulo θ em torno do eixo x'_1 . (c) Terceira rotação: sentido anti-horário por um ângulo ψ em torno de x''_3 .

Na técnica dos ângulos de Euler, a matriz de rotação geral é construída a partir de três rotações consecutivas, realizadas sempre no sentido anti-horário e em torno de um determinado eixo de rotação.

Os ângulos de Euler são apenas uma das formas de se implementar uma rotação arbitrária em três dimensões. De uma forma genérica, estas rotações parciais são realizadas com as seguintes matrizes

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \quad L^{(2)} = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \quad L^{(3)} = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

as quais correspondem a rotações em torno dos eixos x_1 , x_2 e x_3 , respectivamente. Pode-se verificar facilmente que a composição de rotações arbitrárias não é comutável. Por exemplo, $L^{(1)}L^{(2)} \neq L^{(2)}L^{(1)}$.

As formas de todas estas matrizes já foram derivadas no exemplo 4.30 como representações do grupo $SO(3)$. As derivações se basearam nas formas das matrizes frente a rotações infinitesimais, conforme discutido a seguir.

Quando as rotações são *infinitesimais*, a comutatividade nas rotações é obtida. Considera-se como exemplo uma rotação infinitesimal $\delta\theta_3$ em torno de x_3 . Neste caso, pode-se substituir em $L^{(3)}$, $\cos \theta_3 \simeq 1$ e $\sin \theta_3 \simeq \delta\theta_3$ e esta matriz pode ser decomposta como

$$L^{(3)} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \delta\theta_3 & 0 \\ -\delta\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, as componentes de um vetor a transformam-se de acordo com

$$a'_i = L_{ij}^{(3)} a_j \simeq (\delta_{ij} + \epsilon_{ij3} \delta\theta_3) a_j.$$

Realizando a mesma consideração para as outras matrizes de rotação, observa-se que a forma infinitesimal das mesmas é

$$L_{ij}^{(1)} = \delta_{ij} + \epsilon_{ij1} \delta\theta_1, \quad L_{ij}^{(2)} = \delta_{ij} + \epsilon_{ij2} \delta\theta_2, \quad L_{ij}^{(3)} = \delta_{ij} + \epsilon_{ij3} \delta\theta_3.$$

Assim, é possível compor uma rotação infinitesimal arbitrária, dada por $L = L^{(3)}L^{(2)}L^{(1)}$ a qual, em ordem mais baixa nas rotações, é dada por

$$L_{ij} = L_{ik}^{(3)} L_{kl}^{(2)} L_{lj}^{(1)} \simeq \delta_{ij} + \epsilon_{ijk} \delta\theta_k, \quad (9.18)$$

a qual é visivelmente comutável nesta ordem. Pode-se facilmente inverter a relação acima com o auxílio de (9.3h,j) para obter

$$\delta\theta_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} L_{jk}.$$

Qualquer rotação arbitrária pode então ser a princípio realizada com a composição de um número grande de rotações arbitrárias executadas pela matriz (9.18).

9.5.3 TENSORES ISOTRÓPICOS

Um *tensor isotrópico* (ou *invariante*) é aquele que mantém a forma matemática de seus componentes em qualquer sistema de coordenadas. Determinar quais são os possíveis tensores isotrópicos com um determinado posto é importante, não somente do ponto de vista matemático, mas também físico, uma vez que este conhecimento terá consequências importantes para diversas propriedades físicas de meios contínuos, propriedades tais como suas condutividades elétrica e térmica, susceptibilidade magnética e resistência a tensões, para citar somente alguns exemplos, quando esses meios são uniformes.

No exemplo 9.4 foi mostrado que os tensores de Kronecker e Levi-Civita são tensores isotrópicos de postos dois e três, sob o ponto de vista de rotações próprias arbitrárias, uma vez que suas componentes possuem os mesmos valores para qualquer orientação do sistema de coordenadas. A questão que surge neste ponto é se existem outros tensores isotrópicos de mesmos postos e de postos superiores.

Iniciando por tensores de posto dois, se T_{ij} é isotrópico frente a rotações próprias arbitrárias, então

$$T'_{ij} = L_{ik}L_{j\ell}T_{k\ell} = T_{ij}.$$

Como foi demonstrado na seção 9.5.2, uma rotação arbitrária pode sempre ser composta por um número grande de rotações infinitesimais. Para a dedução da forma geral de um tensor isotrópico, é conveniente então utilizar a matriz de rotação infinitesimal (9.18). Desta forma, em ordem mais baixa nas rotações,

$$\begin{aligned} (\delta_{ik} + \epsilon_{ikm}\delta\theta_m)(\delta_{j\ell} + \epsilon_{j\ell n}\delta\theta_n)T_{k\ell} &= T_{ij}, \\ (\epsilon_{j\ell m}T_{i\ell} + \epsilon_{ikm}T_{kj})\delta\theta_m &= 0. \end{aligned}$$

Como as rotações $\{\delta\theta_m\}$ são arbitrárias, então

$$\epsilon_{j\ell m}T_{i\ell} + \epsilon_{ikm}T_{kj} = 0.$$

Multiplicando ambos os lados por ϵ_{jmr} e somando sobre j e m , obtém-se

$$2T_{ij} + T_{ji} = T_{kk}\delta_{ij}.$$

Permutando os índices livres $i \leftrightarrow j$ e subtraindo ambas as expressões, conclui-se que

$$T_{ij} = T_{ji}.$$

Ou seja, um tensor isotrópico é também simétrico. Retornando então à expressão anterior, obtém-se que

$$T_{ij} = \frac{1}{3}T_{kk}\delta_{ij}.$$

Ou seja, a forma mais geral para um tensor isotrópico de posto dois é

$$T_{ij} = \lambda\delta_{ij},$$

sendo $\lambda = \text{Tr}(T)/3$ uma constante.

Considerando agora tensores de posto três, parte-se novamente de

$$T'_{ijk} = L_{i\ell}L_{jm}L_{kn}T_{\ell mn} = T_{ijk}.$$

Inserindo novamente (9.18), obtém-se em ordem mais baixa nas rotações,

$$\epsilon_{mis}T_{sjk} + \epsilon_{mjs}T_{isk} + \epsilon_{mks}T_{ijs} = 0. \quad (9.19)$$

Multiplicando a equação acima sucessivamente por ϵ_{mir} , ϵ_{mjr} e ϵ_{mkr} e somando,

$$\begin{aligned} 2T_{ijk} + T_{jik} + T_{kji} &= \delta_{ij}T_{ssk} + \delta_{ik}T_{sjs} \\ 2T_{ijk} + T_{jik} + T_{ikj} &= \delta_{ji}T_{ssk} + \delta_{jk}T_{iss} \\ 2T_{ijk} + T_{kji} + T_{ikj} &= \delta_{ki}T_{sjs} + \delta_{kj}T_{iss}. \end{aligned}$$

Multiplicando agora as equações acima respectivamente por δ_{jk} , δ_{ik} e δ_{ij} e somando, obtém-se

$$\begin{aligned} 2T_{iss} + T_{sis} + T_{ssi} &= T_{ssi} + T_{sis} & T_{iss} &= 0 \\ 2T_{sis} + T_{iss} + T_{ssi} &= T_{ssi} + T_{iss} & \implies T_{sis} &= 0 \\ 2T_{ssi} + T_{iss} + T_{sis} &= T_{sis} + T_{iss} & T_{ssi} &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, retornando ao sistema acima, conclui-se que

$$\begin{aligned} 2T_{ijk} + T_{jik} + T_{kji} &= 0 \\ 2T_{ijk} + T_{jik} + T_{ikj} &= 0 \\ 2T_{ijk} + T_{kji} + T_{ikj} &= 0. \end{aligned}$$

O que implica em que as soluções deste sistema devem satisfazer as relações

$$T_{jik} + T_{kji} = T_{jik} + T_{ikj} \implies T_{kji} = T_{ikj}$$

$$\begin{aligned} T_{jik} + T_{kji} &= T_{kji} + T_{ikj} \implies T_{jik} = T_{ikj} \\ T_{jik} + T_{ikj} &= T_{kji} + T_{ikj} \implies T_{jik} = T_{kji}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$T_{ikj} = T_{jik} = T_{kji} = -T_{ijk}.$$

Neste ponto, conclui-se que T_{ijk} é antissimétrico ante uma permutação ímpar dos índices. Em consequência, será simétrico frente a uma permutação par de índices, pois

$$T_{ijk} = -T_{jik} = T_{jki} \text{ ou } T_{ijk} = -T_{kji} = T_{kij} \text{ ou } \dots$$

Retornando a (9.19), multiplica-se agora por δ_{mi} e, somando, obtém-se

$$\epsilon_{ijs}T_{isk} + \epsilon_{iks}T_{ijs} = 0.$$

Como j e k são parâmetros livres, no primeiro termo somente são não nulos os termos onde $i \neq s$, $i \neq j$ e $s \neq j$, restando somente 2 termos. No segundo, somente são não nulos aqueles onde $i \neq s$, $i \neq k$ e $s \neq k$, restando também 2 termos. Pode-se escrever então, sem somas implícitas,

$$\epsilon_{ijs}T_{iks} - \epsilon_{iks}T_{ijs} = 0.$$

Se $k = j$, a igualdade é trivialmente satisfeita. Por outro lado, se $k \neq j$, considerando os símbolos de Levi-Civita, ou $i \neq j \neq s$, em cuja situação k deve ser necessariamente igual a i ou s e o segundo termo é nulo, ou $i \neq k \neq s$, e então j deve ser igual a i ou s , quando então o primeiro termo é nulo. Considerando todas as possibilidades, conclui-se então que

$$T_{ijj} = T_{iji} = T_{jii} = 0,$$

ou seja, quando 2 índices são iguais, o componente do tensor é nulo.

Portanto, o tensor isotrópico \mathcal{T} possui as mesmas propriedades do símbolo de Levi-Civita. Conclui-se então que a forma geral de um tensor de posto 3 isotrópico deve ser dada por

$$T_{ijk} = \mu \epsilon_{ijk},$$

onde μ é uma constante.

Finalmente, a forma geral de um tensor isotrópico de posto quatro é,

$$T_{ijkl} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk},$$

sendo α , β e γ constantes, forma esta apresentada sem demonstração.

9.6 ROTAÇÕES IMPRÓPRIAS, PSEUDOTENSORES E TENSORES DUAIS

Até este ponto, considerou-se sempre *transformações próprias*, no sentido atribuído pela expressão (9.9c), isto é, as transformações são tais que $\det(L) = +1$. Na maior parte dos casos considerados, assumiu-se explicitamente que a transformação em questão era uma *rotação passiva própria*.

Contudo, outras transformações de interesse para a física existem. Dentre essas, uma de particular importância são as *rotações impróprias*, para as quais $\det(L) = -1$. Esta e outros tipos de transformações impróprias são importantes para determinar a *quiralidade* de um determinado referencial, ou seja, se este é invariante ou não frente a uma reflexão planar (ou se este é idêntico ou não à sua imagem especular, ver seção 9.2.2).

Esta seção irá discutir aspectos relacionados com a transformação de tensores quando a lei de transformação abrange tanto transformações próprias quanto impróprias.

9.6.1 ROTAÇÕES IMPRÓPRIAS E PSEUDOTENSORES

Uma rotação imprópria de um sistema de coordenadas pode ser executada através da composição de duas transformações: uma transformação de paridade ou inversão espacial, para a qual $\{x_i\} \rightarrow \{x'_i\} : x'_i = -x_i$ ($i = 1, 2, 3$), cuja matriz de transformação P é dada simplesmente por

$$P_{ij} = -\delta_{ij},$$

seguida por uma rotação própria, executada pela matriz de rotação $L^{(p)}$. Pode-se então construir a *matriz de rotação imprópria* $L^{(i)}$ pela composição

$$L_{ij}^{(i)} = L_{ik}^{(p)} P_{kj},$$

onde se verifica facilmente que $\det(L^{(i)}) = \det(P) = -1$.

Conforme já foi introduzido na seção 9.2.2, um objeto de ordem zero é classificado como um *escalar* ou *pseudoescalar* se este é, respectivamente, invariante ou muda de sinal frente a uma transformação imprópria. Objetos físicos classificados como escalares consistem usualmente nas propriedades intrínsecas da matéria tais como massa de repouso e carga elétrica, as quais são assumidas invariantes frente a transformações arbitrárias por princípios que devem ser continuamente corroborados experimentalmente, sob as mais diversas condições. Adicionalmente, outras quantidades físicas escalares, tais como trabalho mecânico e potencial elétrico, são obtidas via produtos internos entre vetores. Por sua vez, objetos classificados como pseudoescalares são usualmente construídos através de produtos internos entre vetores e pseudovetores; estes objetos serão mencionados novamente a seguir.

Prosseguindo, um objeto de primeira ordem será denominado *vetor polar* ou, simplesmente, *vetor* se satisfizer as leis de transformação (9.12), quer ela seja própria ou imprópria. Já um *vetor axial*, que é na maior parte dos textos denominado também como *pseudovetor*, pode ser definido então como uma tripla ordenada $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ que obedece as leis de transformação

$$B'_i = \det(L) L_{ij} B_j, \quad B_i = \det(L) L_{ji} B'_j, \tag{9.20}$$

onde $\det(L) \neq +1$. Para transformações ortogonais, $\det(L) = -1$.

A figura 9.5 ilustra uma transformação de paridade ($P : P_{ij} = -\delta_{ij}$) ou inversão espacial (passiva) aplicada a um referencial dextrógiro R . O primeiro aspecto digno de nota é que a transformação P altera a quiralidade do referencial empregado, isto é, o referencial R dextrógiro transformou-se no referencial R' levógiro. Esta alteração de quiralidade não pode ser realizada por nenhuma composição de rotações próprias.

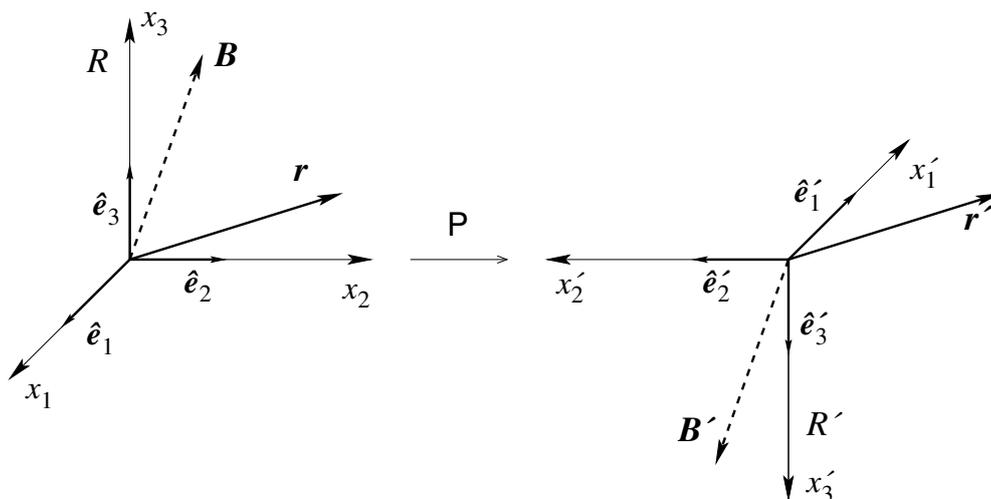


Figura 9.5: Um sistema dextrógiro de coordenadas (R) é transformado em um sistema levógiro (R') através de uma transformação de paridade P . Observa-se também os comportamentos de um vetor (\mathbf{r}) e de um pseudovetor (\mathbf{B}) frente a esta transformação.

Um vetor polar, tal como o vetor \mathbf{r} representado na figura 9.5 tem seus componentes transformados de acordo com (9.12); simultaneamente, os vetores de base $\{\hat{e}_i\}$ também são transfor-

dados, de acordo com (9.7c), como $\hat{e}'_i = P_{ij} \hat{e}_j$. Portanto,

$$\mathbf{r} \xrightarrow{P} \mathbf{r}' : \begin{cases} x_i \rightarrow x'_i = P_{ij} x_j = -x_i \\ \hat{e}_i \rightarrow \hat{e}'_i = P_{ij} \hat{e}_j = -\hat{e}_i \end{cases} \text{ mas } \mathbf{r}' = x'_i \hat{e}'_i = P_{ij} P_{ik} x_j \hat{e}_k = x_j \hat{e}_j = \mathbf{r},$$

uma vez que a transformação P é ortogonal. Ou seja, um vetor polar é um objeto geométrico cujas características (módulo, direção e sentido) não são alteradas por uma transformação (própria ou imprópria).

Por outro lado, um vetor axial transforma-se de acordo com a lei (9.20), sendo o vetor axial \mathbf{B} representado na figura 9.5 um exemplo. Frente a uma inversão espacial, este se transforma como

$$\mathbf{B} \xrightarrow{P} \mathbf{B}' : B_i \rightarrow B'_i = -P_{ij} B_j = B_i, \text{ mas } \mathbf{B}' = B'_i \hat{e}'_i = -P_{ij} P_{ik} B_j \hat{e}_k = -\mathbf{B}.$$

Ou seja, uma transformação de paridade inverte o sentido de um vetor axial, embora ele se comporte como um vetor frente a transformações próprias. Diz-se então que os componentes desta terna ordenada compõem um *pseudovetor* ou um *pseudotensor* Cartesiano de posto um.

Estendendo então o conceito de um pseudotensor a objetos de ordens mais altas, a definição de um *tensor* Cartesiano de ordem N é mantida como aquele objeto cujos componentes transformam-se de acordo com a lei (9.14) frente a qualquer transformação (própria ou imprópria). Por sua vez, um **pseudotensor de posto N** é agora definido como aquele objeto cujos componentes transformam-se de acordo com a lei de transformação

$$T'_{ij\dots n} = \det(\mathbf{L}) L_{ip} L_{jq} \dots L_{nr} T_{pq\dots r} \quad (9.21a)$$

$$T'_{ij\dots n} = \det(\mathbf{L}) L_{pi} L_{qj} \dots L_{rn} T_{pq\dots r}. \quad (9.21b)$$

Ou seja, comporta-se como um tensor somente frente a transformações próprias.

Exemplo 9.3 (Símbolo de Levi-Civita). No exercício 9.4, mostrou-se que frente a uma transformação L qualquer, o símbolo de Levi-Civita transforma-se como $\epsilon'_{ijk} = \det(\mathbf{L}) \epsilon_{ijk}$. Para transformações próprias, como foi assumido no exemplo, este se comporta como um tensor. Entretanto, para uma transformação imprópria $\mathbf{L}^{(i)}$,

$$\{\epsilon_{ijk}\} \xrightarrow{\mathbf{L}^{(i)}} \{\epsilon'_{ijk}\} / \epsilon'_{ijk} = \det(\mathbf{L}^{(i)}) \epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ijk}.$$

Portanto, a lei de transformação apropriada para o símbolo de Levi-Civita é a relação (9.21),

$$\epsilon'_{ijk} = \det(\mathbf{L}) L_{il} L_{jm} L_{kn} \epsilon_{lmn},$$

sendo assim identificado como um pseudotensor de posto três.

Existem vários exemplos de vetores axiais na física. Em particular, vetores obtidos a partir de produtos vetoriais ou rotacionais de vetores polares são os mais comuns. Assim, se \mathbf{a} e \mathbf{b} são ambos polares, então o vetor $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é axial, uma vez que este se comporta, frente a $\mathbf{L}^{(i)}$ como

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \xrightarrow{\mathbf{L}^{(i)}} \mathbf{c}' = \mathbf{a}' \times \mathbf{b}' &\implies c'_i = \epsilon'_{ijk} a'_j b'_k = \det(\mathbf{L}^{(i)}) L_{il}^{(i)} L_{jm}^{(i)} L_{jq}^{(i)} L_{kn}^{(i)} L_{kr}^{(i)} \epsilon_{lmn} a_q b_r \\ &= \det(\mathbf{L}^{(i)}) L_{il}^{(i)} \epsilon_{lmn} a_m b_n, \\ c'_i &= \det(\mathbf{L}^{(i)}) L_{il}^{(i)} c_l, \end{aligned}$$

obedecendo a (9.20). A tabela 9.1 mostra exemplos de vetores axiais na mecânica clássica e no eletromagnetismo.

Em termos das operações algébricas definidas na seção 9.4, a possibilidade de ocorrência de operações mistas envolvendo tensores e pseudotensores merecem alguma consideração. Em primeiro lugar, a operação de adição não faz sentido neste caso. Assumindo que \mathbf{a} é um vetor polar e \mathbf{c} um vetor axial, então um possível objeto \mathbf{b} decorrente da operação $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$ seria transformado, de acordo com (9.12a) e (9.20) como

$$\mathbf{b} \xrightarrow{\mathbf{L}} \mathbf{b}' = \mathbf{a}' + \mathbf{c}' \implies b'_i = a'_i + c'_i = L_{ij} a_j + \det(\mathbf{L}) L_{ij} c_j = L_{ij} [a_j + \det(\mathbf{L}) c_j],$$

o que não satisfaz nenhuma das leis de transformação. Em particular, para transformações impróprias, $|\mathbf{b}'| = |\mathbf{a} - \mathbf{c}|$

Já o produto externo envolvendo tensores e pseudotensores pode resultar em objetos de ordens mais altas de diferentes naturezas. Na construção do objeto \mathcal{Z} realizada por

$$\mathcal{Z} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \dots \otimes \mathcal{Y},$$

se houver N pseudotensores-pais, a lei de transformação de \mathcal{Z} será

$$Z'_{i\dots k} = [\det(L)]^N L_{iq} \dots L_{kr} Z_{q\dots r},$$

ou seja, \mathcal{Z} será um tensor se N for par ou um pseudotensor se N for ímpar.

Observa-se que a mesma propriedade é válida para o caso do produto interno entre tensores e/ou pseudotensores. De particular importância para a teoria da interação eletrofraca, a *helicidade* de uma partícula é determinada pelo produto interno $h = \mathbf{p} \cdot \mathbf{S}$, sendo \mathbf{p} o momentum linear transportado pela mesma e \mathbf{S} o seu spin. Como o momentum linear é um vetor polar e o spin é um vetor axial, a quantidade h é um pseudotensor de posto zero ou um pseudoescalar. Se a helicidade da partícula é positiva, então seu spin tem orientação dextrógiara. Se $h < 0$, a partícula tem spin com orientação levógiara. Uma transformação de paridade inverte os sinais de h .

Inversões espaciais, como exemplo de transformações impróprias, não são a única possibilidade coletivamente denominada de transformações de paridade. Comportamentos semelhantes são obtidos por operações de reflexão no plano, representadas na figura 9.6. Uma reflexão sobre o plano $x_1 - x_3$ é realizada por intermédio da matriz de transformação

$$P^{(r)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, um vetor polar como a polarização elétrica \mathbf{P} transforma-se, de acordo com (9.12a), como

$$\mathbf{P} \xrightarrow{P^{(r)}} \mathbf{P}' = (P_1, -P_2, P_3),$$

ou seja, somente a componente P_2 muda de sinal, o que corresponde à imagem especular de \mathbf{P} sobre um espelho colocado no plano $x_1 - x_3$. Esta operação está representada na figura 9.6a.

Já um vetor axial, como a indução magnética \mathbf{B} , por exemplo, transforma-se, de acordo com (9.20), como

$$\mathbf{B} \xrightarrow{P^{(r)}} \mathbf{B}' = (-B_1, B_2, -B_3),$$

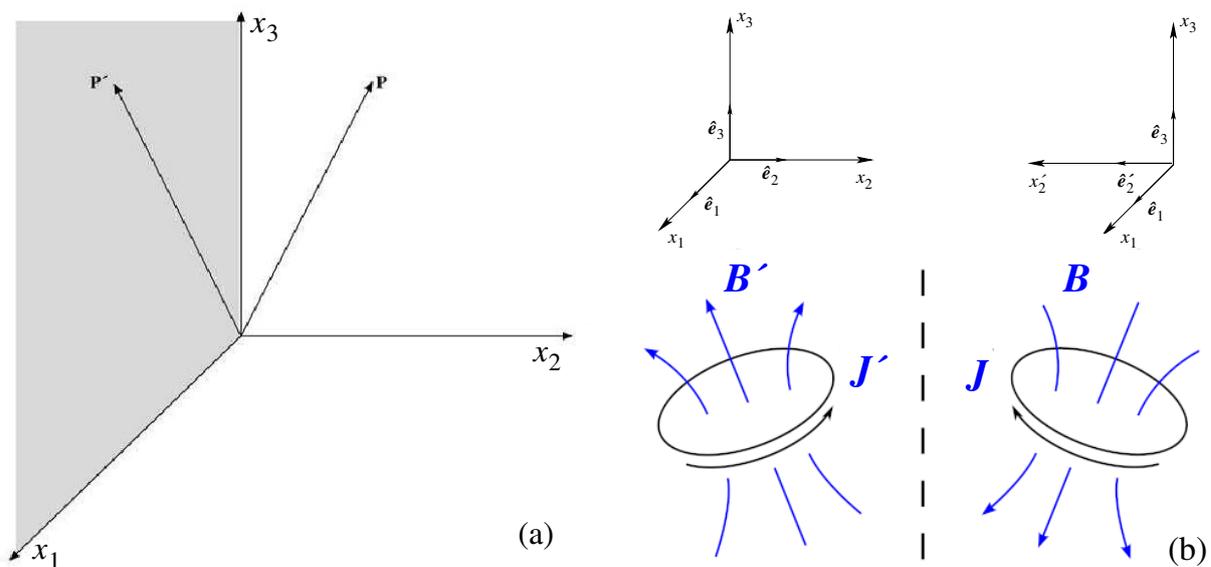


Figura 9.6: Reflexão sobre o plano $x_1 - x_3$. (a) O vetor polarização elétrica \mathbf{P} (polar) transforma-se em \mathbf{P}' , o qual é sua imagem especular. (b) O vetor indução magnética \mathbf{B} (axial), frente a uma reflexão espacial, resulta com a sua imagem especular invertida.

o que corresponde a uma reflexão especular seguida por uma inversão de sentido. Esta operação está ilustrada na figura 9.6b. Nesta, uma espira circular que conduz uma corrente elétrica com densidade J , gerando assim o campo B de acordo com a lei de Biot-Savart, também é refletida sobre o plano $x_1 - x_3$. Como posição e J são polares, os vetores transformados são as imagens especulares destes. Porém, o campo B sofre adicionalmente uma inversão, resultando em uma componente B_2 inalterada.

A análise do comportamento das leis físicas frente a transformações de paridade é um tópico importante na atualidade. Dentre as quatro interações fundamentais, as equações da gravitação, do eletromagnetismo e das interações fortes são invariantes frente a transformações de paridade.

Por exemplo, a imagem especular do campo B gerado pela corrente J na espira, ilustrada na figura 9.6b, está orientada de tal forma que as leis de Biot-Savart e Faraday permanecem válidas em um mundo virtual que seria a reflexão especular do mundo real. A operação de reflexão, ditada por $P^{(r)}$, transforma-se em uma inversão espacial completa, ditada por P , se a imagem especular for girada ativamente em 180° em torno do eixo x_2 (figura 9.5). Neste caso, a imagem refletida seria indistinguível do sistema físico real. Portanto, para uma interação invariante com a transformação de paridade, o mundo virtual é indistinguível do mundo real, o que está em acordo com a suposição de que leis físicas devem ser invariantes frente a transformações realizadas sobre o referencial utilizado.

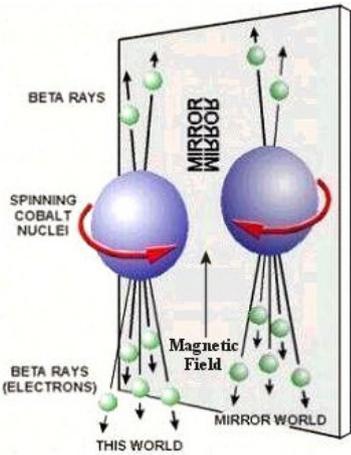
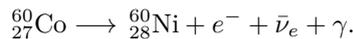


Figura 9.7: Violação de paridade no decaimento β de núcleos de cobalto-60.

Já a interação fraca apresenta uma quebra de simetria no decaimento β . Dentre os léptons sujeitos à interação fraca, somente partículas cujos spins estão no sentido levógiro e anti-partículas com spins no sentido dextrógiro interagem através da força fraca. A combinação inversa é proibida pelo modelo padrão, violando a paridade da interação.

Esta quebra de paridade, denominada *violação CP*, foi sugerida por T. D. Lee e C. N. Yang em 1956 e verificada no ano seguinte por dois experimentos independentes. O primeiro experimento consistiu na observação de elétrons emitidos pelo decaimento β de núcleos de cobalto, conforme está representado na figura 9.7. A baixas temperaturas, a maior parte dos núcleos podem ser mantidos com seus spins alinhados com um campo magnético externo. O elipsóide da esquerda na figura ilustra um grande número de núcleos de ${}^{60}_{27}\text{Co}$, os quais decaem de acordo com a fórmula



A seta vermelha indica o sentido de giro dos núcleos, o que significa que estes têm seu spin no sentido dextrógiro. Já a imagem da direita representa a imagem especular e, portanto, o sentido do spin nuclear S_N é invertido por ser um vetor axial. No experimento, os elétrons emitidos por decaimento β com momentum linear p_e mostraram uma correlação notável com o pseudoescalar $h_{Ne} = S_N \cdot p_e$, sendo emitidos preferencialmente na direção e sentido determinados por $h_{Ne} < 0$. De acordo com a teoria eletrofraca, os elétrons emitidos são levógiros ($h_e < 0$) e os anti-neutrinos do elétron ($\bar{\nu}_e$) são dextrógiros ($h_{\bar{\nu}} > 0$).

Na imagem especular à direita na figura 9.7, o spin nuclear S_N resulta invertido, mas p_e não o é, resultando em uma inversão de sinal dos pseudoescalares h_{Ne} , h_e e $h_{\bar{\nu}}$. A inversão espacial torna-se completa se o espelho for girado em 180° , quando então o spin nuclear volta a sua orientação original, mas os elétrons seriam observados sendo emitidos preferencialmente para cima.

Em outras palavras, a imagem no mundo virtual é distinguível do sistema físico real, ao contrário do que ocorre com as outras interações fundamentais. A dependência da força fraca com o pseudoescalar h_{Ne} cria uma violação do princípio de invariância na transformação de paridade que não é observada nas outras interações fundamentais. Adicionalmente, a helicidade dos léptons envolvidos no decaimento β também seria invertida em comparação com o mundo real, o que ressalta ainda mais a violação de paridade nesta interação fundamental.

O outro experimento foi realizado em um anel de ciclotron e investigou a helicidade dos léptons emitidos nos decaimentos

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

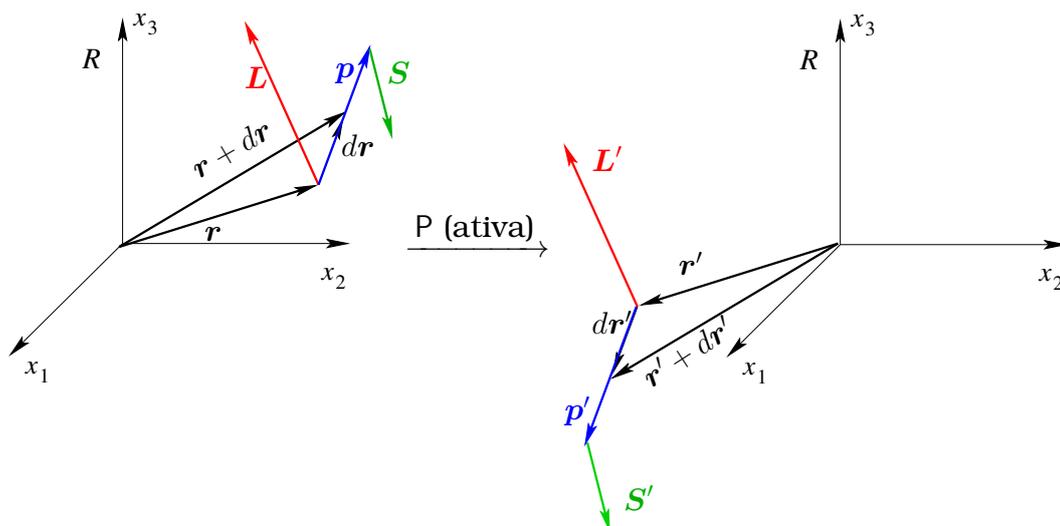


Figura 9.8: Inversão espacial ativa realizada sobre um sistema físico. Vetores polares são invertidos, mas vetores axiais permanecem invariantes.

$$\mu^+ \longrightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu.$$

Este experimento verificou a polarização sugerida por Lee & Yang, segundo a qual as partículas são emitidas no sentido levógiro enquanto que as anti-partículas são dextróginas. Esta preferência na helicidade das partículas e anti-partículas que interagem via força fraca evidenciam a quebra de paridade na interação.¹⁵

A descrição aqui apresentada para a violação CP é apenas qualitativa. Uma descrição mais detalhada, envolvendo o formalismo da teoria quântica de campos, é fornecida, por exemplo, no capítulo 3 de (SILVEIRA, 2019).

Uma observação importante deve ser feita agora relativa à realidade física dos pseudotensores. Alguns textos argumentam que objetos geométricos tais como vetores e tensores somente podem ser atribuídos a quantidades que possuem realidade física se não forem alterados por transformações arbitrárias no sistema de coordenadas. Neste caso, pseudovetores e pseudotensores deveriam ser considerados meramente objetos matemáticos abstratos que não poderiam descrever quantidades tais como momentum angular e indução magnética.

A solução para este aparente dilema é encontrada se as transformações de paridade não forem realizadas de forma passiva, como foi assumido até este momento, mas sim de forma ativa, isto é, o sistema físico é fisicamente rotado em torno da origem do referencial por 180°, de tal forma que

$$r \xrightarrow{P \text{ (ativa)}} r' = -r.$$

A figura 9.8 ilustra uma inversão espacial ativa em torno da origem. Neste caso, o sistema de coordenadas permanece sempre dextrógiro, mas as quantidades vetoriais são transformadas de acordo com sua paridade frente a esta inversão ativa. Qualquer rotação passiva posteriormente aplicada após a inversão será sempre própria, e assim a quiralidade do referencial não é alterada e, portanto, todas os objetos geométricos são tensores que satisfazem as leis de transformação (9.14).

Realizando esta inversão ativa, os vetores podem então ser classificados como *vetores polares*, os quais são ímpares frente à inversão, tais como os vetores r e p na figura 9.8 e *vetores axiais*, os quais são pares frente à inversão, tais como os vetores $L = r \times p$ e S (spin). Agora, porém, ambos os tipos de vetores podem ser classificados como *tensores de posto um*, uma vez que todas as transformações doravante aplicadas ao sistema de coordenadas serão próprias.

Contudo, é importante mencionar também que pseudoescalares ainda são necessários para teorias físicas que prevêem quebra de paridade, tal como a teoria eletrofraca. Na interpretação de que transformações de paridade devem ser ativas, estes pseudoescalares continuam existindo. Um exemplo é fornecido pelos vetores p e S na figura 9.8, onde se verifica que a helicidade $h = p \cdot S$ continua mudando de sinal, mesmo frente a uma transformação de paridade ativa.

¹⁵A violação da simetria quiral possui uma importância vital na bioquímica e na genética. Uma discussão atual a respeito deste assunto pode ser encontrada no doi: [10.1103/RevModPhys.85.603](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.85.603).

Pode-se verificar também que o produto externo misto entre vetores polares e axiais continua gerando tensores de postos mais altos, mas o produto interno entre dois tensores criados desta maneira pode resultar em um pseudotensor.

9.6.2 TENSORES DUAIS

Independente da polêmica com relação a pseudotensores, estes têm sido empregados em diversas teorias físicas, mesmo em teorias invariantes frente a transformações de paridade.

Um tipo de pseudotensor com frequência empregado é o *tensor dual*. Na sua definição, usualmente faz-se uso do símbolo de Levi-Civita. Realizando produtos internos deste com um tensor totalmente antissimétrico conhecido, pode-se criar um tensor dual de posto igual ou inferior, dependendo da necessidade.

Um exemplo pode ser dado tomando o tensor \mathcal{A} , totalmente antissimétrico, isto é, $A_{ij} = -A_{ji}$, o que implica que $\text{Tr}(\mathcal{A}) = 0$. Com ϵ_{ijk} , pode-se definir então o pseudovetor p , cujos componentes são

$$p_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} A_{jk}. \quad (9.22a)$$

Ou, reciprocamente, multiplicando a expressão acima por ϵ_{ijk} e contraíndo os índices, obtém-se

$$\epsilon_{ijk} p_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} A_{lm} = \frac{1}{2} (A_{jk} - A_{kj}) \implies A_{ij} = \epsilon_{ijk} p_k. \quad (9.22b)$$

Pode-se criar também um pseudoescalar s a partir agora de um tensor \mathcal{C} de posto 3 totalmente antissimétrico,

$$s = \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} C_{ijk}.$$

Então, multiplicando ambos os lados por ϵ_{ijk} e usando (9.3), resulta

$$\epsilon_{ijk} s = \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} C_{lmn} \implies C_{ijk} = s \epsilon_{ijk}.$$

Tensores duais são empregados, por exemplo, na formulação covariante do eletromagnetismo, onde o dual do tensor de campo é empregado para expressar a forma covariante das equações homogêneas de Maxwell. Para tanto, faz-se uso de um pseudotensor de posto quatro, o qual é a extensão do símbolo de Levi-Civita para um espaço vetorial de dimensão quatro.

9.6.3 TENSORES IRREDUTÍVEIS

Um uso para tensores duais está na representação de um tensor qualquer em formas irredutíveis. Para exemplificar, emprega-se um tensor de posto dois qualquer \mathcal{T} . Da seção 9.4.2, sabe-se que é possível representar todos os seus componentes em partes simétrica (T_{ij}^S) e antissimétrica (T_{ij}^A). Para a parte antissimétrica, cria-se o pseudovetor u de acordo com (9.22),

$$u_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} T_{ij}^A = \frac{1}{4} \epsilon_{ijk} (T_{ij} - T_{ji}) \iff T_{ij}^A = \epsilon_{ijk} u_k.$$

Já da parte simétrica, subtrai-se o traço da matriz T , definindo então o tensor

$$S_{ij} = T_{ij}^S - \frac{1}{3} \text{Tr}(T) \delta_{ij} = \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji}) - \frac{1}{3} \text{Tr}(T) \delta_{ij}.$$

Portanto, o tensor \mathcal{T} pode agora ser representado pelas suas partes irredutíveis,

$$T_{ij} = \frac{1}{3} \text{Tr}(T) \delta_{ij} + \epsilon_{ijk} u_k + S_{ij},$$

as quais são compostas por tensores de posto zero, um e dois.

9.7 TENSORES GENERALIZADOS

As seções anteriores restringiram-se ao estudo de tensores descritos em termos de coordenadas Cartesianas e os tipos de transformação passiva aplicados a este sistema aos quais foi dedicada a maior atenção foram as rotações rígidas dos eixos coordenados e as transformações de paridade.

A partir desta seção, os conceitos e propriedades considerados anteriormente serão generalizados para transformações arbitrárias aplicadas sobre um sistema de coordenadas geral e que levam a outro sistema. Antes de se abordar tensores propriamente ditos, será realizada uma revisão e adaptação das propriedades matemáticas de sistemas de coordenadas curvilíneas, discutidas no capítulo 1. Posteriormente, essas propriedades serão generalizadas e aplicadas a tensores de postos arbitrários.

9.7.1 COORDENADAS CURVILÍNEAS GENERALIZADAS

Fazendo referência novamente à figura 1.2, a posição de um ponto P arbitrário no espaço \mathbb{E}^3 pode ser expressa em termos de uma terna ordenada de números (q_1, q_2, q_3) , as quais são as coordenadas deste ponto dentro do sistema de coordenadas curvilíneas adotado.

Qualquer vetor neste espaço, sendo o vetor posição \mathbf{r} um caso particular, pode ser expresso em termos de uma combinação linear de duas bases apresentadas na seção 1.1, as bases $\{e_i\}$ e $\{\epsilon_i\}$, dadas por

$$e_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \text{ e } \epsilon_i = \nabla q_i,$$

sendo $i = 1, 2, 3$. Em geral estes vetores não formam bases ortonormais. Por outro lado, ambos os conjuntos sempre formam duas bases recíprocas no \mathbb{E}^3 , isto é,

$$e_i \cdot \epsilon_j = \delta_{ij}.$$

Dentro do contexto de tensores generalizados, uma das modificações necessárias está na posição dos índices, tanto livres quanto mudos, que identificam os componentes dos mesmos. Devido a esta modificação, a base $\{\epsilon_i\}$ será doravante identificada por $\{e^i\}$, com a equivalência $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\} \leftrightarrow \{e^1, e^2, e^3\}$.

Adicionalmente, a convenção de somas implícitas introduzida na seção 9.1.1 será modificada. Doravante, qualquer índice minúsculo que apareça exatamente duas vezes em qualquer componente ou expressão, *uma vez como subscrito e uma vez como superescrito*, será somado sobre todos os valores que um índice naquela posição pode assumir, exceto quando for realizada uma observação explícita ao contrário.

Com esta nova convenção de posicionamento dos índices, a relação de reciprocidade entre as bases possíveis para um dado sistema de coordenadas curvilíneas passa a ser escrita como

$$e_i \cdot e^j = \delta_i^j, \tag{9.23}$$

sendo δ_i^j o mesmo tensor delta de Kronecker discutido em detalhes na seção 9.1.2.

Pela mesma razão, as coordenadas curvilíneas do ponto P serão também doravante identificadas por índices superescritos $P = (q^1, q^2, q^3)$, de tal forma que as bases passam a ser obtidas pelas expressões

$$e_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \text{ e } e^i = \nabla q^i. \tag{9.24}$$

Nestas expressões nota-se que a derivação em relação a uma coordenada cujo índice está na posição *superior* resulta em um objeto com o mesmo índice na posição *inferior*.

Posteriormente, será demonstrado que o operador derivação em relação a coordenada *contravariante* q^i ($\partial/\partial q^i$) comporta-se, frente a uma transformação qualquer, como o i -ésimo componente de um vetor *covariante*. Em muitos textos, costuma-se escrever, de forma resumida,

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial q^i}.$$

De forma equivalente,

$$\partial^i \equiv \frac{\partial}{\partial q_i},$$

o qual se comporta como a i -ésima coordenada de um vetor *contravariante*.

Dadas bases (9.24), um vetor $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^3$ qualquer será escrito em termos de combinações lineares das mesmas de duas formas equivalentes,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3 = a^i \mathbf{e}_i \\ \mathbf{a} &= a_1 \mathbf{e}^1 + a_2 \mathbf{e}^2 + a_3 \mathbf{e}^3 = a_i \mathbf{e}^i. \end{aligned}$$

Da mesma forma como foi mencionado para a expressão (1.9), os números no conjunto $\{a^i\}$ são denominados as componentes **contravariantes** do vetor \mathbf{a} , ao passo que $\{a_i\}$ contém as componentes **covariantes** do mesmo. A posição dos índices distingue os dois tipos de componentes entre si. Por conseguinte, os vetores $\{\mathbf{e}_i\}$ formam uma base covariante no \mathbb{E}^3 , ao passo que $\{\mathbf{e}^i\}$ formam uma base contravariante no mesmo espaço vetorial. Obviamente, os diferentes componentes do vetor \mathbf{a} são dados por

$$a^i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^i \text{ e } a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i.$$

A distinção entre coordenadas covariantes e contravariantes não foi realizada para tensores Cartesianos porque neste sistema ambas as bases são idênticas. Contudo, em sistemas generalizados isto não é necessariamente verdade.

A partir deste momento, a designação de tensores também deverá ser alterada, em função das distintas posições que seus índices podem adotar. Uma definição formal de um tensor de posto arbitrário será realizada posteriormente. Neste momento, será empregado somente um tensor de posto dois, para exemplificar a identificação. Um tensor \mathcal{T} de posto dois pode ser escrito e/ou construído de diferentes maneiras. Se for empregado o produto externo de dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} , escritos em termos de uma ou ambas as bases em (9.24), as possibilidades são:

1. Sendo $\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i$ e $\mathbf{b} = b^j \mathbf{e}_j$, então $\mathcal{T} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a^i b^j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, de onde se identifica $T^{ij} = a^i b^j$, os quais são os *componentes contravariantes* do tensor \mathcal{T} .
2. Sendo $\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i$ e $\mathbf{b} = b_i \mathbf{e}^i$, então $\mathcal{T} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a^i b_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j$, identificando $T^i_j = a^i b_j$ como os *componentes mistos* do tensor \mathcal{T} . Outra possibilidade é $\mathcal{T} = T_i^j \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j$.
3. Sendo $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}^i$ e $\mathbf{b} = b_j \mathbf{e}^j$, então $\mathcal{T} = a_i b_j \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$, identificando $T_{ij} = a_i b_j$ como os *componentes covariantes* do tensor \mathcal{T} .

É importante ressaltar que $\{T^{ij}\}$, $\{T^i_j\}$ ou $\{T_{ij}\}$ formam três conjuntos distintos de componentes do mesmo tensor \mathcal{T} , porém correspondentes a diferentes construções dos vetores de base do sistema de coordenadas.

As expressões acima envolvendo o produto escalar entre dois vetores merece uma maior atenção neste momento. Na notação tensorial covariante empregada nesta seção, uma contração de índices (ou seja, a soma implícita dos mesmos) somente será realizada se um estiver na posição contravariante e o outro na posição covariante. De acordo com esta convenção, o produto escalar entre os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} somente pode ser escrito na forma usual, ou seja, em termos da soma dos produtos das respectivas coordenadas dos mesmos, da seguinte maneira,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b^i \text{ ou } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i b_i. \quad (9.25a)$$

Este resultado está garantido graças à condição de reciprocidade (9.23), pois com esta pode-se escrever

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_i \mathbf{e}^i) \cdot (b^j \mathbf{e}_j) = a_i b^j \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = a_i b^j \delta_j^i = a_i b^i, \quad (9.25b)$$

ou vice-versa. Esta discussão terá prosseguimento na próxima seção, quando for discutida a operação de elevação ou rebaixamento de índices.

9.7.2 O ESPAÇO DE RIEMANN E O TENSOR DE MÉTRICA

Conforme já foi discutido na seção 1.1, a métrica de qualquer espaço Riemanniano é completamente determinada pelo tensor de métrica g , o qual é um tensor de posto dois. Antes de se prosseguir com a apresentação das propriedades do tensor de métrica, é conveniente definir de forma mais rigorosa o *espaço de Riemann* ou o *espaço Riemanniano*.

O espaço (métrico) de Riemann é a generalização do espaço métrico Euclideano E^n definido no exemplo 3.2. Esta generalização é realizada tanto na dimensão arbitrária do espaço quanto na definição de sua métrica, a qual passa a descrever tanto espaços planos, como o Euclideano, como espaços curvos, importantes para as teorias modernas em física e matemática.

Definição 9.9 (Espaço métrico de Riemann). Seja

$$\mathbb{R}^n \equiv \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ vezes}} = \{(q^1, \dots, q^n) \mid q^j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n\}$$

o conjunto de todas as n -uplas ordenadas obtidas a partir do produto Cartesiano do corpo dos números reais e com valores determinados por um sistema de coordenadas X . Seja $d\ell$ um elemento de arco medido em X e cujo valor é determinado pela *métrica Riemanniana*

$$d\ell^2 = g_{ij} dq^i dq^j, \tag{9.26}$$

onde $g = [g_{ij}]$ é o *tensor de métrica* que satisfaz as condições:

(ER₁) As componentes $g_{ij}(q^1, \dots, q^n)$ do tensor de métrica pertencem à classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$.

(ER₂) O tensor $g = [g_{ij}]$ é simétrico, *i. e.*, $g_{ij} = g_{ji}$.

(ER₃) O tensor $g = [g_{ij}]$ é não singular, *i. e.*, $\det [g_{ij}] \neq 0$.

(ER₄) A forma diferencial (9.26) é invariante frente a uma troca arbitrária de coordenadas.

Então, estrutura $R^n \doteq \langle \mathbb{R}^n, g \rangle$ forma o *Espaço Riemanniano de dimensão n* .

Rigorosamente, as condições (ER₁)–(ER₄) impostas ao tensor de métrica definem um espaço *pseudo-Riemanniano*, pois o elemento $d\ell^2$ obtido por (9.26) não é positivo-definido. Para se definir um *espaço Riemanniano*, a condição (ER₃) deve ser substituída pela condição mais restritiva

(ER'₃) O tensor $g = [g_{ij}]$ é *positivo-definido*, isto é, $g_{ij}v^i v^j > 0$ para todo vetor $v = (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$ não nulo.

A distinção entre um espaço Riemanniano e um espaço pseudo-Riemanniano não afeta a discussão realizada nesta e nas próximas seções. Um exemplo importante de um espaço pseudo-Riemanniano é o espaço-tempo de Mikowski, o qual será discutido nas seções 9.15.1 e 9.15.2.

As componentes covariantes do tensor de métrica são obtidos a partir da base covariante $\{e_i\}$ e são dados por (1.8),

$$g_{ij} = e_i \cdot e_j, \tag{9.27a}$$

o que mostra claramente que o tensor de métrica é simétrico.

Se o sistema de coordenadas é ortogonal, $e_i \cdot e_j = 0$ para $j \neq i$. Neste caso, é conveniente empregar mais uma vez os fatores de escala h_i , definidos em (1.11), com os quais se pode escrever a base ortonormal $\{\hat{e}_i\}$ como $\hat{e}_i = e_i/h_i$, ressaltando que neste caso i é um índice livre. Assim, o tensor de métrica fica escrito simplesmente como

$$g_{ij} = h_i^2 \delta_{ij} \quad (i : \text{índice livre}). \tag{9.27b}$$

9.7.2.1 OPERAÇÃO DE ELEVAÇÃO OU REBAIXAMENTO DE ÍNDICE

O tensor de métrica possui uma outra função na álgebra tensorial covariante que é de extrema importância. Ele possibilita alterar a posição (contra- ou covariante) de um determinado índice (livre ou mudo).

Para se mostrar como esta operação ocorre, retoma-se a discussão do produto escalar entre os vetores a e b realizada no final da seção anterior. Ressaltando que, como estes são tensores de posto um, o objeto resultante de seu produto interno deve ser um escalar, que possui o mesmo valor seja qual for a representação ou sistema de coordenadas adotado para os vetores. Por isto, uma expressão alternativa às obtidas acima para o produto escalar é

$$a \cdot b = (a^i e_i) \cdot (b^j e_j) = a^i b^j e_i \cdot e_j = g_{ij} a^i b^j,$$

onde se nota o surgimento do tensor de métrica, devido a sua definição. Comparando com uma das expressões (9.25), percebe-se que, necessariamente,

$$a_i = g_{ij} a^j.$$

Ou seja, uma componente *covariante* de a é obtida a partir de suas componentes *contravariantes* com o uso do tensor de métrica. Diz-se então que o índice foi *rebaixado* para a posição covariante.

Por outro lado, da mesma forma como a expressão (9.27) define o tensor de métrica covariante, pode-se também definir o mesmo tensor com seus componentes escritos na forma contravariante através de

$$g^{ij} \doteq e^i \cdot e^j. \quad (9.28)$$

Ressalta-se que os componentes de g^{ij} são, em geral, distintos dos respectivos componentes de g_{ij} .

Desta maneira, o produto escalar entre a e b também pode ser escrito como

$$a \cdot b = (a_i e^i) \cdot (b_j e^j) = g^{ij} a_i b_j.$$

Nota-se agora que $a^i = g^{ij} a_j$, ou seja, foi realizada a *elevação* o índice para a posição contravariante por intermédio também do tensor de métrica.

A capacidade do tensor de métrica de realizar a mudança na posição de um determinado índice não se restringe aos componentes de tensores de posto um. Este pode ser empregado também para mover o índice de um vetor de base. Ou seja, se $e_k \cdot e^j = \delta_k^j$, multiplicando ambos os lados por g_{ji} e realizando a soma implícita,

$$e_k \cdot e^j g_{ji} = \delta_k^j g_{ji} = g_{ki} = e_k \cdot e_i.$$

Portanto, observa-se que $e_i = g_{ij} e^j$, uma vez que o tensor de métrica é simétrico. A partir do produto externo, verifica-se facilmente que o tensor de métrica pode realizar a mesma operação em qualquer índice de um tensor de posto dois ou superior, ou seja,

$$T_j^i = T^{ik} g_{kj} \text{ ou } T^{ij} = T_k^i g^{kj}, \text{ etc.}$$

Finalmente, a relação entre g_{ij} e g^{ij} também é facilmente derivada. Dado o i -ésimo componente do vetor a , pode-se escrever

$$a^i = g^{ij} a_j, \text{ mas, } a_j = g_{jk} a^k. \text{ Portanto, } a^i = g^{ij} g_{jk} a^k.$$

Este resultado implica em que

$$g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i, \quad (9.29)$$

ou seja, usando uma representação matricial para o tensor de métrica e denotando $g = [g_{ij}]$, a sua inversa será $g^{-1} = [g^{ij}]$.

Finalmente, a forma mista (contra- e covariante) do tensor de métrica pode ser obtida diretamente do resultado anterior, empregando o mesmo para alterar a posição de um de seus índices,

$$g_j^i = g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i. \quad (9.30)$$

9.7.2.2 ELEMENTOS INFINITESIMAIS DE ARCO E VOLUME

Continuando com a discussão realizada na seção 1.1, se $dr = dq^i e_i$ é o vetor deslocamento infinitesimal em um espaço Riemanniano escrito em termos da base $\{e_i\}$, a norma ou o elemento infinitesimal de arco deste espaço é dado pela métrica (9.26), isto é,

$$d\ell^2 = dr \cdot dr = g_{ij} dq^i dq^j.$$

Considera-se agora a base canônica. De acordo com o que foi demonstrado no exercício 1.2, para sistemas ortogonais resulta $\{\hat{x}_i\} = \{e_i\}$. Além disso, como os fatores de escala são todos unitários, resulta também que $x_i = x^i$. Assim, os vetores de base $\{e_i\}$ podem ser novamente expressos, conforme as definições (9.24) e (1.7a), como

$$e_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} = \frac{\partial x^j}{\partial q^i} \hat{x}_j = \frac{\partial x_j}{\partial q^i} \hat{x}^j \equiv H^j_i \hat{x}_j = H_{ji} \hat{x}^j, \quad (9.31)$$

respectivamente, sendo agora

$$H^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \text{ e } H_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial q^j},$$

onde H é a matriz de transformação do sistema Cartesiano ao curvilíneo, cujo determinante corresponde ao Jacobiano da transformação. Portanto, o tensor de métrica pode ser escrito também como

$$g_{ij} = e_i \cdot e_j = H^k_i H_{\ell j} \hat{x}_k \cdot \hat{x}^\ell = H^k_i H_{\ell j} \delta_k^\ell = H^k_i H_{kj}, \quad (9.32)$$

a qual é simplesmente a expressão (1.8) já obtida.

Por sua vez, o elemento de arco ao longo da i -ésima coordenada curvilínea é escrito como $dl_i = dq^i e_i$, sendo que neste caso não se realiza a soma implícita. Portanto, o elemento de arco na direção de q^i pode ser escrito como $dl_i = dq^i H^j_i \hat{x}_j$.

De acordo com a discussão realizada na página 9, o elemento de volume delimitado pelos arcos $\{dl_1, dl_2, dl_3\}$, independente destes serem ortogonais ou não, é sempre dado por

$$d^3r = |dl_1 \cdot (dl_2 \times dl_3)| = |e_1 \cdot (e_2 \times e_3)| dq^1 dq^2 dq^3.$$

Portanto,

$$d^3r = \left| H^i_1 H^j_2 H^k_3 \hat{x}_i \cdot (\hat{x}_j \times \hat{x}_k) \right| dq^1 dq^2 dq^3 = \left| \epsilon_{ijk} H^i_1 H^j_2 H^k_3 \right| dq^1 dq^2 dq^3.$$

É conveniente neste ponto introduzir alguns resultados oriundos da álgebra de matrizes. Sendo A e B duas matrizes 3×3 não singulares, e sendo $B = A^{-1}$, recorda-se a expressão (9.15), a qual fornece o determinante da matriz A. Esta expressão pode ser adaptada para a notação covariante empregada nesta seção de diversas maneiras, como apresentado a seguir, onde também é apresentada uma expressão para os elementos da matriz B,

$$\det(A) \epsilon_{ijk} = A_{im} A_{jn} A_{kl} \epsilon^{mnl} \quad (9.33a)$$

$$\det(A) \epsilon_{ijk} = A^m_i A^n_j A^\ell_k \epsilon_{mnl} \quad (9.33b)$$

$$2 \det(A) B^{ij} = \epsilon^{ikl} \epsilon^{jmn} A_{mk} A_{nl}. \quad (9.33c)$$

As operações de elevação ou rebaixamento de índices envolvidas nas expressões acima são realizadas com o emprego do tensor de métrica e serão discutidas em breve. Desta forma, resulta

$$e_1 \cdot (e_2 \times e_3) = \det(H)$$

e o elemento de volume fica escrito

$$d^3r = |\det(H)| dq^1 dq^2 dq^3 = |J| dq^1 dq^2 dq^3,$$

lembrando que

$$J \equiv \det(H) = \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(q^1, q^2, q^3)}$$

é o Jacobiano da transformação do sistema Cartesiano ao curvilíneo. Esta é novamente a expressão para o elemento de volume já obtida em (1.21b).

Agora, o determinante do tensor de métrica também pode ser calculado com as expressões acima. Usando então a expressão (9.32) para o mesmo,

$$\det(g) = \epsilon^{ijk} g_{1i} g_{2j} g_{3k} = \epsilon^{ijk} H_{li} H_{mj} H_{nk} H^\ell_1 H^m_2 H^n_3 = \det(H) \epsilon_{lmn} H^\ell_1 H^m_2 H^n_3 = [\det(H)]^2.$$

Ou seja,

$$e_1 \cdot (e_2 \times e_3) = \sqrt{\det g}$$

e o elemento de volume pode ser escrito na forma generalizada como

$$d^3r = \sqrt{\det g} dq^1 dq^2 dq^3,$$

o qual é um resultado importante, válido também para sistemas de coordenadas não ortogonais.

Algumas relações adicionais envolvendo as bases e o tensor de métrica são úteis para aplicações posteriores. Em primeiro lugar, o produto triplo entre os vetores da base covariante pode ser escrito de uma forma geral como

$$e_i \cdot (e_j \times e_k) = \sqrt{g} \epsilon_{ijk}, \quad (9.34)$$

o que pode ser facilmente verificado. No resultado acima, definiu-se $g \equiv \det(g)$ para simplificar a notação.

Deseja-se agora escrever os vetores de uma base como combinações lineares de vetores da base recíproca. Isto é realizado através da operação de elevação ou rebaixamento de índices executada pelo tensor de métrica, isto é,

$$e^i = g^{ij} e_j \quad e_i = g_{ij} e^j.$$

Porém, empregando (9.33c) e (9.29), pode-se escrever $2gg^{ij} = \epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn}g_{mk}g_{nl}$. Portanto, para e^i ,

$$e^i = \frac{1}{2g}\epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn}g_{km}g_{ln}e_j.$$

Empregando novamente as relações (9.31) e (9.32), resulta então

$$e^i = \frac{1}{2g}\epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn}H^q_k H^r_\ell H_{qm} H_{rn} H_{pj} \hat{x}^p = \frac{1}{2\sqrt{g}}\epsilon^{ikl}\epsilon_{qrp} H^q_k H^r_\ell \hat{x}^p,$$

onde foi usado também (9.33a). Comparando este resultado com o produto

$$e_i \times e_j = H^k_i H^\ell_j \hat{x}_k \times \hat{x}_\ell = \epsilon_{klr} H^k_i H^\ell_j \hat{x}^r,$$

conclui-se que

$$e^i = \frac{1}{2\sqrt{g}}\epsilon^{ikl}(e_k \times e_\ell). \tag{9.35a}$$

Uma outra expressão útil pode ser agora obtida a partir deste resultado,

$$e^i \times e^j = \frac{1}{4g}\epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn}(e_k \times e_\ell) \times (e_m \times e_n).$$

Como $(a \times b) \times (c \times d) = d \cdot (a \times b)c - c \cdot (a \times b)d$, o produto triplo (9.34) mostra que

$$e^i \times e^j = \frac{1}{2g}\epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn}[e_n \cdot (e_k \times e_\ell)]e_m = \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ijk}e_k, \tag{9.35b}$$

$$e_i = \frac{\sqrt{g}}{2}\epsilon_{ijk}e^j \times e^k. \tag{9.35c}$$

Finalmente, se o sistema de coordenadas for ortogonal, então de (9.27b) e de (9.29) pode-se deduzir a forma para os componentes contravariantes do tensor de métrica. Se $j \neq i$, resulta

$$g_{ik}g^{kj} = 0 \implies h_i^2 g^{ij} = 0 \implies g^{ij} = 0, (j \neq i).$$

Por outro lado, se $j = i$, então

$$g_{ik}g^{ki} = 1 \implies g^{ii} = 1/h_i^2.$$

Portanto,

$$g^{ij} = \frac{\delta^{ij}}{h_i^2}$$

para um sistema ortogonal.

Da mesma forma,

$$g = h_1^2 h_2^2 h_3^2 \implies d^3 r = h_1 h_2 h_3 dq^1 dq^2 dq^3.$$

9.8 TRANSFORMAÇÕES GENERALIZADAS DE COORDENADAS E TENSORES GENERALIZADOS

A discussão realizada no capítulo 1 e na seção 9.7 restringiu-se a transformações realizadas do sistema Cartesiano para um sistema curvilíneo. Nesta seção esta discussão será generalizada para incluir uma transformação realizada entre dois sistemas de coordenadas quaisquer no R^n .

Parte-se então de um sistema de coordenadas no R^n previamente estabelecido, de tal forma que um ponto P neste espaço é localizado pela n -upla $P = (q^1, \dots, q^n)$. Generalizando as definições realizadas no capítulo 1 e na seção anterior, o ponto P consiste na intersecção de n hipersuperfícies coordenadas no R^n , sendo cada uma destas um subespaço de $n - 1$ dimensões no R^n determinado pela equação $q^i = c^i$ ($i = 1, \dots, n$), sendo $c^i = \text{cte}$. A curva coordenada de q^i consiste naquela intersecção das demais $n - 1$ hipersuperfícies; isto é, as coordenadas $\{q^j\}$ ($j \neq i$) permanecem constantes ao longo desta curva. Desta maneira, pode-se definir um conjunto de n vetores tangentes $e_i = \partial r / \partial q^i$, os quais formam a base covariante do sistema de coordenadas pois estes são linearmente independentes entre si.

Dada a base covariante, pode-se definir a *base contravariante* $\{e^i\}$, exigindo que esta base seja recíproca à base covariante; isto é, estes satisfazem a generalização da condição (9.23),

$$e_i \cdot e^j = \delta_i^j.$$

Desta maneira, um vetor a qualquer no R^n pode ser decomposto por meio das duas bases como $a = a^i e_i = a_i e^i$, sendo que agora $i = 1, \dots, n$ e o conjunto $\{a^i\}$ consiste nas *componentes contravariantes* de a , enquanto que $\{a_i\}$ contém as *componentes covariantes* do vetor.

Identificando por $Q = \{q^1, \dots, q^n\}$ o conjunto das coordenadas originais do ponto $P \in R^n$, considera-se agora o novo sistema de coordenadas curvilíneas $Q' = \{q'^1, \dots, q'^n\}$ para P , obtido a partir da lei de transformação

$$q'^i = q'^i(q^1, \dots, q^n), \quad (9.36a)$$

sendo que a transformação inversa

$$q^i = q^i(q'^1, \dots, q'^n) \quad (9.36b)$$

também deve estar definida.

Duas observações importantes a serem realizadas neste ponto são que as leis de transformação (9.36a,b) não são necessariamente lineares; ou seja, os elementos das matrizes de transformação podem ser funções das coordenadas, ao contrário do que foi considerado na seção 9.3, onde as matrizes de rotação, por exemplo, dependem somente de um ângulo fixo de rotação. Também devido a isso, as matrizes de transformação não são necessariamente ortogonais.

Como Q' contém por hipótese um conjunto de coordenadas válidas para um ponto $P \in R^n$ qualquer, pode-se definir então a base covariante neste novo sistema por

$$e'_i \doteq \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q'^i}, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Contudo, dada a lei de transformação (9.36b), pode-se escrever

$$e'_i = \frac{\partial q^j}{\partial q'^i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} = \frac{\partial q^j}{\partial q'^i} e_j, \quad (9.37a)$$

o que estabelece a mudança de base covariante decorrente da transformação $Q \rightarrow Q'$. Por sua vez, dada a transformação (9.36a), obtém-se mudança de base inversa associada

$$e_i = \frac{\partial q'^j}{\partial q^i} e'_j. \quad (9.37b)$$

De (9.37b) obtém-se imediatamente a lei de transformação das componentes contravariantes do vetor a , exigindo que o mesmo permaneça invariante na transformação $Q \rightarrow Q'$, i. e.,

$$a = a^i e_i = a'^i e'_i = \frac{\partial q'^i}{\partial q^j} a^j e_i \implies a'^i = \frac{\partial q'^i}{\partial q^j} a^j, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (9.38a)$$

Por sua vez, (9.37a) fornece a lei de transformação inversa $Q' \rightarrow Q$,

$$a^i e_i = a'^i e'_i = \frac{\partial q^i}{\partial q'^j} a'^j e_i \implies a^i = \frac{\partial q^i}{\partial q'^j} a'^j, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (9.38b)$$

As leis (9.38a,b) consistem nas condições necessárias e suficientes para que um conjunto de objetos $\{a^i\}$ contenha as componentes contravariantes de um tensor de posto um.

Seja agora o conjunto $\{e'^i\}$, o qual é recíproco à base covariante $\{e'_i\}$, i. e., $e'_i \cdot e'^j = \delta_i^j$. Observa-se que a condição de reciprocidade entre as bases em ambos os sistemas, juntamente com (9.37a), implica que a mudança de base contravariante frente a transformação $Q \rightarrow Q'$ deve ser dada por

$$e'^i = \frac{\partial q'^i}{\partial q^j} e^j, \quad (9.39a)$$

pois

$$\delta_i^j = e'_i \cdot e'^j = \frac{\partial q^k}{\partial q'^i} \frac{\partial q'^j}{\partial q^k} e_k \cdot e^j = \frac{\partial q^k}{\partial q'^i} \frac{\partial q'^j}{\partial q^k} \delta_k^j = \frac{\partial q^k}{\partial q'^i} \frac{\partial q'^j}{\partial q^k} = \frac{\partial q'^j}{\partial q'^i}.$$

Já frente a transformação $Q' \rightarrow Q$, a mudança de base é

$$e^i = \frac{\partial q^i}{\partial q'^j} e'^j, \tag{9.39b}$$

pois de (9.37b),

$$e_i \cdot e^j = \frac{\partial q'^k}{\partial q^i} \frac{\partial q^j}{\partial q'^\ell} e'_k \cdot e'^\ell = \frac{\partial q'^k}{\partial q^i} \frac{\partial q^j}{\partial q'^k} = \delta_i^j.$$

Assim, dada a decomposição do vetor a pelas bases contravariantes, $a = a_i e^i = a'_i e'^i$, juntamente com (9.39a,b), obtém-se as leis de transformação das componentes covariantes:

$$a'_i = \frac{\partial q^j}{\partial q'^i} a_j \tag{9.40a}$$

$$a_i = \frac{\partial q'^j}{\partial q^i} a'_j. \tag{9.40b}$$

Partindo das leis de transformação (9.38) e (9.40), definem-se agora os componentes contravariante, mistos e covariantes de um tensor generalizado de posto dois \mathcal{T} respectivamente como

$$T'^{ij} = \frac{\partial q'^i}{\partial q^k} \frac{\partial q^j}{\partial q'^\ell} T^{k\ell}, \quad T'^i_j = \frac{\partial q'^i}{\partial q^k} \frac{\partial q^\ell}{\partial q'^j} T^k_\ell, \quad T'_{ij} = \frac{\partial q^k}{\partial q'^i} \frac{\partial q^\ell}{\partial q'^j} T_{k\ell}.$$

Pode-se generalizar ainda mais a definição de um tensor com um número arbitrário de índices contravariantes e/ou covariantes. Esta forma generalizada possui várias designações na literatura. Assumindo que o tensor \mathcal{T} possua r índices na posição contravariante e s índices na posição covariante, o seu posto é $N = r + s$ e este é denominado um **tensor do tipo** (r, s) ou **tensor de valência** (r, s) ou ainda **tensor r -vezes contravariante e s -vezes covariante**. A notação empregada também varia na literatura. De acordo com a notação empregada neste texto até o presente momento, os índices mistos de um tensor devem apresentar-se espaçados. Contudo, esta regra pode ser flexibilizada para facilitar a notação e visualização das expressões.

Portanto, um tensor \mathcal{T} é do tipo (r, s) se os seus componentes transformarem-se de acordo com

$$T'^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = \frac{\partial q'^{i_1}}{\partial q^{k_1}} \dots \frac{\partial q'^{i_r}}{\partial q^{k_r}} \frac{\partial q^{\ell_1}}{\partial q'^{j_1}} \dots \frac{\partial q^{\ell_s}}{\partial q'^{j_s}} T^{k_1 \dots k_r}_{\ell_1 \dots \ell_s}. \tag{9.41}$$

Por conveniência de notação, estes componentes também podem ser representados simplesmente por $T'^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$.

Os componentes do tensor generalizado definido por (9.41) seguem as mesmas regras algébricas dos tensores Cartesianos discutidas na seção 9.4.

Exercício 9.7. Verifique se a delta de Kronecker satisfaz a lei de transformação (9.41).

Solução. Dado δ_j^i , se este símbolo é de fato um tensor misto de posto dois, então frente a uma transformação de coordenadas generalizada,

$$\delta'^i_j = \frac{\partial q'^i}{\partial q^k} \frac{\partial q^\ell}{\partial q'^j} \delta_\ell^k = \frac{\partial q'^i}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial q'^j} = \frac{\partial q'^i}{\partial q'^j} = \delta_j^i,$$

onde foi empregada derivação em cadeia. Ou seja, a delta de Kronecker possui os mesmos componentes em qualquer sistema de coordenadas, demonstrando ser um tensor misto de posto dois. A expressão (9.30) já havia mostrado que o tensor de métrica na forma mista é justamente dado por esta delta.

Exercício 9.8. Mostre que $g_{ij} = e_i \cdot e_j$ são os componentes covariantes de um tensor de posto dois.

Demonstração. Em uma transformação generalizada, a nova base $\{e'_i\}$ deve levar aos componentes

$$g'_{ij} = e'_i \cdot e'_j.$$

Usando a mudança de base em (9.37a), resulta

$$g'_{ij} = \frac{\partial q^k}{\partial q'^i} \frac{\partial q^\ell}{\partial q'^j} e_k \cdot e_\ell = \frac{\partial q^k}{\partial q'^i} \frac{\partial q^\ell}{\partial q'^j} g_{k\ell}.$$

Ou seja, os componentes de $\{g_{ij}\}$ transformam-se como um tensor covariante de posto dois. \square

9.9 TENSORES RELATIVOS

Na seção 9.6.1 discutiu-se a diferença entre um tensor Cartesiano e um pseudotensor. Esta distinção será novamente discutida em um contexto mais amplo, generalizando esta distinção para qualquer transformação entre sistemas de coordenadas.

Um **tensor relativo** ou **densidade de tensor** é aquele objeto que se transforma como um tensor entre um sistema de coordenadas a outro, exceto que sua lei de transformação difere de (9.41) pela multiplicação de um *peso*, correspondente a uma determinada potência do Jacobiano da transformação.

Observando a lei de transformação dos componentes contravariantes de um vetor (9.38a), percebe-se que as quantidades $\{\partial q'^i/\partial q^j\}$ podem ser escritas na forma de uma matriz J , cujos elementos são definidos por

$$J^i_j = \frac{\partial q'^i}{\partial q^j}, \quad (9.42a)$$

e cujo determinante $J \equiv \det(J)$ é justamente o Jacobiano da transformação $\{q^i\} \rightarrow \{q'^i\}$. Assim, pode-se escrever de forma compacta $a'^i = J^i_j a^j$.

Por sua vez, a transformação inversa (9.38b) também pode ser escrita em termos de uma matriz K , definida por

$$K^i_j = \frac{\partial q^i}{\partial q'^j}, \quad (9.42b)$$

ou seja, $a^i = K^i_j a'^j$. É fácil mostrar que $K = J^{-1}$ e, portanto, $K \equiv \det(K) = J^{-1}$.

Com a mesma notação, as leis de transformação dos componentes covariantes de um vetor, dadas por (9.40a,b), podem ser escritas de forma compacta como

$$a'_i = K^j_i a_j \quad \text{e} \quad a_i = J^j_i a'_j.$$

Usando então o determinante K , define-se o **tensor relativo de peso** w como o conjunto $\{T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}\}$, composto por n^{r+s} objetos matemáticos identificados por r índices contravariantes e s índices covariantes que se transformam de acordo com a lei

$$T'^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = K^w \frac{\partial q'^{i_1}}{\partial q^{k_1}} \dots \frac{\partial q'^{i_r}}{\partial q^{k_r}} \frac{\partial q^{\ell_1}}{\partial q'^{j_1}} \dots \frac{\partial q^{\ell_s}}{\partial q'^{j_s}} T^{k_1 \dots k_r}_{\ell_1 \dots \ell_s}. \quad (9.43)$$

A partir da definição (9.43), os diferentes valores que o peso w pode assumir estabelecem classificações dos tensores relativos que muitas vezes depende do texto consultado na literatura. Uma classificação distingue entre **densidades de tensores (autênticos)** ou **densidades tensoriais** e **densidades de pseudotensores**, quando o peso w é uma quantidade inteira. De acordo com esta classificação, chamam-se:

Tensores verdadeiros ou absolutos: quando o peso é $w = 0$, ou seja, o tensor segue a lei (9.41).

Densidade de tensor (autêntico) de peso w (inteiro): quando o peso é $w \geq 1$. Em particular, quando $w = +1$, este objeto é chamado simplesmente de *densidade de tensor* ou *densidade tensorial*.

Densidade de pseudotensor de peso w (inteiro): quando o peso é $w \leq -1$. Em particular, quando $w = -1$, este objeto é chamado simplesmente de *pseudotensor*. Cabe mencionar aqui que tanto objetos com peso $w = -1$ quanto com peso $w = +1$ são classificados como pseudotensores escalares, de acordo com a lei de transformação (9.21).

Esta classificação exige que o peso w seja inteiro, uma vez que no caso contrário a transformação (9.43) não é necessariamente unívoca.

Uma outra classificação que pode ser encontrada, para a qual o peso w não necessita ser necessariamente inteiro. Segundo esta classificação, as densidades de tensores podem ser:

Densidade par de tensor de peso w : quando o objeto se transforma de acordo com

$$T'^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = |K|^w \frac{\partial q'^{i_1}}{\partial q^{k_1}} \dots \frac{\partial q'^{i_r}}{\partial q^{k_r}} \frac{\partial q^{\ell_1}}{\partial q'^{j_1}} \dots \frac{\partial q^{\ell_s}}{\partial q'^{j_s}} T^{k_1 \dots k_r}_{\ell_1 \dots \ell_s}.$$

Densidade ímpar de tensor de peso w : quando o objeto se transforma de acordo com

$$T'^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = \text{sgn}(K) |K|^w \frac{\partial q'^{i_1}}{\partial q^{k_1}} \dots \frac{\partial q'^{i_r}}{\partial q^{k_r}} \frac{\partial q^{\ell_1}}{\partial q'^{j_1}} \dots \frac{\partial q^{\ell_s}}{\partial q'^{j_s}} T^{k_1 \dots k_r}_{\ell_1 \dots \ell_s},$$

onde $\text{sgn}(K)$ é o sinal de K .

Neste texto, a lei de transformação geral a ser adotada para tensores relativos continuará a ser (9.43).

Exercício 9.9. Sendo $\{g_{ij}\}$ as componentes covariantes do tensor de métrica, mostre que o determinante $g = \det(g)$ é uma densidade escalar de peso $w = +2$.

Solução. Os componentes do tensor de métrica transformam-se de acordo com (9.41),

$$g'_{ij} = \frac{\partial q^k}{\partial q'^i} \frac{\partial q^\ell}{\partial q'^j} g_{k\ell}.$$

A representação matricial desta lei de transformação é

$$g' = K^T g K.$$

Portanto,

$$g' = \det(g') = \det(K^T g K) = K^2 g,$$

o que mostra que g é uma densidade escalar (ou escalar relativo) de peso $w = +2$.

Algumas propriedades de tensores relativos podem ser agora apresentadas:

1. A transformação tensorial é **transitiva**, ou seja, ao se realizarem duas transformações seguidas, representadas esquematicamente por $\{q_i\} \rightarrow \{q'_i\} \rightarrow \{q''_i\}$, o tensor resultante pode ser descrito por uma única transformação $\{q_i\} \rightarrow \{q''_i\}$, a qual é dada pela composição das transformações anteriores. Esta propriedade já havia sido discutida no contexto de tensores Cartesianos na seção 9.5.1.
2. Tensores relativos de mesmo posto, tipo e peso podem ser adicionados e a soma resulta em um outro tensor relativo com as mesmas características.
3. Se dois tensores relativos possuem pesos w_1 e w_2 , respectivamente, então os produtos externo ou interno dos mesmos resulta em um novo tensor relativo com peso $w_1 + w_2$.
4. A operação de contração aplicada a um tensor relativo resulta em um outro tensor relativo com o mesmo peso que o tensor original.
5. O resultado obtido no exercício 9.9 mostra que qualquer tensor relativo \mathcal{T} de peso w pode gerar um tensor absoluto de mesmo posto através do produto externo

$$U^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = g^{-w/2} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s},$$

pois ao se realizar a transformação, resulta

$$U'^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = (g')^{-w/2} T'^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = (K^2 g)^{-w/2} K^w \frac{\partial q'^{i_1}}{\partial q^{k_1}} \dots \frac{\partial q'^{i_r}}{\partial q^{k_r}} \frac{\partial q^{\ell_1}}{\partial q'^{j_1}} \dots \frac{\partial q^{\ell_s}}{\partial q'^{j_s}} T^{k_1 \dots k_r}_{\ell_1 \dots \ell_s},$$

o qual se comporta como um tensor verdadeiro.

Exercício 9.10. Calcule os pesos dos símbolos de Levi-Civita ϵ_{ijk} e ϵ^{ijk} .

Solução. Partindo de ϵ_{ijk} , válido em um determinado sistema de coordenadas, deseja-se aplicar sobre o mesmo a transformação $\{q_i\} \rightarrow \{q'_i\}$. Fazendo isso, resulta o objeto

$$\frac{\partial q^\ell}{\partial q'^i} \frac{\partial q^m}{\partial q'^j} \frac{\partial q^n}{\partial q'^k} \epsilon_{\ell mn} = K^\ell_i K^m_j K^n_k \epsilon_{\ell mn}.$$

Contudo, de acordo com a identidade matricial (9.33b), $K^\ell_i K^m_j K^n_k \epsilon_{\ell mn} = K \epsilon_{ijk}$. Portanto, a lei de transformação correta para ϵ_{ijk} , a qual irá resultar em um tensor ϵ'_{ijk} cujos componentes têm os valores esperados para o símbolo de Levi-Civita em qualquer sistema de coordenadas, é

$$\epsilon'_{ijk} = K^{-1} \frac{\partial q^\ell}{\partial q'^i} \frac{\partial q^m}{\partial q'^j} \frac{\partial q^n}{\partial q'^k} \epsilon_{\ell mn}.$$

Portanto, $\{\epsilon_{ijk}\}$ é uma densidade tensorial de peso $w = -1$.

Já para o símbolo ϵ^{ijk} , a mesma transformação de coordenadas resulta no objeto

$$\frac{\partial q'^i}{\partial q^\ell} \frac{\partial q'^j}{\partial q^m} \frac{\partial q'^k}{\partial q^n} \epsilon^{\ell mn} = J_\ell^i J_m^j J_n^k \epsilon^{\ell mn} = J \epsilon^{ijk} = K^{-1} \epsilon^{ijk}.$$

Portanto, o símbolo ϵ^{ijk} deve se transformar como

$$\epsilon'^{ijk} = K \frac{\partial q'^i}{\partial q^\ell} \frac{\partial q'^j}{\partial q^m} \frac{\partial q'^k}{\partial q^n} \epsilon^{\ell mn},$$

correspondendo a uma densidade tensorial de peso $w = +1$.

9.10 DERIVADAS DOS VETORES DE BASE E OS SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL

No sistema Cartesiano, os vetores da base canônica $\{\hat{x}_i\}$ são constantes e por isso a aplicação de qualquer operador diferencial sobre um campo vetorial irá atuar somente sobre os componentes do campo. Por outro lado, em um sistema de coordenadas generalizado os vetores de base $\{e_i\}$ e $\{e^i\}$ são funções das próprias coordenadas curvilíneas. Portanto, qualquer operador diferencial irá atuar também sobre estes vetores.

Considera-se então uma derivada qualquer atuando sobre um determinado vetor de base; por exemplo, a operação $\partial e_i / \partial q^j$. O resultado desta derivação é também um vetor, o qual pode, portanto, ser expresso em termos da própria base $\{e_i\}$. Dado então o vetor $e_i = e_i(q^1, q^2, q^3)$, escreve-se

$$\frac{\partial e_i}{\partial q^j} = \Gamma^k_{ij} e_k, \tag{9.44a}$$

onde Γ^k_{ij} é denominado **símbolo de Christoffel (de três índices) do segundo tipo**. Os símbolos de Christoffel podem ser visualizados como matrizes $n \times n \times n$, possuindo portanto n^3 elementos ao todo no R^n . Na literatura, uma outra notação empregada com frequência para os símbolos de Christoffel do segundo tipo é:

$$\Gamma^i_{jk} \equiv \left\{ \begin{matrix} i \\ j \quad k \end{matrix} \right\}.$$

Usando a relação de reciprocidade (9.23), os valores de Γ^k_{ij} podem ser obtidos por

$$\Gamma^k_{ij} = e^k \cdot \frac{\partial e_i}{\partial q^j}. \tag{9.44b}$$

Com a mesma relação pode-se obter também a expressão para as derivadas de $\{e^i\}$. Escrevendo

$$\frac{\partial e^i}{\partial q^j} = \alpha^i_{jk} e^k,$$

observa-se que

$$e_k \cdot \frac{\partial e^i}{\partial q^j} = \alpha^i_{jk}.$$

Porém, derivando a relação de reciprocidade, obtém-se que

$$e_k \cdot \frac{\partial e^i}{\partial q^j} = -\Gamma^i_{kj}.$$

Ou seja, $\alpha^i_{jk} = -\Gamma^i_{kj}$ e

$$\frac{\partial e^i}{\partial q^j} = -\Gamma^i_{kj} e^k. \tag{9.44c}$$

Exercício 9.11. Mostre que o conjunto dos símbolos de Christoffel $\{\Gamma^i_{kj}\}$ não são componentes de um tensor misto de terceira ordem.

Solução. Aplicando uma transformação arbitrária sobre (9.44b), no novo sistema de coordenadas resulta

$$\Gamma'^k{}_{ij} = e'^k \cdot \frac{\partial e'_i}{\partial q'^j}.$$

Mas, conforme as leis de transformação (9.37a) e (9.39a), pode-se escrever

$$\begin{aligned} \Gamma'^k{}_{ij} &= \frac{\partial q'^k}{\partial q^\ell} e^\ell \cdot \frac{\partial}{\partial q'^j} \left(\frac{\partial q^m}{\partial q'^i} e_m \right) \\ &= \frac{\partial q'^k}{\partial q^\ell} \left(\frac{\partial^2 q^m}{\partial q'^j \partial q'^i} e^\ell \cdot e_m + \frac{\partial q^m}{\partial q'^i} e^\ell \cdot \frac{\partial e_m}{\partial q'^j} \right) \\ &= \frac{\partial q'^k}{\partial q^\ell} \left(\frac{\partial^2 q^\ell}{\partial q'^j \partial q'^i} + \frac{\partial q^m}{\partial q'^i} \frac{\partial q^n}{\partial q'^j} e^\ell \cdot \frac{\partial e_m}{\partial q^n} \right), \\ \Gamma'^k{}_{ij} &= \frac{\partial q'^k}{\partial q^\ell} \frac{\partial^2 q^\ell}{\partial q'^j \partial q'^i} + \frac{\partial q'^k}{\partial q^\ell} \frac{\partial q^m}{\partial q'^i} \frac{\partial q^n}{\partial q'^j} \Gamma^\ell{}_{mn}. \end{aligned} \quad (9.45)$$

Observa-se que somente o segundo termo do lado direito está de acordo com a lei de transformação de um tensor de posto 3. A presença do termo adicional mostra que o símbolo de Christoffel não é um tensor.

Uma expressão alternativa para o cálculo de $\Gamma^k{}_{ij}$, em termos do tensor de métrica, pode ser obtida. Inicialmente, observa-se que o símbolo de Christoffel é simétrico frente a permutação $i \leftrightarrow j$. Isto é facilmente demonstrado a partir da definição (9.24). Uma vez que

$$\frac{\partial e_i}{\partial q^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^j \partial q^i} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^i \partial q^j} = \frac{\partial e_j}{\partial q^i},$$

resulta de (9.44a,b) que

$$\frac{\partial e_i}{\partial q^j} = \Gamma^k{}_{ij} e_k = \frac{\partial e_j}{\partial q^i} \implies \Gamma^k{}_{ij} = \frac{\partial e_j}{\partial q^i} \cdot e^k = \Gamma^k{}_{ji}.$$

Considera-se então a definição (9.27a). Derivando a mesma, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} &= \frac{\partial e_i}{\partial q^k} \cdot e_j + e_i \cdot \frac{\partial e_j}{\partial q^k} \\ &= \Gamma^\ell{}_{ik} e_\ell \cdot e_j + \Gamma^\ell{}_{jk} e_i \cdot e_\ell \\ &= \Gamma^\ell{}_{ik} g_{\ell j} + \Gamma^\ell{}_{jk} g_{i \ell}. \end{aligned}$$

Realizando duas permutações cíclicas dos índices livres i, j e k neste resultado, resultam as expressões

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} &= \Gamma^\ell{}_{ji} g_{\ell k} + \Gamma^\ell{}_{ki} g_{j \ell} \\ \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} &= \Gamma^\ell{}_{kj} g_{\ell i} + \Gamma^\ell{}_{ij} g_{k \ell}. \end{aligned}$$

Somando as duas últimas expressões e subtraindo a primeira e fazendo uso da simetria de g_{ij} e $\Gamma^k{}_{ij}$, resulta

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} = 2\Gamma^\ell{}_{ij} g_{k \ell}.$$

Realizando o produto interno com g^{mk} e usando (9.29), resulta finalmente

$$\Gamma^k{}_{ij} = \frac{1}{2} g^{k \ell} \left(\frac{\partial g_{j \ell}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{\ell i}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^\ell} \right). \quad (9.46a)$$

Uma maneira prática de se visualizar os símbolos de Christoffel é oferecida definindo três matrizes (no R^3) 3×3 simétricas, cada uma correspondendo a um valor do índice k em (9.46a), ou seja,

$$\Gamma^k \equiv [\Gamma^k{}_{ij}] = \begin{pmatrix} \Gamma^k{}_{11} & \Gamma^k{}_{12} & \Gamma^k{}_{13} \\ \Gamma^k{}_{21} & \Gamma^k{}_{22} & \Gamma^k{}_{23} \\ \Gamma^k{}_{31} & \Gamma^k{}_{32} & \Gamma^k{}_{33} \end{pmatrix}, \quad (k = 1, 2, 3). \quad (9.46b)$$

Exercício 9.12. Calcule os símbolos de Christoffel para o sistema de coordenadas cilíndricas.

Solução. Usando os resultados da seção 1.5.1, o tensor de métrica e sua inversa são dados por

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a primeira conclusão é que $g_{ij} = h_i^2 \delta_{ij}$, resultando para (9.46),

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} \left(h_j^{-2} \frac{\partial h_j^2}{\partial q^i} \delta^{kj} + h_i^{-2} \frac{\partial h_i^2}{\partial q^j} \delta^{ki} - h_k^{-2} \frac{\partial h_i^2}{\partial q^k} \delta_{ij} \right),$$

sendo que não existem somas implícitas nos índices duplos. Observa-se então que somente são não nulos os símbolos onde $i = 2$ e/ou $j = 2$ e/ou $k = 2$. Ou seja,

$$\Gamma^{\phi}_{\rho\phi} = \Gamma^{\phi}_{\phi\rho} = \frac{1}{\rho}, \quad \Gamma^{\rho}_{\phi\phi} = -\rho.$$

Todas as outras possibilidades resultam nulas.

Em termos das representações matriciais,

$$\Gamma^{\rho} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma^{\phi} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\rho & 0 \\ 1/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma^z = 0.$$

Os **símbolos de Christoffel (de três índices) do primeiro tipo** correspondem à expansão equivalente a (9.44a), porém em termos dos vetores da base contravariante $\{e^i\}$, ou seja,

$$\frac{\partial e_i}{\partial q^j} = [ij, k] e^k, \quad (9.47a)$$

onde $[ij, k]$ é a notação usualmente empregada na literatura para os símbolos de Christoffel do primeiro tipo.

Da mesma forma como se procedeu com Γ^i_{jk} , as expressões para estes símbolos são obtidas a partir da relação de reciprocidade, resultando em

$$[ij, k] = \frac{\partial e_i}{\partial q^j} \cdot e_k. \quad (9.47b)$$

Como $e_i = g_{i\ell} e^{\ell}$, resulta de (9.44b) a seguinte relação entre ambos os tipos de símbolos,

$$[ij, k] = g_{k\ell} \Gamma^{\ell}_{ij} = g_{k\ell} \left\{ \begin{matrix} \ell \\ i & j \end{matrix} \right\} \iff \Gamma^k_{ij} = \left\{ \begin{matrix} k \\ i & j \end{matrix} \right\} = g^{k\ell} [ij, \ell]. \quad (9.47c)$$

Este último resultado mostra também que $[ij, k] = [ji, k]$.

Finalmente, usando (9.46) obtém-se a seguinte expressão para $[ij, k]$ em termos do tensor de métrica,

$$[ij, k] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right). \quad (9.47d)$$

9.11 DIFERENCIAÇÃO COVARIANTE

Nesta seção introduz-se o conceito de *derivada covariante*, a qual está envolvida no cálculo de operadores diferenciais aplicados a campos tensoriais em sistemas de coordenadas generalizadas. Para iniciar a discussão, são considerados os objetos matemáticos resultantes das variações arbitrárias de campos tensoriais de mais baixa ordem, ou seja, campos escalares e vetoriais.

Para o caso de um campo escalar $\psi = \psi(\mathbf{r})$, sua variação infinitesimal, quando calculada no sistema Cartesiano, pode sempre ser escrita como $d\psi = \nabla\psi \cdot d\mathbf{r}$, sendo o gradiente escrito em coordenadas Cartesianas. No sistema curvilíneo, a mesma variação resulta em

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial q^i} dq^i.$$

Como $\{dq^i\}$ são os componentes de um vetor contravariante e $d\psi$ é um escalar, resulta que, de acordo com a lei do quociente, $\{\partial\psi/\partial q^i\}$ formam os componentes de um vetor covariante.

Por outro lado, para o campo vetorial $v = v^i e_i$, embora em coordenadas Cartesianas $\{\partial v^i/\partial x^j\}$ contém os componentes de um tensor de posto dois, esta regra não é geral para qualquer sistema de coordenadas, pois $\partial v^i/\partial q^j$ se transforma de acordo com

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v^i}{\partial q^j}\right)' &= \frac{\partial v'^i}{\partial q'^j} = \frac{\partial q^k}{\partial q'^j} \frac{\partial}{\partial q^k} \left(\frac{\partial q'^i}{\partial q^\ell} v^\ell\right) \\ &= \frac{\partial q^k}{\partial q'^j} \frac{\partial^2 q'^i}{\partial q^k \partial q^\ell} v^\ell + \frac{\partial q'^i}{\partial q^\ell} \frac{\partial q^k}{\partial q'^j} \frac{\partial v^\ell}{\partial q^k}, \end{aligned}$$

o qual não segue a lei de transformação de um tensor generalizado de segunda ordem. Este objeto, a propósito, transforma-se de maneira semelhante aos símbolos de Christoffel. Este resultado não segue a lei de transformação de tensores porque a matriz de transformação J é, em geral, uma função das coordenadas, ou seja, $J = J(q^1, \dots, q^n)$.

Ao se calcular a derivada de um campo vetorial v em relação a uma coordenada q^j qualquer, é necessário levar em conta também a geometria do sistema adotado, a qual é descrita pelos símbolos de Christoffel. Neste caso, pode-se escrever

$$\frac{\partial v}{\partial q^j} = \frac{\partial}{\partial q^j} (v^i e_i) = \frac{\partial v^i}{\partial q^j} e_i + v^i \frac{\partial e_i}{\partial q^j} = \frac{\partial v^i}{\partial q^j} e_i + v^i \Gamma^k_{ij} e_k = \left(\frac{\partial v^i}{\partial q^j} + v^k \Gamma^i_{kj}\right) e_i.$$

Agora o objeto obtido na expressão acima comporta-se como um tensor de posto dois. Este objeto é denominado a *derivada covariante* do vetor v e é representado por

$$v^i{}_{;j} \equiv \frac{\partial v^i}{\partial q^j} + \Gamma^i_{kj} v^k \equiv v^i{}_{,j} + \Gamma^i_{kj} v^k. \quad (9.48a)$$

Em (9.48a), a notação “;j” denota a diferenciação covariante em relação a coordenada q^j , enquanto que “,j” indica a diferenciação usual na mesma coordenada, i. e., $v^i{}_{,j} = \partial v^i/\partial q^j$. Usando o símbolo da diferenciação covariante, pode-se escrever então

$$\frac{\partial v}{\partial q^j} = v^i{}_{;j} e_i. \quad (9.48b)$$

Exercício 9.13. Mostre que $\{v^i{}_{;j}\}$ forma os componentes de um tensor misto de posto dois.

Solução. Realizando a transformação $\{q^i\} \rightarrow \{q'^i\}$,

$$(v^i{}_{;j})' = v'^i{}_{;j} = \frac{\partial v'^i}{\partial q'^j} + v'^k \Gamma'^i_{kj}.$$

Usando a lei de transformação de Γ^k_{ij} dada por (9.45), pode-se escrever

$$\begin{aligned} v'^i{}_{;j} &= \frac{\partial q^\ell}{\partial q'^j} \frac{\partial}{\partial q^\ell} \left(\frac{\partial q'^i}{\partial q^m} v^m\right) + \frac{\partial q'^k}{\partial q^r} v^r \left(\frac{\partial q'^i}{\partial q^\ell} \frac{\partial^2 q^\ell}{\partial q'^j \partial q'^k} + \frac{\partial q'^i}{\partial q^\ell} \frac{\partial q^m}{\partial q'^k} \frac{\partial q^n}{\partial q'^j} \Gamma^{\ell}_{mn}\right) \\ &= \frac{\partial q^\ell}{\partial q'^j} \frac{\partial^2 q'^i}{\partial q^\ell \partial q^m} v^m + \frac{\partial q'^k}{\partial q^r} \frac{\partial q'^i}{\partial q^\ell} \frac{\partial^2 q^\ell}{\partial q'^j \partial q'^k} v^r + \frac{\partial q^\ell}{\partial q'^j} \frac{\partial q'^i}{\partial q^m} \frac{\partial v^m}{\partial q^\ell} + \frac{\partial q'^i}{\partial q^\ell} \frac{\partial q^n}{\partial q'^j} v^m \Gamma^{\ell}_{mn}. \end{aligned}$$

Mas os dois primeiros termos resultam

$$\begin{aligned} \frac{\partial q^\ell}{\partial q'^j} \frac{\partial^2 q'^i}{\partial q^\ell \partial q^m} v^m + \frac{\partial q'^k}{\partial q^r} \frac{\partial q'^i}{\partial q^\ell} \frac{\partial^2 q^\ell}{\partial q'^j \partial q'^k} v^r &= \left[\frac{\partial q^\ell}{\partial q'^j} \frac{\partial^2 q'^i}{\partial q^\ell \partial q^m} + \frac{\partial q'^i}{\partial q^\ell} \left(\frac{\partial q'^k}{\partial q^m} \frac{\partial}{\partial q'^k}\right) \frac{\partial q^\ell}{\partial q'^j} \right] v^m \\ &= \left(\frac{\partial^2 q'^i}{\partial q^m \partial q^\ell} \frac{\partial q^\ell}{\partial q'^j} + \frac{\partial q'^i}{\partial q^\ell} \frac{\partial^2 q^\ell}{\partial q^m \partial q'^j} \right) v^m = \frac{\partial}{\partial q^m} \left(\frac{\partial q'^i}{\partial q^\ell} \frac{\partial q^\ell}{\partial q'^j} \right) v^m = \frac{\partial \delta^i_j}{\partial q^m} v^m = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$v'^i{}_{;j} = \frac{\partial q'^i}{\partial q^m} \frac{\partial q^\ell}{\partial q'^j} \left(\frac{\partial v^m}{\partial q^\ell} + v^n \Gamma^m_{nl} \right) = \frac{\partial q'^i}{\partial q^k} \frac{\partial q^\ell}{\partial q'^j} v^k{}_{;\ell},$$

o qual segue a lei de transformação de um tensor misto de posto dois.

Exercício 9.14. Calcule a derivada covariante $v^i_{;j}$ em coordenadas cilíndricas. Em seguida, calcule a contração $v^i_{;i}$.

Solução. Da definição (9.48) e dos valores de Γ^k_{ij} para as coordenadas cilíndricas obtidos no exercício 9.12, resulta, para $\{i, j\} = \{1, 2, 3\} \equiv \{\rho, \phi, x^3\}$,

$$v^i_{;j} = \frac{\partial v^i}{\partial q^j} + \frac{\delta^{i\phi}}{\rho} (v^\rho \delta_{j\phi} + v^\phi \delta_{j\rho}) - \rho v^\phi \delta^{i\rho} \delta_{j\phi}.$$

Realizando agora contração,

$$v^i_{;i} = \frac{\partial v^i}{\partial q^i} + \frac{v^\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v^\rho) + \frac{\partial v^\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v^3}{\partial x^3},$$

a qual é exatamente a expressão para o divergente do campo v em coordenadas cilíndricas, obtido na seção 1.5.1.

A expressão equivalente a (9.48), porém para os componentes covariantes do vetor v , pode ser obtida derivando agora $v = v_i e^i$, com o emprego de (9.44c), ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial q^j} (v_i e^i) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial q^j} - v_k \Gamma^k_{ij} \right) e^i.$$

Chamando $v_{i;j}$ a derivada covariante da i -ésima componente covariante do vetor v , obtém-se

$$v_{i;j} = \frac{\partial v_i}{\partial q^j} - \Gamma^k_{ij} v_k = v_{i,j} - \Gamma^k_{ij} v_k. \quad (9.49a)$$

Portanto, pode-se escrever

$$\frac{\partial v}{\partial q^j} = v_{i;j} e^i. \quad (9.49b)$$

Derivadas covariantes de tensores de ordens mais altas podem ser obtidas seguindo o mesmo procedimento adotado acima. Por exemplo, um tensor de posto dois possui ao todo 4 representações: 1 contravariante, 1 covariante e 2 mistas. Para realizar em detalhes a derivação covariante para os componentes contravariantes do tensor \mathcal{T} , escreve-se o mesmo como $\mathcal{T} = T^{ij} e_i \otimes e_j$. Derivando então em relação a q^k ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q^k} &= \frac{\partial}{\partial q^k} (T^{ij} e_i \otimes e_j) \\ &= \frac{\partial T^{ij}}{\partial q^k} e_i \otimes e_j + T^{ij} \frac{\partial e_i}{\partial q^k} \otimes e_j + T^{ij} e_i \otimes \frac{\partial e_j}{\partial q^k} \\ &= \left(\frac{\partial T^{ij}}{\partial q^k} + \Gamma^i_{\ell k} T^{\ell j} + \Gamma^j_{\ell k} T^{i \ell} \right) e_i \otimes e_j. \end{aligned}$$

Chamando então $T^{ij}_{;k}$ como a derivada covariante dos componentes contravariantes do tensor \mathcal{T} , identifica-se

$$T^{ij}_{;k} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial q^k} + \Gamma^i_{\ell k} T^{\ell j} + \Gamma^j_{\ell k} T^{i \ell}, \quad (9.50a)$$

podendo escrever

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q^k} = T^{ij}_{;k} e_i \otimes e_j.$$

Pode-se mostrar facilmente que o conjunto $\{T^{ij}_{;k}\}$ forma os componentes de um tensor de posto três.

Expressões equivalentes a (9.50a) para as outras representações de \mathcal{T} podem ser derivadas da mesma maneira. Estas são:

$$T^i_{j;k} = T^i_{j,k} + \Gamma^i_{\ell k} T^\ell_j - \Gamma^\ell_{jk} T^i_\ell \quad (9.50b)$$

$$T_{ij;k} = T_{ij,k} - \Gamma^{\ell}_{ik} T_{\ell j} - \Gamma^{\ell}_{jk} T_{i \ell}, \quad (9.50c)$$

onde o índice “ k ” indica agora a derivação usual nesta coordenada, i. e., $T_{i,j,k} = \partial T_{ij} / \partial q^k$.

Expressões para as derivadas covariantes de tensores de postos maiores que dois podem ser derivadas seguindo os modelos fornecidos pelas expressões (9.48), (9.49) e (9.50a-c): a derivada covariante de cada componente de um tensor de posto N é composta por $N+1$ termos. O primeiro termo é sempre a derivada direta do componente em relação à coordenada; os demais N termos são combinações de produtos dos símbolos de Christoffel com os componentes do tensor. Para cada índice na posição contravariante, o termo correspondente na derivada covariante é somado, enquanto que para cada índice covariante, o termo correspondente é subtraído. Em cada um destes termos, o último índice do símbolo de Christoffel é sempre a coordenada que está sendo derivada. Por sua vez, os demais índices são sempre tais que a convenção de somas implícitas é respeitada para a particular representação do tensor que está sendo derivada.

A derivação covariante também serve para atribuir significado à aplicação do operador nabla (∇) sobre um tensor de posto N , de tal forma que o objeto matemático resultante seja um tensor de posto $N + 1$ que satisfaz a lei de transformação. Por exemplo, para o tensor \mathcal{T} em (9.50a-c), a operação $\mathcal{U} = \nabla \mathcal{T}$ resulta em um tensor de posto três, sendo que algumas de suas representações possíveis são

$$\mathcal{U} = T^{ij}_{;k} e_i \otimes e_j \otimes e^k = T^i_{j;k} e_i \otimes e^j \otimes e^k = T_{ij;k} e^i \otimes e^j \otimes e^k.$$

Retornando rapidamente aos tensores de posto zero, ou seja, a escalares, como estes não fazem uso de vetores de base para a sua representação, resulta que a derivada covariante de $\psi(q^1, \dots, q^n)$ é idêntica à derivação direta, ou seja,

$$\nabla \psi = \psi_{;j} e^j = \frac{\partial \psi}{\partial q^j} e^j = \psi_{,j} e^j.$$

Para a física em espaços curvos, em particular para a relatividade geral e gravitação, a derivada covariante possui uma importância ímpar, pois

...(a) substituição consistente das derivadas parciais regulares por derivadas covariantes carrega as leis da física (na forma de componentes) a partir do espaço-tempo plano para o espaço-tempo (Riemanniano) curvo da relatividade geral. De fato, esta substituição pode ser tomada como uma expressão matemática do Princípio da Equivalência de Einstein.

Finalmente, um teorema importante para a derivada covariante do tensor de métrica é apresentado a seguir.

Teorema 9.1 (Teorema de Ricci). *A derivada covariante do tensor de métrica é identicamente nula.*

Demonstração. Este teorema será inicialmente demonstrado para a forma covariante do tensor de métrica. De acordo com (9.50c),

$$g_{ij;k} = g_{ij,k} - \Gamma^{\ell}_{ik} g_{\ell j} - \Gamma^{\ell}_{jk} g_{i\ell}.$$

Então, introduzindo (9.46) na expressão acima e usando também (9.47c,d), resulta

$$\begin{aligned} g_{ij;k} &= g_{ij,k} - [ik, j] - [jk, i] \\ &= g_{ij,k} - \frac{1}{2} g_{ji,k} - \frac{1}{2} g_{ij,k} - \frac{1}{2} g_{kj,i} + \frac{1}{2} g_{jk,i} + \frac{1}{2} g_{ik,j} - \frac{1}{2} g_{ki,j} = 0. \end{aligned}$$

Empregando as relações entre as formas contravariante e mista do tensor de métrica, é fácil demonstrar que este teorema é válido também para estas formas. \square

Em particular, o teorema de Ricci implica na seguinte expressão para a derivada usual do tensor de métrica,

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \equiv g_{ij,k} = [ik, j] + [jk, i], \quad (9.51a)$$

a qual, com o uso de $g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$, resulta em

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial q^k} \equiv g^{ij}_{,k} = -g^{i\ell} \Gamma^j_{\ell k} - g^{j\ell} \Gamma^i_{\ell k}. \quad (9.51b)$$

9.12 OPERADORES VETORIAIS NA FORMA TENSORIAL

Na seção 1.4 foram derivadas as expressões para os operadores diferenciais gradiente, rotacional, laplaciano e rotacional, válidas para sistemas de coordenadas ortogonais no espaço Euclidiano \mathbb{E}^3 . Em seguida, na seção 1.5 foram derivadas expressões explícitas destes operadores para alguns exemplos de sistemas de coordenadas ortogonais. Nesta seção, os mesmos operadores diferenciais serão novamente obtidos, porém agora para *qualquer* sistema de coordenadas, inclusive para aqueles que não são ortogonais.

Para fins de posterior comparação entre as expressões que serão derivadas nesta seção com as apresentadas na seção 1.5, deve-se lembrar que as bases aqui adotadas, $\{e_i\}$ e $\{e^i\}$ não são necessariamente normalizadas. Contudo, é sempre possível normalizar a primeira base, lembrando da definição (1.11) para os fatores de escala h_i . Desta forma, pode-se adotar a base $\{\hat{e}_i\} = \{e_i/h_i\}$ para fins de comparação. Nesta base, o vetor v , por exemplo, pode ser escrito $v = v^i e_i = \hat{v}^i \hat{e}_i$, sendo $\hat{v}^i \stackrel{\text{NS}}{=} h_i v^i$, o que possibilita uma comparação direta entre os resultados. Adicionalmente, deve-se lembrar também que para um sistema ortogonal as representações do tensor de métrica são $g_{ij} = h_i^2 \delta_{ij}$ e $g^{ij} = h_i^{-2} \delta^{ij}$, enquanto que o seu determinante é $g = \det([g_{ij}]) = h_1^2 h_2^2 h_3^2$.

9.12.1 GRADIENTE DE CAMPO ESCALAR

Como o campo escalar $\psi(q^1, \dots, q^n)$ não depende dos vetores de base, o seu gradiente é obtido simplesmente pela aplicação do operador vetorial ∇ covariante,

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial q^i} e^i = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial \psi}{\partial q^i} \hat{e}_i. \tag{9.52}$$

Pode-se ver que neste caso simples a expressão resultante coincide com (1.23).

9.12.2 DIVERGENTE DE CAMPO VETORIAL

Dado o campo vetorial $v = v(q^1, \dots, q^n)$, o seu divergente consiste na aplicação sobre o mesmo de um operador diferencial de tal forma que resulte um campo escalar. O divergente de um campo vetorial generalizado é representado pela operação $\text{div} v$.

Para resultar um tensor de posto zero, esta operação pode ser concebida como composta por duas etapas: inicialmente, o operador ∇ é multiplicado diretamente ao vetor v , resultando em um tensor de posto dois. Em seguida, é realizada uma contração entre os índices do tensor, tendo como resultado um escalar. A primeira etapa destas operações pode ser representada por

$$v = v^i e_i \implies \nabla v = v^i_{;j} e_i \otimes e^j,$$

onde foi introduzida a derivada covariante (9.48). Portanto, o divergente de v é dado pela contração

$$\text{div} v \doteq v^i_{;i} = \frac{\partial v^i}{\partial q^i} + \Gamma^i_{ki} v^k.$$

Usando agora a expressão (9.46) para os símbolos de Christoffel, observa-se que

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} g^{i\ell} \left(\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^\ell} \right) = \frac{1}{2} g^{i\ell} \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial q^k}, \tag{9.53}$$

uma vez que os últimos dois termos se cancelam.

Por outro lado, o termo restante em (9.53) pode ser simplificado fazendo uso do seguinte lema.

Lema. Sendo as matrizes $a(q^1, \dots, q^n) = [a_{ij}]$ e $b(q^1, \dots, q^n) = [b^{ij}]$ tais que $b = a^{-1}$, e sendo $a = \det(a)$, então

$$\frac{\partial a}{\partial q^k} = a b^{ji} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k}. \tag{9.54}$$

Demonstração. Para se demonstrar este lema no R^3 , emprega-se novamente a identidade matricial (9.33a), a qual pode ser escrita como

$$a = \frac{1}{6} \epsilon^{ijk} \epsilon^{abc} a_{ai} a_{bj} a_{ck}.$$

Por outro lado, o elementos da matriz b podem ser expressos em termos dos elementos de a como

$$b^{ij} = \frac{1}{2a} \epsilon^{ikl} \epsilon^{jmn} a_{mk} a_{nl}.$$

Então, derivando a em relação a q^ℓ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial q^\ell} &= \frac{1}{6} \epsilon^{ijk} \epsilon^{abc} \left(a_{bj} a_{ck} \frac{\partial a_{ai}}{\partial q^\ell} + a_{ai} a_{ck} \frac{\partial a_{bj}}{\partial q^\ell} + a_{ai} a_{bj} \frac{\partial a_{ck}}{\partial q^\ell} \right) \\ &= \frac{1}{3} a \left(b^{ia} \frac{\partial a_{ai}}{\partial q^\ell} + b^{jb} \frac{\partial a_{bj}}{\partial q^\ell} + b^{kc} \frac{\partial a_{ck}}{\partial q^\ell} \right) = ab^{ji} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^\ell}, \end{aligned}$$

resultando assim (9.54).

Embora o lema tenha sido demonstrado para uma matriz 3×3 , pode-se mostrar que este resultado independe da ordem da matriz. \square

Aplicando então a identidade (9.54) para o tensor de métrica e lembrando que o mesmo é simétrico, obtém-se

$$\frac{\partial g}{\partial q^k} = g g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}. \quad (9.55)$$

Usando então este resultado em (9.53), conclui-se que

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial q^k} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial q^k} = \frac{\partial}{\partial q^k} \ln(\sqrt{|g|}).$$

Portanto, o divergente de um campo vetorial pode ser sempre expresso em termos do determinante do tensor de métrica como

$$\operatorname{div} v = v^i_{;i} = \frac{\partial v^i}{\partial q^i} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial q^i} v^i = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{|g|} v^i) \quad (9.56a)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\sqrt{|g|} \hat{h}_i^i \right). \quad (9.56b)$$

9.12.3 LAPLACIANO DE UM CAMPO ESCALAR

Dado o campo escalar $\psi = \psi(q^1, \dots, q^n)$, o seu laplaciano pode ser obtido a partir da operação usual, $\nabla^2 \psi = \operatorname{div}(\nabla \psi)$. Inicialmente, percebe-se em (9.52) que $(\nabla \psi)_i = \partial \psi / \partial q^i$. Então, com o emprego do tensor de métrica, pode-se escrever

$$v^i = (\nabla \psi)^i = g^{ij} \frac{\partial \psi}{\partial q^j}.$$

Introduzindo este resultado em (9.56), obtém-se

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial \psi}{\partial q^j} \right). \quad (9.57)$$

Exercício 9.15. Mostre que (9.57) se reduz a (1.25) no caso particular de um sistema de coordenadas ortogonal.

Demonstração. Para um sistema ortogonal, $g^{ij} = h_i^{-2} \delta^{ij}$ e $\sqrt{|g|} = h_1 h_2 h_3$. Então, em (9.57),

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial \psi}{\partial q^i} \right),$$

o qual é exatamente a expressão (1.25). \square

9.12.4 ROTACIONAL DE UM CAMPO VETORIAL

A definição usual do rotacional de um campo vetorial está associada ao conceito do produto vetorial entre dois vetores. Contudo, é interessante obter-se neste momento uma expressão mais geral, a qual pode ser facilmente estendida a espaços vetoriais de dimensões mais altas, uma vez que o produto vetorial somente existe no \mathbb{E}^3 .

Considerando inicialmente o produto vetorial entre os vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^3$, pode-se escrever

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_i b_j \mathbf{e}^i \times \mathbf{e}^j = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \epsilon^{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k,$$

onde foi empregado (9.35b). Definindo então o tensor antissimétrico

$$M_{ij} = \epsilon_{ijk} \epsilon^{klm} a_\ell b_m = a_i b_j - a_j b_i \iff \epsilon^{ijk} a_i b_j = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} M_{ij},$$

observa-se que é possível escrever

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \frac{1}{2\sqrt{|g|}} \epsilon^{ijk} M_{ij} \mathbf{e}_k.$$

Ou seja, é sempre possível escrever os componentes do produto vetorial em termos do tensor antissimétrico M_{ij} . É vantajoso definir este tensor, uma vez que se pode então considerar a sua extensão para espaços vetoriais de dimensão mais alta.

Focando agora no rotacional de um campo $\mathbf{v}(q^1, \dots, q^n)$, identificado por $\text{rot} \mathbf{v}$, este será definido pela generalização do produto vetorial do operador ∇ com \mathbf{v} . Escreve-se então

$$\text{rot} \mathbf{v} = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \epsilon^{ijk} v_{ij} \mathbf{e}_k,$$

onde foram empregados (9.49b) e (9.35b). Define-se então o tensor antissimétrico

$$(\text{rot} \mathbf{v})_{ij} = \epsilon_{ijk} \epsilon^{klm} v_{\ell,m} = v_{i,j} - v_{j,i} \iff \epsilon^{ijk} v_{i,j} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} (\text{rot} \mathbf{v})_{ij},$$

o qual está relacionado ao i -ésimo componente do rotacional de \mathbf{v} . Contudo, de (9.49), observa-se que $(\text{rot} \mathbf{v})_{ij} = \epsilon_{ijk} \epsilon^{klm} (v_{\ell,m} - \Gamma_{\ell m}^n v_n) = \epsilon_{ijk} \epsilon^{klm} v_{\ell,m} = v_{i,j} - v_{j,i}$, devido à simetria de Γ_{ij}^k . Portanto,

$$(\text{rot} \mathbf{v})_{ij} = \epsilon_{ijm} \epsilon^{klm} v_{k,\ell} = v_{i,j} - v_{j,i}.$$

Então, para reproduzir o resultado (1.26) conhecido mas, ao mesmo tempo, generalizando para sistemas não ortogonais e, eventualmente, para espaços de dimensões superiores, o campo vetorial $\mathbf{w} = \text{rot} \mathbf{v}$, desenvolvido como $\mathbf{w} = w^i \mathbf{e}_i$, tem seus componentes dados por

$$w^i = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \epsilon^{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial q^j}. \tag{9.58}$$

9.13 DIFERENCIAÇÃO ABSOLUTA E CURVAS GEODÉSICAS

Nesta seção serão introduzidos alguns conceitos mais avançados da análise tensorial, com frequência empregados em trabalhos envolvendo geometria diferencial e relatividade geral.

9.13.1 DIFERENCIAÇÃO ABSOLUTA OU INTRÍNSECA

Uma aplicação importante das derivadas covariantes consiste na derivação de um campo tensorial ao longo de uma curva no R^n , a qual é parametrizada por $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, ou seja, em termos de um parâmetro t .

Considera-se inicialmente o campo vetorial $\mathbf{v} = \mathbf{v}(q^1, \dots, q^n)$. Escrevendo $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$, a derivada absoluta deste campo em relação a t fica

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv^i}{dt} \mathbf{e}_i + v^i \frac{d\mathbf{e}_i}{dt}$$

$$= \frac{dv^i}{dt} e_i + v^i \frac{dq^j}{dt} \frac{\partial e_i}{\partial q^j}.$$

Introduzindo o símbolo de Christoffel (9.44), resulta

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} v^j \frac{dq^k}{dt} \right) e_i \doteq \frac{\delta v^i}{\delta t} e_i.$$

O termo entre parênteses é denominada a **derivada absoluta** (ou **intrínseca**) $\delta v^i / \delta t$ do componente v^i ao longo da curva $r(t)$. Esta derivada é usualmente representada, de acordo com (9.48), como

$$\frac{\delta v^i}{\delta t} \equiv \frac{dv^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} v^j \frac{dq^k}{dt} = v^i_{;j} \frac{dq^j}{dt}. \quad (9.59)$$

Ou seja, pode-se escrever

$$\frac{dv}{dt} = v^i_{;j} \frac{dq^j}{dt} e_i.$$

De forma semelhante, as seguintes expressões para as derivadas absolutas das diferentes formas de um tensor de posto dois podem ser deduzidas,

$$\begin{aligned} \frac{\delta T^{ij}}{\delta t} &= T^{ij}_{;k} \frac{dq^k}{dt} \\ \frac{\delta T_{ij}}{\delta t} &= T_{ij;k} \frac{dq^k}{dt} \\ \frac{\delta T^i_j}{\delta t} &= T^i_{j;k} \frac{dq^k}{dt}. \end{aligned}$$

As expressões acima atribuem significado à derivação absoluta deste tensor como um todo,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\delta T^{ij}}{\delta t} e_i \otimes e_j = \frac{\delta T_{ij}}{\delta t} e^i \otimes e^j = \dots$$

Finalmente, se $\psi(q^1, \dots, q^n)$ é um campo escalar, então sua derivada intrínseca é simplesmente a derivada ordinária,

$$\frac{\delta \psi}{\delta t} = \frac{d\psi}{dt}. \quad (9.60)$$

As derivadas absoluta e covariante obedecem as seguintes propriedades da diferenciação:

1. A derivada de uma soma de tensores é a soma das derivadas.
2. A derivada do produto (externo ou interno) dos tensores \mathcal{T} e \mathcal{U} é igual a $\mathcal{U} \delta \mathcal{T} + \mathcal{T} \delta \mathcal{U}$, onde o símbolo “ δ ” representa qualquer tipo de diferenciação.
3. O fato da derivada covariante do tensor de métrica ser nula implica em que as operações de elevação ou rebaixamento de índices e de diferenciação podem ser permutadas.

9.13.2 CURVAS GEODÉSICAS

Um exemplo importante de aplicação da derivada absoluta de um campo em uma determinada geometria do espaço são as *curvas geodésicas*. De maneira simples, uma geodésica é aquela curva no espaço cujos vetores tangentes permanecem paralelos ou invariantes ao longo da mesma. Em um espaço Riemanniano, a geodésica também é a curva de menor distância entre dois pontos no espaço.

Em um espaço Euclideano, a geodésica entre dois pontos é, simplesmente, a linha reta entre os mesmos. Porém em um espaço curvo, a geodésica é realmente uma curva. Uma maneira alternativa de se definir uma geodésica está relacionada com topologia e geometria diferencial. Nesta abordagem, a geodésica é a curva de menor distância entre dois pontos *sobre uma superfície curva* no R^n . Esta interpretação é particularmente importante para a teoria da relatividade geral, uma vez que a geometria do espaço-tempo, ou seja, a sua métrica, é determinada pela presença de objetos maciços. Quando uma partícula-teste está nas vizinhanças destes objetos, a sua trajetória entre dois pontos quaisquer neste espaço-tempo segue ao longo de uma geodésica.

É conveniente neste ponto introduzir a definição formal de uma curva no \mathbb{E}^3 . A definição abaixo é ilustrada pela figura 9.9.

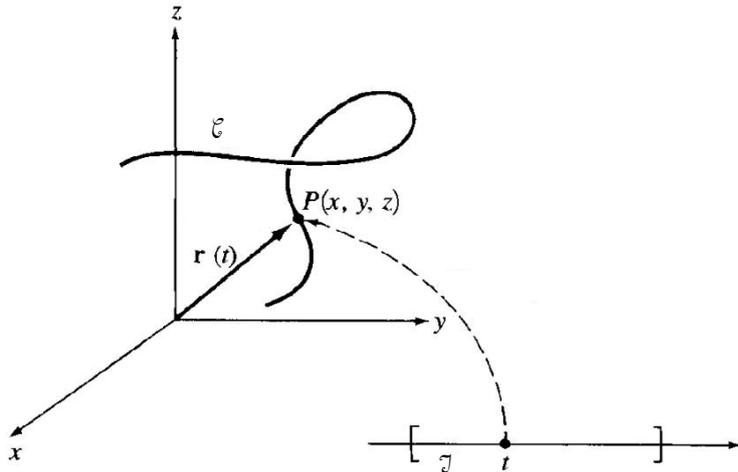


Figura 9.9: Uma curva \mathcal{C} no espaço \mathbb{E}^3 , definida como o mapeamento de um intervalo de variação do parâmetro $t \in \mathcal{J}$ ($\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$) sobre uma coleção de pontos $P \subset \mathbb{E}^3$, determinados pela variação do vetor posição $\mathbf{r}(t)$.

Definição 9.10 (Curva no espaço \mathbb{E}^3). Seja $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ um conjunto de valores do parâmetro $t \in \mathcal{J}$ e o espaço Euclidiano \mathbb{E}^3 . Uma curva \mathcal{C} no espaço \mathbb{E}^3 é o mapeamento contínuo

$$\mathcal{J} \mapsto \mathbb{E}^3$$

das funções $x(t), y(t), z(t) \in \mathcal{C}^2(\mathcal{J})$ sobre \mathbb{E}^3 tal que para cada $t \in \mathcal{J}$ existe um e somente um vetor posição $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \in \mathbb{E}^3$, determinado por

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Para seguir a discussão, já é possível e conveniente abandonar a restrição do \mathbb{E}^3 e considerar um espaço Riemanniano qualquer de dimensão n , denotado por R^n . Uma curva no R^n é definida, de forma análoga à definição 9.10, como o conjunto de pontos $\mathcal{C} \subset R^n$ determinados pelo mapeamento da varredura do parâmetro $t \in \mathbb{R}$ em imagens das funções $q^1(t), q^2(t), \dots, q^n(t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, as quais irão formar as n -uplas ordenadas $(q^1(t), q^2(t), \dots, q^n(t)) \in \mathcal{C}$.

Para se determinar então a equação de uma geodésica no R^n , emprega-se com frequência o cálculo variacional. Neste caso, a geodésica é definida como a curva cujo comprimento possui um valor estacionário com respeito a variações arbitrariamente pequenas, mas com pontos extremos mantidos fixos.

Seja então $d\ell$ o comprimento elementar de arco correspondente ao deslocamento infinitesimal $d\ell$ e t_i e t_f os valores extremos do parâmetro t que determina a curva \mathcal{C} entre os pontos A e B , contidos no R^n . Então, as coordenadas dos pontos ao longo de \mathcal{C} serão dadas pelas fórmulas

$$q^i = q^i(t), \quad t_i \leq t \leq t_f, \quad q^i(t) \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

sendo que $\{q^i(t_i)\} \mapsto A$ e $\{q^i(t_f)\} \mapsto B$. Portanto, a extensão da curva \mathcal{C} , denotada por ℓ , será dada por

$$\ell = \int_{A, \mathcal{C}}^B d\ell.$$

De acordo com o princípio variacional acima, a curva geodésica entre A e B será determinada então por

$$\delta \ell = \delta \int_{A, \mathcal{C}}^B d\ell = 0.$$

Mas como o deslocamento $d\ell$ ocorre ao longo da curva \mathcal{C} , o princípio variacional acima pode ser escrito também em termos de uma integração no parâmetro t . Em um espaço Riemanniano, o elemento de arco $d\ell$ é dado por $d\ell^2 = g_{ij} dq^i dq^j$. Então, ao longo de uma variação infinitesimal ao longo de \mathcal{C} , entre os valores t e $t + dt$ do parâmetro livre, a coordenada $q^i(t)$ varia por

$$dq^i = \frac{dq^i}{dt} dt,$$

ou seja, $d\ell$ varia por

$$d\ell^2 = g_{ij} \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt} dt^2 \implies d\ell = \sqrt{g_{ij} \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt}} dt.$$

Portanto, o princípio variacional pode ser expresso como

$$\delta \ell = \delta \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{g_{ij} \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt}} dt = 0.$$

O integrando acima é um funcional das quantidades $\{q^i(t)\}$ (através do tensor de métrica) e $\{dq^i/dt\}$, as quais serão determinadas a partir do princípio variacional. Denota-se este funcional por

$$\mathcal{L} \left[\{q^i\}, \left\{ \frac{dq^i}{dt} \right\} \right] = \sqrt{g_{ij} \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt}}.$$

Portanto, aplicando a variação $\delta \ell$, mantendo os extremos fixos, resulta

$$\delta \ell = \delta \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L} dt = \int_{t_i}^{t_f} \delta \mathcal{L} dt = \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dq^i}{dt} \right)} \delta \left(\frac{dq^i}{dt} \right) \right] dt.$$

Como é usual, a variação δq^i corresponde à diferença entre duas formas funcionais para $q^i(t)$ que são arbitrariamente próximas entre si. Denotando estas formas funcionais como $q_{(1)}^i(t)$ e $q_{(2)}^i(t)$, escreve-se $\delta q^i = q_{(2)}^i - q_{(1)}^i$ e, portanto,

$$\frac{d}{dt} (\delta q^i) = \frac{d}{dt} [q_{(2)}^i - q_{(1)}^i] = \frac{d}{dt} q_{(2)}^i - \frac{d}{dt} q_{(1)}^i = \delta \left(\frac{dq^i}{dt} \right).$$

Então, integrando por partes o segundo termo, resulta

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dq^i}{dt} \right)} \delta \left(\frac{dq^i}{dt} \right) dt &= \int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dq^i}{dt} \right)} \frac{d}{dt} (\delta q^i) dt \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dq^i}{dt} \right)} \delta q^i \Big|_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dq^i}{dt} \right)} \right] \delta q^i dt = - \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dq^i}{dt} \right)} \right] \delta q^i dt, \end{aligned}$$

uma vez que os extremos são fixos. Portanto, o princípio variacional sustenta que

$$\delta \ell = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dq^i}{dt} \right)} \right] \right\} \delta q^i dt = 0.$$

Para uma variação arbitrária das coordenadas q^i , a identidade acima somente pode ser satisfeita se forem obedecidas as *equações de Euler-Lagrange*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dq^i}{dt} \right)} \right] = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Até este ponto, o parâmetro t foi considerado arbitrário. Porém, como se deseja relacionar a geodésica como a curva de menor extensão entre A e B , o parâmetro t será escolhido como o comprimento de arco ℓ ao longo da mesma, ou seja,

$$t = \ell, \quad \frac{dq^i}{dt} = \frac{dq^i}{d\ell} \implies \mathcal{L} = \frac{d\ell}{d\ell} = 1.$$

Calculando então as derivadas acima,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i} \sqrt{g_{jk} \frac{dq^j}{d\ell} \frac{dq^k}{d\ell}} = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \frac{dq^j}{d\ell} \frac{dq^k}{d\ell} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \frac{dq^j}{d\ell} \frac{dq^k}{d\ell}.$$

Já a outra derivada fica

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dq^i}{d\ell} \right)} = \frac{\partial}{\partial \left(\frac{dq^i}{d\ell} \right)} \sqrt{g_{jk} \frac{dq^j}{d\ell} \frac{dq^k}{d\ell}} = \frac{1}{2} g_{jk} \left(\delta_i^j \frac{dq^k}{d\ell} + \frac{dq^j}{d\ell} \delta_i^k \right) = g_{ij} \frac{dq^j}{d\ell}.$$

Para este termo é ainda necessário calcular a derivada absoluta

$$\frac{d}{dl} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dq^i}{dl} \right)} \right] = \frac{d}{dl} \left(g_{ij} \frac{dq^j}{dl} \right) = \frac{dg_{ij}}{dl} \frac{dq^j}{dl} + g_{ij} \frac{d^2 q^j}{dl^2} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \frac{dq^k}{dl} \frac{dq^j}{dl} + g_{ij} \frac{d^2 q^j}{dl^2}.$$

Portanto, as equações de Euler-Lagrange tornam-se

$$g_{ij} \frac{d^2 q^j}{dl^2} + \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \right) \frac{dq^j}{dl} \frac{dq^k}{dl} = 0.$$

Nota-se que esta equação pode ainda ser escrita como

$$g_{ij} \frac{d^2 q^j}{dl^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \right) \frac{dq^j}{dl} \frac{dq^k}{dl} = 0,$$

o que, de acordo com (9.47d), resulta em

$$g_{ij} \frac{d^2 q^j}{dl^2} + [jk, i] \frac{dq^j}{dl} \frac{dq^k}{dl} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (9.61a)$$

as quais são as equações da curva geodésica. Finalmente, usando (9.47c), pode-se escrever estas equações também como

$$\frac{d^2 q^i}{dl^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dq^j}{dl} \frac{dq^k}{dl} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (9.61b)$$

Exercício 9.16. Encontre as equações da curva geodésica em coordenadas cilíndricas.

Solução. Usando os resultados para os símbolos de Christoffel obtidos no exercício 9.12, as equações (9.61b) são escritas para $n = 3$ e $\{q^i\} \mapsto \{\rho, \phi, z\}$. Os pontos extremos entre $\ell_i = 0$ e ℓ_f são dados respectivamente pelas coordenadas $\{\rho, \phi, z\}_i$ e $\{\rho, \phi, z\}_f$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \rho}{dl^2} + \Gamma^1_{22} \left(\frac{d\phi}{dl} \right)^2 = 0 & \implies \frac{d^2 \rho}{dl^2} - \rho \left(\frac{d\phi}{dl} \right)^2 = 0 \\ \frac{d^2 \phi}{dl^2} + 2\Gamma^2_{12} \frac{d\rho}{dl} \frac{d\phi}{dl} = 0 & \implies \frac{d^2 \phi}{dl^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d\rho}{dl} \frac{d\phi}{dl} = 0 \\ \frac{d^2 z}{dl^2} = 0 & \implies z(\ell) = z_i + (z_f - z_i) \frac{\ell}{\ell_f}. \end{aligned}$$

A equação para $z(\ell)$ é trivial, porém, as equações diferenciais para $\rho(t)$ e $\phi(t)$ são acopladas e não lineares, portanto muito difíceis de serem resolvidas analiticamente para dois pontos arbitrários no \mathbb{E}^3 .

Uma solução simples do sistema acima ocorre quando $\phi = \text{cte.}$, ou seja, entre dois pontos no mesmo azimute. Neste caso, o sistema se reduz a

$$\frac{d^2 \rho}{dl^2} = 0 \implies \rho(\ell) = \rho_i + (\rho_f - \rho_i) \frac{\ell}{\ell_f},$$

ou seja,

$$\frac{z - z_i}{z_f - z_i} = \frac{\rho - \rho_i}{\rho_f - \rho_i} \implies z = z_i + \frac{z_f - z_i}{\rho_f - \rho_i} (\rho - \rho_i),$$

a qual é uma linha reta no plano $\phi = \text{cte.}$ conectando os pontos extremos.

As soluções das equações (9.61) sempre fornecem a curva de menor extensão entre dois pontos para qualquer sistema de coordenadas no R^n . Contudo, em certas situações, é interessante encontrar a geodésica quando a curva \mathcal{C} possui vínculos; por exemplo, a curva de menor extensão entre os pontos A e B que se encontram sobre a superfície $F(\{q^i\}) = 0$, tal que todos os pontos ao longo de \mathcal{C} também estão sobre essa superfície. Em um espaço R^n , a equação de superfície define uma *variedade*¹⁶ em R^{n-1} . Por exemplo, a geodésica sobre uma esfera de raio a .

Neste caso, a norma da variedade R^{n-1} irá determinar um tensor de métrica representado por uma matriz $(n-1) \times (n-1)$ e as equações (9.61) ainda poderão ser aplicadas, com uma definição conveniente das coordenadas q^i sobre essa variedade.

¹⁶**Variedade** (*manifold*) é uma generalização do conceito de superfície em geometria diferencial e topologia. Uma variedade de dimensão n é um espaço topológico que nas vizinhanças de cada ponto assemelha-se a um espaço E^n . Curvas e circunferências são variedades no R^1 ; esferas e cilindros são variedades no R^2 .

Exercício 9.17. Encontre a curva geodésica conectando dois pontos sobre a superfície de um cilindro $\rho = \text{cte.}$ e que está vinculada a esta superfície.

Solução. Neste caso, as equações obtidas no exercício 9.16 não podem ser aplicadas, pois mesmo que os pontos extremos $\{\rho, \phi, z\}_i$ e $\{\rho, \phi, z\}_f$ encontrem-se sobre a superfície, a curva de menor extensão não está necessariamente restrita à mesma. Isto pode ser verificado colocando $d\rho/d\ell = 0$ nas equações. Observa-se que a única solução compatível neste caso é $\rho = \text{cte.}$ e $\phi = \text{cte.}$, o que corresponde a uma reta vertical sobre a superfície do cilindro. Esta é a única solução possível para as equações obtidas.

Sobre a superfície $\rho = \text{cte.}$ pode ser realizada a parametrização $\phi = \phi(\ell)$, sendo que então o elemento de arco é dado por $d\ell^2 = ds^2 + dz^2$, sendo $ds = \rho d\phi$. Neste caso, $n = 2$, o tensor de métrica é simplesmente $g_{ij} = \delta_{ij}$ e os símbolos de Christoffel são nulos. Assim, as equações geodésicas ficam dadas simplesmente por

$$\begin{aligned} \frac{d^2 s}{d\ell^2} = 0 & \implies s(\ell) = \rho\phi(\ell) \implies \phi(\ell) = \phi_i + (\phi_f - \phi_i) \frac{\ell}{\ell_f} \\ \frac{d^2 z}{d\ell^2} = 0 & \implies z(\ell) = z_i + (z_f - z_i) \frac{\ell}{\ell_f}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{z - z_i}{z_f - z_i} = \frac{\phi - \phi_i}{\phi_f - \phi_i} \implies z = z_i + (z_f - z_i) \frac{\phi - \phi_i}{\phi_f - \phi_i},$$

a qual descreve uma hélice sobre a superfície cilíndrica.

Exercício 9.18. Usando o resultado do exercício 9.17, calcule a extensão da geodésica que une os pontos Cartesianos $P = (x, y, z) = (1, 0, 0)$ e $Q = (0, 1, 1)$ sobre a superfície cilíndrica de raio $\rho = 1$.

Solução. De acordo com o exemplo, a curva geodésica que une os pontos P e Q é

$$z = \frac{2}{\pi}\phi \implies dz = \frac{2}{\pi}d\phi.$$

Então, o elemento de arco é

$$d\ell^2 = d\phi^2 + \frac{4}{\pi^2}d\phi^2$$

e a extensão da geodésica é dada por

$$\ell_{P \rightarrow Q} = \int_P^Q d\ell = \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} \int_0^{\pi/2} d\phi = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}} = 1,86209588912 \dots$$

Para comparar, a linha reta unindo P a Q possui uma extensão igual a $\sqrt{3} = 1,73205080757 \dots < \ell_{P \rightarrow Q}$.

Exercício 9.19. Mostre que sobre a superfície de uma esfera todas as curvas meridianas são geodésicas. Mostre também que nenhuma outra circunferência é uma geodésica.

Solução. Dada uma esfera de raio a , esta se trata de uma variedade no R^2 com $\{q^1, q^2\} \mapsto \{\theta, \phi\}$. O elemento de arco sobre esta superfície é $d\ell^2 = a^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$. Então, o tensor de métrica e os símbolos de Christoffel (9.46b) são dados por

$$g = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \implies \Gamma^\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}, \Gamma^\phi = \begin{pmatrix} 0 & \cotan \theta \\ \cotan \theta & 0 \end{pmatrix},$$

e as equações da geodésica (9.61b) se tornam

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \theta}{d\ell^2} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{d\ell} \right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2 \phi}{d\ell^2} + 2 \cotan \theta \frac{d\theta}{d\ell} \frac{d\phi}{d\ell} &= 0. \end{aligned}$$

Embora estas equações sejam não lineares e acopladas, pode-se usar a simetria de uma esfera para se realizar a demonstração. Assumindo que $\phi = \text{cte.}$, as equações acima reduzem-se a

$$\frac{d^2\theta}{d\ell^2} = 0 \implies \theta(\ell) = \theta_i + (\theta_f - \theta_i) \frac{\ell}{\ell_f},$$

ou seja, qualquer meridiano da esfera é uma curva geodésica.

Tomando agora $\theta_i \neq \pi/2$ e assumindo circunferências $\theta = \text{cte.}$, as equações reduzem-se a

$$\frac{d\phi}{d\ell} = 0 \implies \phi = \text{cte.},$$

o que contradiz a suposição inicial. Por outro lado, se $\theta = \pi/2 = \text{cte.}$, as equações são consistentes com $d\phi/d\ell = \text{cte.} \neq 0$. Portanto, exceto as meridianas e a linha do equador, nenhuma outra circunferência sobre a esfera é uma geodésica.

9.13.3 TRANSPORTE PARALELO DE CAMPOS VETORIAIS

Em um espaço Euclideano, um campo vetorial $v(r)$ é denominado um **campo de vetores paralelos** se os seus componentes $\{v^i\}$ são constantes, ou seja, se $\partial v^i/\partial q^j = 0$. De forma equivalente, supondo que o vetor v possui os seus componentes $\{v^i\}$ definidos em um ponto P do \mathbb{E}^n , localizado pela n -upla (q^1, q^2, \dots, q^n) , se o ponto P é deslocado por dr , localizando então no ponto $r + dr$, o campo vetorial nesta nova posição é dado por $v + dv$. Diz-se então que o campo vetorial v sofre um **transporte paralelo** se $\partial v^i/\partial q^j = 0$.

Um exemplo deste tipo de campo vetorial é fornecido pelo campo elétrico no interior de um capacitor de placas paralelas. Nesta região o campo E é uniforme, isto é, em todos os pontos este possui os mesmos módulo, direção e sentido. Outro exemplo seria o campo de aceleração gravitacional nas proximidades da superfície terrestre.

Deseja-se agora generalizar este conceito para qualquer campo vetorial em um espaço Riemanniano. Será verificado também que a definição realizada abaixo para um campo de vetores paralelos em um espaço curvo qualquer também pode ser empregada para definir as curvas geodésicas neste espaço.

Nas seções 9.11 e 9.13.1 mostrou-se que, dados os componentes $\{v^i(q^1, \dots, q^n)\}$, sua derivada coordenada usual $\partial v^i/\partial q^j$ não é um tensor, mas sim a sua derivada covariante ou a sua derivada absoluta ao longo de uma curva $q^i = q^i(t)$. Portanto, para manter a característica tensorial, o transporte paralelo de um campo vetorial em um espaço Riemanniano deve ser definido de forma distinta do que é feito no espaço Euclideano.

Considera-se então um espaço Riemanniano R^n , no qual uma curva \mathcal{C} é parametrizada por

$$\mathcal{C} \mapsto q^i = q^i(t), \quad (t_i \leq t \leq t_f, i = 1, 2, \dots, n),$$

e um campo vetorial $v = v(q^1, \dots, q^n)$ em R^n . Diz-se que v é um **campo de vetores paralelos a \mathcal{C}** , ou, de forma equivalente, que v é **transportado paralelamente ao longo de \mathcal{C}** se a derivada intrínseca de v ao longo desta curva é nula, isto é, se

$$\frac{dv}{dt} = 0. \tag{9.62}$$

O comportamento de um campo vetorial transportado paralelo a uma curva \mathcal{C} no \mathbb{E}^3 está representado na figura 9.10. No ponto P , pode-se observar também uma representação para as curvas coordenadas $\{q^1, q^2, q^3\}$ neste ponto.

De forma equivalente, pode-se definir através de (9.62) um campo vetorial transportado paralelamente ao longo de uma curva \mathcal{C} que se estende sobre uma variedade no R^{n-1} . Para exemplificar, com esta última definição é possível discutir campos de vetores paralelos sobre uma superfície curva no R^3 .

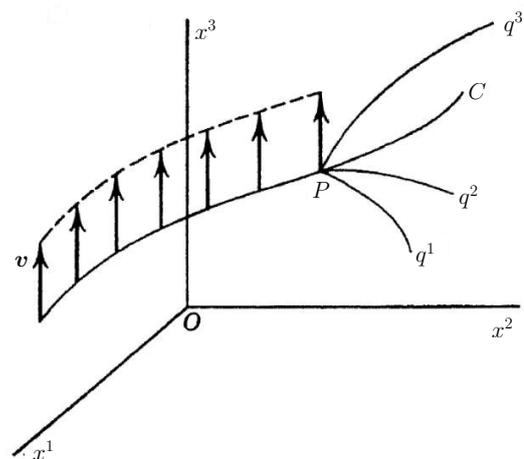


Figura 9.10: Campo vetorial v transportado paralelamente à curva \mathcal{C} em \mathbb{E}^3 . No ponto P , estão também representadas as curvas coordenadas $\{q^1, q^2, q^3\}$.

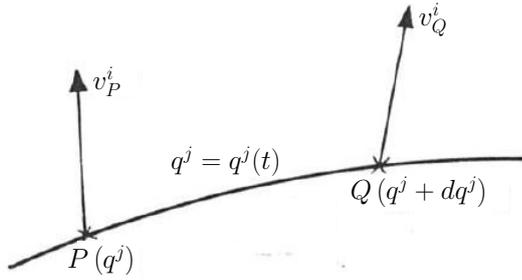


Figura 9.11: Componente v^i transportada paralelamente ao longo da curva \mathcal{C} . Quando a coordenada $q^j(t)$ varia entre os pontos P e Q , a componente varia de v_P^i a v_Q^i .

Segue então de (9.59) que a componente contravariante v^i de v satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\delta v^i}{\delta t} = \frac{dv^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} v^j \frac{dq^k}{dt} = 0. \quad (9.63a)$$

Ou seja, ao longo de \mathcal{C} , a componente v^i varia por

$$\frac{dv^i}{dt} = -\Gamma^i_{jk} v^j \frac{dq^k}{dt} \text{ ou } dv^i = -\Gamma^i_{jk} v^j dq^k, \quad (9.63b)$$

quando o parâmetro varia de t a $t + dt$, sendo que v^j e Γ^i_{jk} são calculados nas coordenadas correspondentes a t . A quantidade dv^i em (9.63b) mostra que à medida que o campo v é transportado paralelamente ao longo da curva \mathcal{C} , sua i -ésima componente varia por dv^i quando as coordenadas variam de q^j para $q^j + dq^j$. Este comportamento está il-

ustrado na figura 9.11 e mostra como o transporte paralelo de um campo vetorial em um espaço curvo difere de um espaço plano. Neste último caso, os símbolos de Christoffel são todos nulos e, portanto, $dv^i = 0$, ou seja, as componentes de v não se alteram ao longo da curva \mathcal{C} .

Da mesma forma, a componente covariante v_i de v satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\delta v_i}{\delta t} = \frac{dv_i}{dt} - \Gamma^j_{ik} v_j \frac{dq^k}{dt} = 0, \quad (9.64a)$$

ou seja, a i -ésima componente covariante de v varia por

$$dv_i = \Gamma^j_{ik} v_j dq^k \quad (9.64b)$$

ao longo de \mathcal{C} quando a j -ésima coordenada varia de q^j a $q^j + dq^j$.

Dados agora dois campos vetoriais v e w que são transportados paralelamente ao longo da mesma curva \mathcal{C} , pode-se mostrar facilmente que tanto os módulos dos mesmos quanto o ângulo θ entre v e w permanecem constantes durante os seus transportes. Isto ocorre porque, em primeiro lugar, de acordo com (9.60) a derivada intrínseca de um escalar é igual a sua derivada ordinária. Em segundo lugar, de acordo com o teorema de Ricci (teorema 9.1), a derivada covariante do tensor de métrica é nula; conseqüentemente, sua derivada absoluta também o será. Assim, dado o invariante

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = vw \cos \theta = v^i w_i = g_{ij} v^i w^j,$$

resulta

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \frac{\delta}{\delta t} (g_{ij} v^i w^j) = g_{ij} \frac{\delta v^i}{\delta t} w^j + g_{ij} v^i \frac{\delta w^j}{\delta t} = 0, \quad (9.65a)$$

de acordo com (9.63a). Portanto, se $w = v$, então

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{dv^2}{dt} = 2v \frac{dv}{dt} = 0, \quad (9.65b)$$

ou seja, o módulo de v permanece constante ao longo do transporte paralelo do vetor. O mesmo acontecendo com o módulo de w . Por conseqüência, o ângulo θ entre os mesmos,

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \frac{d}{dt} (vw \cos \theta) = vw \frac{d}{dt} \cos \theta = -vw \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad (9.65c)$$

também permanece constante ao longo de \mathcal{C} , mesmo para $\theta \neq 0$ ou $\theta \neq \pi$.

Considera-se agora o parâmetro t como sendo novamente o comprimento de arco ℓ ao longo da curva \mathcal{C} . O elemento de arco é dado sempre por $d\ell = \sqrt{g_{ij} dq^i dq^j}$, de tal forma que, de acordo com a discussão realizada na seção 9.13.2,

$$d\ell = \sqrt{g_{ij} \frac{dq^i}{d\ell} \frac{dq^j}{d\ell}} d\ell = \mathcal{L} d\ell \implies \mathcal{L} = \sqrt{g_{ij} \frac{dq^i}{d\ell} \frac{dq^j}{d\ell}} = 1 \implies g_{ij} \frac{dq^i}{d\ell} \frac{dq^j}{d\ell} = 1,$$

ao longo de \mathcal{C} . Como $\lambda \doteq dr/d\ell$ é um vetor, este resultado mostra que o mesmo é unitário. Porém, o interessante aqui é que, em primeiro lugar, λ é o vetor tangente a \mathcal{C} em todos os pontos. Em

segundo lugar, e o mais importante, de acordo com (9.63), a derivada intrínseca da i -ésima componente de λ quando este é transportado paralelamente ao longo de \mathcal{C} , resulta ser

$$\frac{\delta \lambda^i}{\delta \ell} = \frac{d\lambda^i}{d\ell} + \Gamma^i_{jk} \lambda^j \frac{dq^k}{d\ell} = \frac{d^2 q^i}{d\ell^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dq^j}{d\ell} \frac{dq^k}{d\ell} = 0,$$

a qual é justamente a equação diferencial satisfeita pela curva geodésica, (equação 9.61b).

Portanto, um vetor que é tangente a uma curva geodésica em um determinado ponto e que é transportado paralelamente ao longo desta curva permanecerá sempre tangente à geodésica. Segue disto que, dado um campo vetorial que é sempre tangente a alguma variedade no R^n , as curvas geodésicas sobre esta variedade podem sempre ser estabelecidas de forma inequívoca a partir deste campo vetorial.

Um exemplo de um campo vetorial deste tipo vem de uma superfície esférica no \mathbb{E}^3 . Sobre esta superfície, os vetores unitários \hat{e}_θ são sempre tangentes à mesma. Estes vetores unitários são sempre transportados paralelamente ao longo de uma curva meridiana, a qual é, de acordo com o exemplo 9.19, uma curva geodésica sobre a superfície esférica.

Dados agora os vetores λ e w que são transportados paralelamente ao longo de uma curva geodésica, sendo que λ é o campo vetorial tangente à mesma, os resultados (9.65b e c) mostram que não somente o módulo de w permanece constante ao longo da geodésica, mas que também o seu ângulo com a curva não varia durante o seu transporte.

A figura 9.12 ilustra o transporte paralelo de um vetor ao longo de geodésicas de um espaço R^2 esférico. Partindo do ponto A e seguindo até N ao longo de um meridiano (curva geodésica), o vetor permanece tangencial à curva ao longo do trajeto. Em seguida, o mesmo vetor é transportado paralelamente ao longo de outra geodésica conectando os pontos N e B . Finalmente, o vetor é paralelamente transportado de B a A ao longo da terceira geodésica (linha do equador). Ao retornar ao ponto de partida, o vetor, embora tenha sido paralelamente transportado ao longo de um caminho fechado composto somente por curvas geodésicas, resulta com uma orientação espacial que difere de sua orientação original pelo ângulo α ilustrado na figura.

Este tipo de resultado é típico de espaços denominados *curvos* e não ocorre em espaços planos, como o \mathbb{E}^n . Qualquer vetor transportado paralelamente em um espaço Euclidiano ao longo de suas geodésicas (linhas retas), sempre irá retornar ao ponto de partida com a mesma orientação inicial. Uma medida da curvatura de um espaço é fornecida pelo tensor de Riemann, discutido na próxima seção.

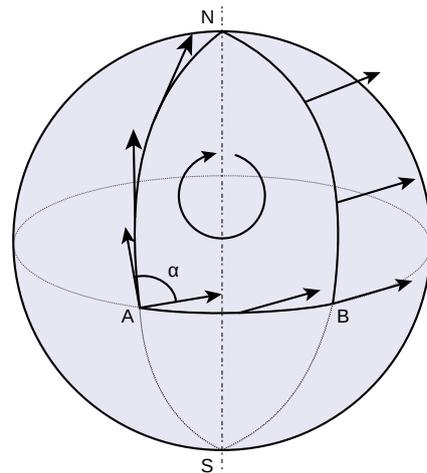


Figura 9.12: Transporte paralelo de um vetor ao longo de um caminho fechado $\mathcal{C} : (A \rightarrow N \rightarrow B \rightarrow A)$ sobre uma esfera. Ao retornar ao ponto A , o vetor teve sua orientação original alterada pelo ângulo α .

9.14 OS TENSORES DE RIEMANN, RICCI E EINSTEIN

O cálculo do *tensor de curvatura de Riemann-Christoffel* para uma determinada métrica no R^n consiste no método mais prático para determinar se o espaço descrito pela métrica é plano ou curvo e, neste último caso, para então determinar a sua curvatura. Em outras palavras, o tensor de Riemann mede o quanto o tensor de métrica é ou não localmente isométrico à métrica Euclidiana.

Nesta seção será realizada uma dedução do tensor de Riemann e discutidas algumas de suas propriedades. Em seguida, serão obtidos dois outros tensores relacionados, os *tensores de Ricci* e de *Einstein*, este último sendo fundamental na teoria da relatividade generalizada.

9.14.1 O TENSOR DE CURVATURA DE RIEMANN-CHRISTOFFEL

Uma quantidade fundamental para a geometria de espaços curvos e para a dinâmica de corpos materiais em tais espaços, é o *tensor de curvatura de Riemann-Christoffel*. Este tensor está relacionado com as diferenças obtidas nos componentes de tensores quando o deslocamento paralelo dos mesmos entre dois pontos do espaço R^n ocorre por dois caminhos distintos.

Matematicamente, esta diferença está relacionada com a ausência de simetria na ordem das derivadas mistas em espaços curvos. Em análise de funções matemáticas, se $u = u(x, y)$ é uma função das variáveis x e y e pertence à classe $C^2(\mathbb{R})$, i. e., é duas vezes diferenciável em qualquer uma das variáveis, então $\partial^2 u / \partial x \partial y = \partial^2 u / \partial y \partial x$. Contudo, em espaços curvos, a diferenciação covariante dos componentes de um tensor não apresenta, em geral, a mesma propriedade.

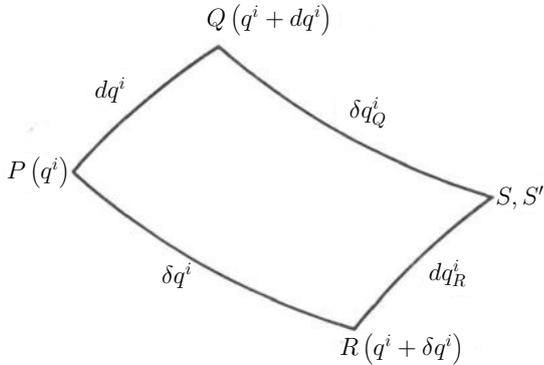


Figura 9.13: Os deslocamentos paralelos do segmento δq^i ao longo de \overline{PQ} e de dq^i ao longo de \overline{PR} resultam no mesmo ponto final $S' = S$.

Para tanto, considera-se um ponto inicial P contido no R^n , ilustrado na figura 9.13. A partir deste ponto, consideram-se dois deslocamentos distintos, ambos partindo de $P(\{q^i\})$ e chegando, respectivamente, a $Q(\{q^i + dq^i\})$ e $R(\{q^i + \delta q^i\})$, sendo que estes não são necessariamente infinitesimais. O símbolo “ d ” indica aqui um determinado incremento na coordenada, ao passo que “ δ ” representa um outro incremento.

Imagina-se agora que o segmento \overline{PR} é deslocado de tal forma que quando o ponto P coincidir com Q , o ponto R coincidirá com o ponto S na figura 9.13. Isto equivale a definir o segmento \overline{QS} , composto pelo mapeamento unívoco de cada ponto ao longo de \overline{PR} sendo transladado pela quantidade “ d ”, resultando nos mapeamentos $P \rightarrow Q : q^i \rightarrow q^i + dq^i$, $P \rightarrow R : q^i \rightarrow q^i + \delta q^i$, e então

$$R \rightarrow S : q^i + \delta q^i \rightarrow q^i + \delta q^i + dq^i_R,$$

sendo

$$S : q^i + \delta q^i + dq^i_R = q^i + \delta q^i + d(q^i + \delta q^i) = q^i + \delta q^i + dq^i + d(\delta q^i)$$

as coordenadas do ponto S . Como $\delta r = \delta q^i e_i$ é um vetor no R^n e como os deslocamentos ocorrem ao longo de geodésicas, então, se os deslocamentos “ d ” e “ δ ” tornarem-se elementares, o transporte paralelo de δq^i resulta em

$$d(\delta q^i) = -\Gamma^i_{jk(P)} \delta q^j dq^k,$$

de acordo com (9.63b), onde $\Gamma^i_{jk(P)}$ indica que os símbolos de Christoffel devem ser calculados no ponto P . De forma similar, se o segmento \overline{PQ} é deslocado de tal forma que quando P coincide com R , o ponto Q coincide com o ponto S' , resultando assim no segmento $\overline{RS'}$. Desta maneira, cada ponto ao longo de \overline{PQ} é transladado pela quantidade “ δ ”, resultando no mapeamento

$$Q \rightarrow S' : q^i + dq^i \rightarrow q^i + dq^i + \delta q^i_Q.$$

Assim, as coordenadas do ponto S' são

$$S' : q^i + dq^i + \delta q^i_Q = q^i + dq^i + \delta(q^i + dq^i) = q^i + dq^i + \delta q^i + \delta(dq^i).$$

Portanto, se o deslocamento “ δ ” for elementar, a variação na coordenada dq^i também é dada por (9.63b), resultando em

$$\delta(dq^i) = -\Gamma^i_{jk(P)} dq^j \delta q^k.$$

Comparando as expressões para $d(\delta q^i)$ e $\delta(dq^i)$, observa-se que uma simples troca de índices mudos, aliada à simetria de Γ^i_{jk} frente à permutação dos índices j e k , mostra que ambas as expressões são idênticas, resultando, portanto, que $S' = S$. Ou seja, as curvas elementares $\mathcal{C}_1 \equiv \mathcal{C}_{P \rightarrow R \rightarrow S}$ e $\mathcal{C}_2 \equiv \mathcal{C}_{P \rightarrow Q \rightarrow S'}$, partindo do mesmo ponto inicial P , conduzem ao mesmo ponto final, desde que estas sejam realizadas ao longo de curvas geodésicas no R^n .

Considera-se agora o transporte paralelo de um campo vetorial $v = v^i e_i$ ao longo de ambos os caminhos \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 da figura 9.13. Este transporte está ilustrado agora na figura 9.14. O campo vetorial é suposto estar definido no ponto P , onde suas componentes possuem valores iguais a $\{v_P^i\}$, e estes componentes são transportados até o ponto S ao longo de dois caminhos distintos:

\mathcal{C}_1 : Realiza-se o transporte paralelo de v de P até Q com um deslocamento $\{dq^i\}$, resultando então nas componentes $\{v_Q^i\}$. Em seguida, realiza-se o transporte paralelo do mesmo vetor de Q até S com o deslocamento $\{\delta q^i\}$, resultando nos valores finais $\{v_{SQ}^i\}$ para as componentes de v .

\mathcal{C}_2 : Desloca-se v paralelamente de P a R por $\{dq^i\}$. Em seguida, desloca-se o mesmo de R a S por $\{\delta q^i\}$, resultando as componentes $\{v_{SR}^i\}$.

As componentes $\{v_{SQ}^i\}$ e $\{v_{SR}^i\}$ são idênticas ou distintas entre si? Em geral, para um espaço curvo, $v_{SQ}^i \neq v_{SR}^i$ e a razão para tanto pode ser entendida calculando as variações da i -ésima componente de v ao longo dos dois caminhos distintos.

Ao longo do transporte paralelo $P \rightarrow Q$, a referida componente resulta com o valor

$$v_Q^i = v_P^i + dv_P^i,$$

onde dv_P^i é a variação de v^i no referido deslocamento. De acordo com (9.63b), para um deslocamento suficientemente pequeno,

$$dv_P^i = -\Gamma^i_{jk(P)} v_P^j dq^k,$$

onde $\{\Gamma^i_{jk(P)}\}$ são os valores assumidos pelos símbolos de Christoffel no ponto P . Ou seja,

$$v_Q^i = v_P^i - \Gamma^i_{jk(P)} v_P^j dq^k.$$

A componente v_Q^i é agora transportada ao ponto S , assumindo o valor v_{SQ}^i no mesmo, a qual é dada por

$$v_{SQ}^i = v_Q^i + \delta v_Q^i = v_Q^i - \Gamma^i_{jk(Q)} v_Q^j \delta q^k,$$

onde agora $\{\Gamma^i_{jk(Q)}\}$ são os símbolos de Christoffel em Q . Como estes são funções das coordenadas $\{q^i\}$, pode-se escrever, para dq^i pequeno o suficiente,

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(\{q^i\}) \implies \Gamma^i_{jk(Q)} = \Gamma^i_{jk(P)} + \left. \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial q^\ell} \right|_P dq^\ell \equiv \Gamma^i_{jk(P)} + \Gamma^i_{jk,\ell} dq^\ell,$$

sendo $\Gamma^i_{jk,\ell} \equiv \partial \Gamma^i_{jk} / \partial q^\ell$ em P . Então, a componente v_{SQ}^i acima pode ser escrita como

$$\begin{aligned} v_{SQ}^i &= v_P^i - \Gamma^i_{jk(P)} v_P^j dq^k - \left(\Gamma^i_{jk(P)} + \Gamma^i_{jk,\ell} dq^\ell \right) \left(v_P^j - \Gamma^j_{mn(P)} v_P^m dq^n \right) \delta q^k \\ &= v_P^i - \Gamma^i_{jk(P)} v_P^j dq^k - \Gamma^i_{jk(P)} v_P^j \delta q^k - \Gamma^i_{jk,\ell} v_P^j \delta q^k dq^\ell + \Gamma^i_{jk(P)} \Gamma^j_{mn(P)} v_P^m \delta q^k dq^n + \mathcal{O} \left[(dq^i)^3 \right] \\ &= v^i - \Gamma^i_{jk} v^j dq^k - \Gamma^i_{jk} v^j \delta q^k - \Gamma^i_{jk,\ell} v^j \delta q^k dq^\ell + \Gamma^i_{jk} \Gamma^j_{mn} v^m \delta q^k dq^n + \mathcal{O} \left[(dq^i)^3 \right]. \end{aligned}$$

Na última expressão, o índice “ P ” foi removido porque todas as quantidades no lado direito são calculadas neste ponto.

Realizando agora o mesmo procedimento para o transporte $P \rightarrow R \rightarrow S$, resulta

$$v_{SR}^i = v^i - \Gamma^i_{jk} v^j \delta q^k - \Gamma^i_{jk} v^j dq^k - \Gamma^i_{jk,\ell} v^j \delta q^k \delta q^\ell + \Gamma^i_{jk} \Gamma^j_{mn} v^m \delta q^k \delta q^n + \mathcal{O} \left[(dq^i)^3 \right].$$

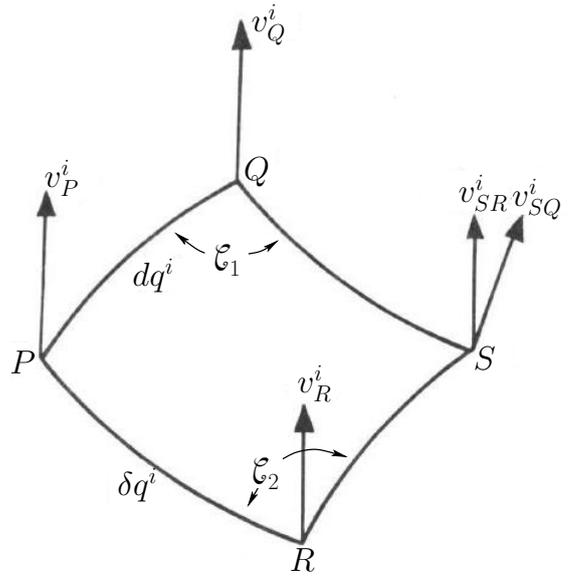


Figura 9.14: O deslocamento paralelo do vetor v do ponto P ao ponto S ao longo de dois caminhos distintos resulta em diferentes valores para a componente v^i .

Portanto, a diferença na i -ésima componente de v no ponto S , para dois caminhos arbitrários e distintos partindo de P , é igual a

$$v_{SR}^i - v_{SQ}^i = \Gamma_{jk,\ell}^i v^j \delta q^k dq^\ell - \Gamma_{jk,\ell}^i v^j dq^k \delta q^\ell + \Gamma_{jk}^i \Gamma_{mn}^j v^m dq^k \delta q^n - \Gamma_{jk}^i \Gamma_{mn}^j v^m \delta q^k dq^n,$$

onde foram mantidos somente os termos até segunda ordem em dq^i .

A diferença acima pode ser escrita como

$$v_{SR}^i - v_{SQ}^i = R^i_{jkl} v^j dq^k \delta q^\ell, \quad (9.66a)$$

onde

$$R^i_{jkl} \equiv \Gamma_{jk,\ell}^i - \Gamma_{j\ell,k}^i + \Gamma_{m\ell}^i \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{mk}^i \Gamma_{j\ell}^m \quad (9.66b)$$

é o **tensor de curvatura de Riemann-Christoffel misto** ou **do segundo tipo**. Como v^i , dq^k e δq^ℓ em (9.66a) são todos componentes de vetores, pela regra do quociente as quantidades $\{R^i_{jkl}\}$ realmente compõe um tensor de posto quatro. Uma outra maneira de se escrever (9.66b) é na forma de determinantes,

$$R^i_{jkl} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial q^\ell} & \frac{\partial}{\partial q^k} \\ \Gamma_{j\ell}^i & \Gamma_{jk}^i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma_{m\ell}^i & \Gamma_{mk}^i \\ \Gamma_{j\ell}^m & \Gamma_{jk}^m \end{vmatrix}. \quad (9.66c)$$

Observa-se que o tensor de curvatura independe do campo v ; este depende somente do tensor de métrica e de suas derivadas, ou seja, é uma função somente da geometria do espaço curvo. Para que o valor de v_S^i independa do caminho adotado a partir de P , é necessário que $R^i_{jkl} = 0$, uma vez que o campo v é arbitrário. Em um espaço Euclidiano, sempre é possível encontrar um sistema de coordenadas (Cartesiano, por exemplo), onde $\Gamma_{jk}^i = 0$. Neste sistema de coordenadas, o tensor de curvatura é identicamente nulo. Pode-se mostrar que o mesmo ocorre para qualquer outro sistema de coordenadas neste espaço.

Através do tensor de curvatura, é possível atribuir significado ao termo espaço *plano* ou *Euclidiano*, como sendo aquele onde o tensor de Riemann-Christoffel é identicamente nulo em todos os pontos deste espaço. Se esta condição não for satisfeita, o espaço é *curvo* ou *não Euclidiano*. Este resultado é de fundamental importância para a dinâmica de sistemas físicos em espaços curvos, descritos por teorias tais como a Relatividade Geral.

Se ao invés das componentes contravariantes de v fossem realizados os transportes paralelos das componentes covariantes $\{v_i\}$ entre os pontos P e S da figura 9.14, pode-se mostrar, com o emprego de (9.64b), que a diferença entre os valores de v_{iS} obtidos nos dois caminhos distintos seria igual a

$$v_{iSR} - v_{iSQ} = -R^j_{ilk} v_j dq^k \delta q^\ell.$$

Estes resultados mostram que o deslocamento paralelo de um vetor e, em geral, de um tensor, entre dois pontos de um espaço Riemanniano depende do caminho escolhido. Segue disto que se um tensor é deslocado paralelamente ao longo de uma curva fechada formada por geodésicas, ao retornar ao ponto de partida os seus componentes não irão possuir em geral os mesmos valores que possuíam originalmente. Este fato, característico de espaços curvos, tem consequências importantes para a física acerca do conceito de campos conservativos em espaços Riemannianos curvos.

Um tensor associado a R^i_{jkl} é

$$R_{ijkl} = g_{im} R^m_{jkl}, \quad (9.67a)$$

denominado o **tensor de curvatura de Riemann-Christoffel covariante** ou **do primeiro tipo**. Não é difícil verificar que este tensor pode ser escrito como

$$R_{ijkl} = [jk, i]_{,\ell} - [j\ell, i]_{,k} + [ik, m] \Gamma_{j\ell}^m - [i\ell, m] \Gamma_{jk}^m \quad (9.67b)$$

$$= [jk, i]_{,\ell} - [j\ell, i]_{,k} + g^{mn} ([ik, m] [j\ell, n] - [i\ell, m] [jk, n]) \quad (9.67c)$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial q^\ell} & \frac{\partial}{\partial q^k} \\ [j\ell, i] & [jk, i] \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} [ik, m] & [i\ell, m] \\ \Gamma_{jk}^m & \Gamma_{j\ell}^m \end{vmatrix} \quad (9.67d)$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial q^\ell} & \frac{\partial}{\partial q^k} \\ [j\ell, i] & [jk, i] \end{vmatrix} + g^{mn} \begin{vmatrix} [ik, m] & [i\ell, m] \\ [jk, n] & [j\ell, n] \end{vmatrix}. \quad (9.67e)$$

PROPRIEDADES DO TENSOR DE CURVATURA

Pode-se ver, tanto a partir da definição de R^i_{jkl} em (9.66) quanto a partir da definição de R_{ijkl} em (9.67) que as seguintes propriedades de simetria são satisfeitas:

$$R^i_{jkl} = -R^i_{jlk} \qquad R_{ijkl} = -R_{ijlk} \qquad (9.68a)$$

$$R^i_{jkl} = -R^j_{ikl} \qquad R_{ijkl} = -R_{jikl} \qquad (9.68b)$$

$$R^i_{jkl} = R^k_{lij} \qquad R_{ijkl} = R_{klij}. \qquad (9.68c)$$

Uma consequência digna de nota da antissimetria do tensor de curvatura frente aos pares iniciais e finais de índices, propriedades (9.68a,b), é:

$$(NS) : R^i_{ikl} = R^i_{jkk} = R_{iikl} = R_{ijkk} = 0. \qquad (9.68d)$$

A seguinte propriedade cíclica também é válida: *se qualquer índice do tensor é mantido fixo enquanto os três índices restantes são permutados de forma cíclica e os componentes resultantes são adicionados, o resultado é nulo.* Por exemplo,

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0. \qquad (9.68e)$$

As propriedades de simetria (9.68a-e) reduzem substancialmente o número total de componentes independentes do tensor de curvatura. Em um espaço R^n , este tensor possui, ao todo, n^4 componentes. Porém, com as simetrias conhecidas, o número de componentes independentes é de “somente” $n^2(n^2 - 1)/12$, ao todo. A tabela a seguir ilustra estes números para algumas dimensionalidades:

Dimensionalidade do espaço	1	2	3	4	5
Número total de componentes	1	16	81	256	625
Número de componentes independentes	0	1	6	20	50

O fato de que o número de componentes independentes em um espaço unidimensional é nulo implica em que estes espaços são necessariamente Euclidianos. Isto pode ser entendido pelo fato de que o elemento de arco em um espaço 1D geral deve necessariamente ser do tipo

$$d\ell^2 = f(q) dq^2,$$

o qual pode ser transformado a um espaço Cartesiano do tipo $d\ell^2 = dq'^2$ através da definição $dq' = \sqrt{f(q)}dq$.

Exercício 9.20. Encontre os componentes do tensor de curvatura no espaço de dimensão 2 sobre a superfície de uma esfera de raio a .

Solução. Dados os símbolos de Christoffel para esta variedade, obtidos no exemplo 9.19, pode-se escrever os símbolos de Christoffel do primeiro tipo e o tensor de métrica na forma matricial como

$$[i] = \begin{pmatrix} [11, i] & [12, i] \\ [21, i] & [22, i] \end{pmatrix} \implies [\theta] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a^2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \text{ e } [\phi] = \begin{pmatrix} 0 & a^2 \sin \theta \cos \theta \\ a^2 \sin \theta \cos \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Então, como há somente 1 componente independente no tensor de curvatura, e como

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-2} & 0 \\ 0 & a^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix},$$

pode-se tomar o componente $R_{1221} = R_{\theta\phi\phi\theta}$ como este componente e calcular a partir de (9.67c),

$$\begin{aligned} R_{1221} &= [\phi\phi, \theta]_{,\theta} + g^{\phi\phi} [\theta\phi, \phi] [\phi\theta, \phi] \\ &= a^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Os outros componentes de R_{ijkl} são dados por (9.68a-e). Ou seja, este de fato é um espaço curvo.

9.14.2 O TENSOR DE RICCI E O ESCALAR DE CURVATURA

Dois outros tensores importantes para a dinâmica de partículas e campos em espaços curvos são os tensores de Ricci e de Einstein. Ambos são obtidos a partir do tensor de curvatura de Riemann-Christoffel.

O **tensor de Ricci** é obtido a partir da contração de R^i_{jkl} dado por (9.66b,c) como

$$R_{ij} = R^k_{ijk} = g^{pk} R_{pijk} \quad (9.69a)$$

$$= \Gamma^k_{ij,k} - \Gamma^k_{ik,j} + \Gamma^\ell_{ij} \Gamma^k_{k\ell} - \Gamma^\ell_{ik} \Gamma^k_{j\ell} \quad (9.69b)$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial q^j} \right] + \left[\begin{array}{cc} \Gamma^k_{k\ell} & \Gamma^k_{j\ell} \\ \Gamma^\ell_{ik} & \Gamma^\ell_{ij} \end{array} \right]. \quad (9.69c)$$

Uma outra expressão importante para o tensor de Ricci pode ser obtida a partir da identidade (9.55). Empregando (9.51a) e (9.47c), esta pode ser escrita como

$$\frac{\partial g}{\partial q^i} = gg^{mn} ([mi, n] + [ni, m]) = 2g\Gamma^m_{im} \implies \Gamma^m_{im} = \frac{\partial}{\partial q^i} \ln \sqrt{|g|}.$$

Portanto, (9.69b) pode ser expresso em termos de g como

$$R_{ij} = \Gamma^k_{ij,k} - \Gamma^\ell_{ik} \Gamma^k_{j\ell} - \frac{\partial^2 \ln \sqrt{|g|}}{\partial q^i \partial q^j} + \Gamma^\ell_{ij} \frac{\partial}{\partial q^\ell} \ln \sqrt{|g|}. \quad (9.69d)$$

A partir da expressão (9.69d), pode-se ver facilmente que o tensor de Ricci é simétrico, $R_{ij} = R_{ji}$. Devido a isso, o número de componentes independentes de R_{ij} é igual a $n(n+1)/2$. Em uma variedade no R^4 , se a métrica for determinada pelas equações diferenciais parciais $R_{ij} = 0$, isto resultará em um sistema de 10 equações, as quais foram adotadas por Einstein como as equações do campo gravitacional no espaço livre, na teoria da relatividade geral.

Uma contração adicional de índices sobre o tensor de Ricci (9.69) determina o **escalar de curvatura ou de Ricci**,

$$R = R^i_i = g^{ij} R_{ij} = g^{ij} g^{pk} R_{pijk}. \quad (9.70)$$

O escalar de Ricci será sempre não nulo em um espaço curvo. Esta quantidade irá aparecer logo abaixo, nas equações de Einstein para o campo gravitacional.

9.14.3 O TENSOR DE EINSTEIN E AS EQUAÇÕES DO CAMPO GRAVITACIONAL

As *equações de campo de Einstein*, ou simplesmente as *equações de Einstein* consistem em um conjunto de equações diferenciais que descrevem a interação gravitacional entre corpos físicos como o resultado da curvatura do espaço-tempo causada pela presença de matéria e energia. As equações de Einstein formam a parte quantitativa da *teoria da relatividade generalizada* e foram publicados pela primeira vez em 1915,¹⁷ sendo divulgadas novamente em 1916, quando então a teoria completa foi publicada.¹⁸

Para se obter o tensor derivado por Einstein na relatividade geral, pode-se partir da identidade de Bianchi

$$R_{ijkl;m} + R_{ijlm;k} + R_{ijmk;\ell} = 0,$$

a qual pode ser obtida a partir de (9.68e). Multiplicando esta identidade por $g^{i\ell} g^{jk}$, usando a antissimetria do tensor de curvatura e lembrando que a derivada covariante do tensor de métrica é nula, obtém-se

$$g^{jk} R^{\ell}_{jkl;m} - g^{jk} R^{\ell}_{jml;k} - g^{i\ell} R^k_{imk;\ell} = 0,$$

¹⁷Die Feldgleichungen der Gravitation (As equações de campo da gravitação). *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, p. 844–847, 25 de novembro de 1915. Acesso: <https://www.biodiversitylibrary.org/item/92536#page/920/mode/lup> (versão em inglês: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol6-trans/129>).

¹⁸Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie (Os fundamentos da teoria da relatividade geral). *Annalen der Physik*, v. 354, n. 7, p. 769–822, 11 de maio de 1916. Acesso doi: [10.1002/andp.19163540702](https://doi.org/10.1002/andp.19163540702) (versão em inglês: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol6-trans/158>).

ou seja,

$$g^{jk}R_{jk;m} - g^{jk}R_{jm;k} - g^{i\ell}R_{im;\ell} = 0,$$

que também pode ser escrita como

$$R^k_{k;m} - 2R^k_{m;k} = 0.$$

Dado agora o escalar de Ricci (9.70),

$$R \equiv g^{ij}R_{ij},$$

observa-se que $R_{,k} = g^{ij}R_{ij;k} = R^j_{j;k}$; ou seja, a identidade anterior pode ser reescrita como

$$R_{,m} - 2R^k_{m;k} = 0,$$

ou como

$$\left(R^k_m - \frac{1}{2}\delta^k_m R \right)_{;k} = 0.$$

A condição suficiente para o cumprimento da identidade acima forma o sistema de equações

$$G^i_j = 0, \tag{9.71a}$$

sendo que o tensor

$$G^i_j \doteq R^i_j - \frac{1}{2}\delta^i_j R \tag{9.71b}$$

é o **tensor de Einstein**.

Em um espaço de dimensão 4, as 10 equações diferenciais parciais em (9.71a) são as **equações de Einstein para o espaço livre**, isto é, as equações de campo da teoria geral da relatividade para um corpo massivo no vácuo (sem a presença de outros campos) e sem a constante cosmológica.

9.15 APLICAÇÕES FÍSICAS

Algumas aplicações físicas do conteúdo desenvolvido neste capítulo serão apresentadas agora.

9.15.1 A TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ, O ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI E A FORMULAÇÃO COVARIANTE DO ELETROMAGNETISMO CLÁSSICO

Será realizada aqui uma breve abordagem da transformação de Lorentz e do espaço vetorial de Minkowski, dentro do contexto da relatividade restrita. Não se pretende realizar aqui uma introdução à teoria da relatividade, mas sim somente apresentar um conjunto de expressões relevantes para a próxima seção, onde será discutida a formulação covariante do eletromagnetismo clássico.

As origens da teoria da relatividade restrita estão relacionadas com o desenvolvimento do eletromagnetismo clássico, ocorrido principalmente durante a segunda metade do século XIX, com os trabalhos de James Clerk Maxwell (1831 – 1879). Pode-se afirmar que a unificação da eletricidade e do magnetismo nas equações de Maxwell forçou o desenvolvimento da relatividade.

Os fundamentos da teoria foram construídos a partir das contribuições pioneiras de diversos matemáticos e físicos, destacando-se em particular o trabalho do físico holandês Hendrik Antoon Lorentz (1853 – 1928), a partir de 1890, com contribuições importantes fornecidas pelo físico-matemático Jules Henri Poincaré (1854 – 1912). Contudo, foi o físico alemão Albert Einstein (1879 – 1955) quem contribuiu com as ideias cruciais, principalmente com a publicação em 1905 do artigo:

*Zur Elektrodynamik bewegter Körper.*¹⁹ *Annalen der Physik*, v. 322, n. 10, pp. 891 – 921, Juni 1905.

¹⁹Acerca da eletrodinâmica dos corpos em movimento. Acesso livre no doi: [10.1002/andp.19053221004](https://doi.org/10.1002/andp.19053221004). Versão em inglês: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol2-trans/154>.

Na física moderna, a teoria da relatividade restrita é suposta válida para todas as formas de interações, exceto em fenômenos gravitacionais de larga escala, onde é necessário empregar a teoria generalizada da relatividade. Em particular, fenômenos atômicos, nucleares e subatômicos não podem ser adequadamente descritos sem o uso da relatividade.

9.15.1.1 A SITUAÇÃO ANTERIOR A 1900. A TRANSFORMAÇÃO DE GALILEU

Nos 40 anos anteriores a 1900, a eletricidade, o magnetismo e a óptica tiveram as suas relações mutuas devidamente estabelecidas na teoria eletromagnética descrita pelas equações de Maxwell.

Uma vez que a experiência prévia com movimento ondulatório sempre envolvera um meio necessário para a propagação da onda, era natural assumir que a luz também necessitaria de um meio, denominado *éter*, o qual permearia todo o espaço, possuía densidade desprezível e interagía fracamente com a matéria ordinária. Este meio existia somente para permitir a propagação de ondas eletromagnéticas.

A hipótese do éter colocava os fenômenos eletromagnéticos em um plano conceitual distinto da mecânica Newtoniana. Nesta, os conceitos de espaço e tempo são separáveis, sendo o tempo uma quantidade absoluta, independente do referencial e que era determinado por um referencial absoluto, possivelmente em repouso em relação às estrelas distantes. Paralelamente, as leis da mecânica são as mesmas em diferentes referenciais inerciais, isto é, elas são invariantes frente a uma **transformação de Galileu**.

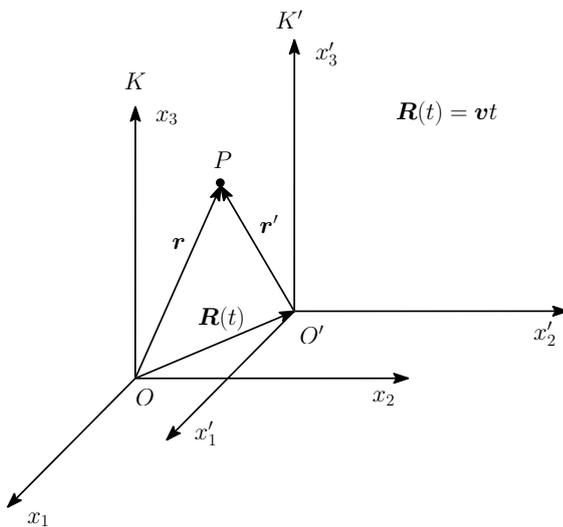


Figura 9.15: Transformação entre os referenciais inerciais K e K' .

Para enfatizar a distinção entre a mecânica Newtoniana e o eletromagnetismo, será considerada brevemente a aplicação da relatividade Galileana a cada uma destas teorias. A figura 9.15 mostra dois sistemas de referência K e K' , com coordenadas $(x_1, x_2, x_3; t)$ e $(x'_1, x'_2, x'_3; t')$, respectivamente, sendo que o referencial K' se move em relação a K com velocidade relativa v (constante) e as origens de ambos os referenciais concordam no instante $t = t' = 0$. Na transformação de Galileu, as coordenadas espaciais e o tempo em cada referencial estão relacionados de acordo com

$$\begin{cases} \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t \\ t' = t \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}t' \\ t = t'. \end{cases} \quad (9.72)$$

A lei de transformação (9.72) descreve uma simples translação, para um determinado instante de tempo. No contexto desta transformação, o sistema físico é descrito matematicamente no espaço Euclidiano \mathbb{E}^3 . Verifica-se facilmente que nesta transformação os elementos de comprimento nos

dois referenciais são os mesmos,

$$d\ell^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2,$$

pois ambos são mensurados no mesmo instante de tempo, o qual não influi na métrica do espaço. Ou seja, o tensor de métrica é, simplesmente, $g_{ij} = \delta_{ij}$, como se espera em um espaço Euclidiano com coordenadas Cartesianas.

A lei de transformação (9.72) é perfeitamente adequada para a mecânica Newtoniana, pois as suas leis físicas são invariantes frente a uma transformação de Galileu. Para exemplificar, considera-se um sistema de partículas interagindo por meio de potenciais centrais. Supondo que a equação de movimento da i -ésima partícula no sistema K' seja

$$\frac{d\mathbf{p}'_i}{dt'} = -\nabla'_i \left[\sum_{j \neq i} V_{ij}(|\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j|) \right],$$

a qual é a expressão para a segunda lei de Newton, sendo $\mathbf{r}'_i(t')$ e $\mathbf{p}'_i(t')$ respectivamente a posição e o momentum linear instantâneos da i -ésima partícula medidos no referencial K' . Nesta

expressão também está indicado o potencial de interação entre as partículas i e j , $V_{ij}(|\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j|)$, o qual origina-se da força central conservativa de interação entre as mesmas. Estas interações podem ser gravitacionais ou elétricas, por exemplo. Finalmente, $\nabla'_i = \hat{x}_j \partial / \partial x'_{ij}$ é o operador gradiente, calculado no referencial K' , sendo $x'_{ij}(t')$ a j -ésima coordenada da posição instantânea $\mathbf{r}'_i(t')$.

Denominando $\mathbf{u}(t) = d\mathbf{r}/dt$ a velocidade instantânea de uma partícula, mensurada por um determinado referencial, a lei de transformação (9.72) implica na seguinte fórmula de transformação para as velocidades medidas em cada referencial,

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{v} \iff \mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}. \quad (9.73)$$

Como a métrica do espaço é a mesma em ambos os referenciais, então $\nabla'_i = \nabla_i$, onde ∇_i é o operador gradiente aplicado sobre \mathbf{r}_i . Portanto, a lei (9.72) implica em que

$$\frac{d\mathbf{p}'_i}{dt'} = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j,$$

e a equação de movimento para a i -ésima partícula, transformada do referencial K' para K resulta

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = -\nabla_i \left[\sum_{j \neq i} V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \right],$$

possuindo a mesma forma matemática apresentada em relação a K' . Ou seja, a mecânica Newtoniana é *invariante frente a uma transformação de Galileu*.

9.15.1.2 EQUAÇÕES DE MAXWELL E A TRANSFORMAÇÃO DE GALILEU

Em contraste com a invariância da mecânica, as leis do eletromagnetismo mudam conforme o referencial, se for assumida uma transformação de Galileu. As equações de Maxwell e expressões relacionadas para distribuições de carga e corrente elétricas no vácuo e no sistema Gaussiano de unidades são:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho && \text{(Lei de Gauss: eletricidade)} \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} && \text{(Lei de Ampère)} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && \text{(Lei de Gauss: magnetismo)} \end{aligned} \quad (9.74a)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 && \text{(Lei de Faraday)} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} &= 0 && \text{(Equação da continuidade),} \end{aligned} \quad (9.74b)$$

sendo $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, $\rho(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ respectivamente os campos elétrico e de indução magnética e as densidades de carga e corrente elétricas. Os campos também podem ser expressos em termos dos potenciais escalar $\Phi(\mathbf{r}, t)$ e vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ como

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad \text{e} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (9.75)$$

Combinando as leis de Ampère e Faraday de forma a desacoplar os campos, obtém-se as *equações da onda eletromagnética*

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \nabla \times \mathbf{J}, \end{aligned}$$

sendo que a densidade de corrente cumpre aqui o papel de fonte. Pode-se também obter equações para os potenciais eletromagnéticos, as quais são

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) &= -4\pi\rho \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \frac{1}{c} \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \end{aligned}$$

Nota-se que nas formas gerais acima, as equações para os potenciais são acopladas. Contudo, sobre os potenciais podem ser aplicadas **transformações de calibre (gauge)**

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &\longrightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla\Lambda(\mathbf{r}, t) \\ \Phi(\mathbf{r}, t) &\longrightarrow \Phi'(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial\Lambda}{\partial t}, \end{aligned}$$

sem que as equações de campo sejam alteradas. Nestas transformações, $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ é um campo escalar arbitrário, denominado *função de calibre*. Há infinitas transformações de calibre possíveis, mas uma transformação de particular importância para a relatividade restrita é o *calibre de Lorenz*, proposto pelo físico-matemático dinamarquês Ludvig Valentin Lorenz (1829 – 1891). Neste calibre, o campo $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ é escolhido de tal forma que a *condição de Lorenz*,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0, \quad (9.76)$$

é satisfeita. Com esta condição, as equações para os potenciais tornam-se desacopladas e formalmente idênticas às equações para os campos, isto é,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \nabla^2\Phi = 4\pi\rho \quad (9.77a)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (9.77b)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2} - \nabla^2\Lambda = 0, \quad (9.77c)$$

sendo que a última equação determina a função de calibre $\Lambda(\mathbf{r}, t)$. Esta equação foi obtida assumindo que a condição de Lorenz é também invariante frente a uma transformação de calibre.

Portanto, observa-se que no calibre de Lorenz tanto os campos quanto os potenciais, bem como a própria função de calibre, satisfazem equações diferenciais que possuem toda a estrutura formal de uma equação de onda. Este fato é relevante para a discussão a seguir, acerca da modificação que uma transformação de Galileu $K \rightarrow K'$ impõe sobre a equação da onda.

Já na descoberta do fenômeno da indução magnética, realizada em meados do ano de 1831 de forma independente pelo físico britânico Michael Faraday (1791 – 1867) e pelo físico americano Joseph Henry (1797 – 1878) e que foi formalizada pela lei de Faraday, que a discussão acerca da transformação dos campos eletromagnéticos frente a uma mudança de referencial é levada a cabo.

Na lei de Faraday, a variação do fluxo de indução magnética \mathbf{B} induz o surgimento do campo elétrico \mathbf{E} . Para a descoberta e determinação desta lei foi empregado um aparato experimental que consistia em um circuito elétrico que delimita uma área que é atravessada pelo fluxo magnético variável, fazendo surgir então uma força eletromotriz (fem) induzida. Esta fem surge porque a variação temporal do fluxo magnético faz surgir um campo elétrico ao longo do circuito. Com base neste tipo de equipamento que a lei de Faraday foi proposta. Contudo, esta lei somente é válida quando está envolvido o campo elétrico medido no *referencial de repouso do circuito*. Se o circuito está em movimento relativo ao equipamento de medida, então a lei de Faraday impõe uma transformação no campo elétrico devido ao movimento relativo entre o circuito e o laboratório.

Realizando uma análise cuidadosa da lei de Faraday, pode-se mostrar que se no referencial de laboratório (referencial K na figura 9.15) o campo elétrico é igual a \mathbf{E} e no referencial K' o campo é \mathbf{E}' , então estes campos relacionam-se por

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}') \quad \text{e} \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (9.78)$$

Estas expressões são as leis de transformação de Galileu para o campo elétrico. Nota-se que não é feita menção sobre a possibilidade de transformação também do campo \mathbf{B} . De fato, neste contexto, $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$.

Para se investigar a questão da invariância (ou não) das equações de Maxwell frente a uma transformação de Galileu, é necessário primeiro verificar como os operadores diferenciais ∇ e $\partial/\partial t$ se transformam neste contexto. Para auxiliar nesta derivação, será suposta a existência de um campo escalar $\psi = \psi(\mathbf{r}, t)$, o qual é um invariante de Galileu, ou seja, o valor do campo na posição P , ilustrada na figura 9.15, e no instante t , é o mesmo, quer este seja mensurado a partir

do referencial K , quer seja mensurado a partir do referencial K' . Se ψ for uma componente de um vetor, é necessário considerar separadamente a lei de transformação da mesma, além da transformação dos operadores diferenciais.

Para o operador gradiente, o valor de $\nabla\psi$ no ponto P , mensurado em relação ao referencial K , será tomado da seguinte maneira. Assumindo que o observador em K consiga mensurar simultaneamente os valores do campo no ponto P , na posição \mathbf{r} , e na posição $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$, suficientemente próxima ao ponto P , então a quantidade

$$\frac{\psi(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3, t) - \psi(x_1, x_2, x_3, t)}{\Delta x_1} \equiv \frac{\Delta_1 \psi}{\Delta x_1}$$

será igual, no limite $\Delta x_1 \rightarrow 0$, a $\partial\psi/\partial x_1$. O mesmo ocorrendo para as outras coordenadas. Já no referencial K' , também é possível fazer a mesma suposição. Então, pode-se definir a quantidade

$$\frac{\psi(x'_1 + \Delta x'_1, x'_2, x'_3, t) - \psi(x'_1, x'_2, x'_3, t)}{\Delta x'_1} \equiv \frac{\Delta'_1 \psi}{\Delta x'_1}.$$

Mas, de acordo com a transformação (9.72), $\Delta x'_1 = x'_{12} - x'_1 = x_{12} - x_1$, já que $t' = t$. Além disso como $dl' = dl$, resulta então que

$$\nabla' \psi = \nabla \psi \implies \nabla' = \nabla.$$

Por outro lado a derivada temporal é mais complicada. Assumindo que o ponto P está em repouso em relação a K , então realiza-se duas medições do valor do campo neste ponto, nos instantes t_1 e t_2 , definindo a quantidade

$$\frac{\psi(\mathbf{r}, t_2) - \psi(\mathbf{r}, t_1)}{t_2 - t_1} \equiv \frac{\Delta_t \psi}{\Delta t}.$$

Já em relação a K' , o ponto P está em movimento. Portanto, realizando duas medidas de ψ neste ponto nos instantes t'_1 e t'_2 , sendo que em relação a K' o ponto P está, respectivamente, nas posições \mathbf{r}'_1 e \mathbf{r}'_2 , pode-se definir a quantidade

$$\frac{\psi(\mathbf{r}'_2, t'_2) - \psi(\mathbf{r}'_1, t'_1)}{t'_2 - t'_1} \equiv \frac{\Delta'_t \psi}{\Delta t'}.$$

Se $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ for pequeno o suficiente, pode-se realizar um desenvolvimento de ψ em série de Taylor, mantendo somente os termos de ordem mais baixa,

$$\psi(\mathbf{r}'_2, t'_2) \approx \psi(\mathbf{r}'_1, t'_1) + (t'_2 - t'_1) \frac{\partial \psi}{\partial t'_1} + (\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}'_1}.$$

Então,

$$\frac{\Delta'_t \psi}{\Delta t'} \approx \frac{\partial \psi}{\partial t'_1} + \frac{\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1}{t'_2 - t'_1} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}'_1}.$$

Como ψ , Δt e $\Delta t'$ são invariantes de Galileu, então, chamando $t'_1 = t'$ e $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}'$, no limite $\Delta t = \Delta t' \rightarrow 0$ obtém-se

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t'} - (\mathbf{v} \cdot \nabla') \psi.$$

Portanto, as leis de transformação de Galileu dos operadores diferenciais são

$$\begin{cases} \nabla = \nabla' \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - (\mathbf{v} \cdot \nabla') \end{cases} \iff \begin{cases} \nabla' = \nabla \\ \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla). \end{cases} \quad (9.79)$$

Cabe mencionar aqui que o mesmo resultado poderia ser obtido caso fosse feita uma antecipação na definição de quadrivetores e se considerasse a quádrupla $\{x^\mu\} = (ct, \mathbf{r})$, ($\mu = 0, \dots, 3$). Neste caso, com a lei de transformação (9.72) e empregando a regra da cadeia, seria possível escrever

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \implies \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^0}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x'^0} + \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x'^j} = \delta_i^j \frac{\partial}{\partial x'^j} = \frac{\partial}{\partial x'^i} \\ \frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} \frac{\partial}{\partial x'^0} + \frac{\partial x'^i}{\partial x^0} \frac{\partial}{\partial x'^i} \Rightarrow \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{v_i}{c} \frac{\partial}{\partial x'^i}, \end{cases}$$

onde os índices latinos variam de 1 a 3.

Para verificar como as densidades de carga e corrente se transformam, considera-se um conjunto de cargas puntiformes. Neste caso,

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i \mathbf{u}_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)).$$

Então, de acordo com (9.72) e (9.73),

$$\rho'(\mathbf{r}', t') = \sum_i q_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_i(t')) = \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) = \rho(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{J}'(\mathbf{r}', t') = \sum_i q_i \mathbf{u}'_i(t') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_i(t')) = \sum_i q_i (\mathbf{u}_i(t) - \mathbf{v}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}\rho(\mathbf{r}, t).$$

Ou seja,

$$\begin{cases} \rho'(\mathbf{r}', t') = \rho(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{J}'(\mathbf{r}', t') = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}\rho(\mathbf{r}, t) \end{cases} \iff \begin{cases} \rho(\mathbf{r}, t) = \rho'(\mathbf{r}', t') \\ \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}'(\mathbf{r}', t') + \mathbf{v}\rho'(\mathbf{r}', t') \end{cases} \quad (9.80)$$

Pode-se então verificar a transformação das equações de Maxwell e da equação de continuidade. Supondo que estas equações assumem as suas formas conhecidas no referencial K , emprega-se as transformações (9.78), (9.79) e (9.80) inicialmente na equação da continuidade para verificar a sua forma no referencial K' :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \xrightarrow{K \rightarrow K'} \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \nabla' \cdot \mathbf{J}' + \nabla' \cdot (\mathbf{v}\rho') - (\mathbf{v} \cdot \nabla') \rho' = 0.$$

Como $\nabla' \cdot (\mathbf{v}\rho') = (\mathbf{v} \cdot \nabla') \rho'$, observa-se que a equação da continuidade é invariante frente a uma equação de Galileo. Fisicamente, isto significa que a transformação de Galileo respeita o princípio da conservação da carga elétrica.

Contudo, as equações de Maxwell tomam as seguintes formas frente a uma transformação de Galileo:

$$\begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho & \xrightarrow{K \rightarrow K'} \nabla' \cdot \mathbf{E}' - \nabla' \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}') = 4\pi\rho' \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \xrightarrow{K \rightarrow K'} \nabla \cdot \mathbf{B}' = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} & \xrightarrow{K \rightarrow K'} \nabla' \times \mathbf{B}' - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} (\mathbf{E}' - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}') \\ & + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla') (\mathbf{E}' - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}') = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{J}' + \mathbf{v}\rho') \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 & \xrightarrow{K \rightarrow K'} \nabla' \times \mathbf{E}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} \\ & - \nabla' \times (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}') - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla') \mathbf{B}' = 0, \end{array}$$

onde $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$. Na lei de Faraday, os últimos dois termos são nulos, uma vez que $\nabla' \times (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}') = -(\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla') \mathbf{B}'$. Portanto, somente a lei de Gauss do magnetismo e a lei de Faraday são invariantes em forma. As leis de Gauss da eletricidade e de Ampère são modificadas pela transformação de Galileo. Isto implica também que as equações da onda eletromagnética também se transformam.

A conclusão é que do ponto de vista da transformação de Galileo, as equações de Maxwell somente são válidas em um referencial absoluto. Pode-se dizer que a transformação de Galileo implica na existência do éter.

9.15.1.3 A TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ E OS PRINCÍPIOS DA RELATIVIDADE RESTRITA

Em uma tentativa de contornar o conflito que surgiu entre as leis do eletromagnetismo e as leis de transformação entre referenciais, Hendrik Lorentz propôs, em 1985, uma nova lei de transformação que tratava o tempo não mais como um parâmetro livre nas equações de campo,

mas como uma nova coordenada que também é alterada na transformação de referenciais. Outras pessoas contribuíram na elaboração desta nova transformação, dentre as quais pode-se mencionar o físico-matemático alemão Woldemar Voigt (1850 – 1919), o físico-matemático britânico Joseph Larmor (1857 – 1942), Henri Poincaré, que consolidou o desenvolvimento matemático desta transformação e a denominou **transformação de Lorentz** e, finalmente, Albert Einstein, que em 1905 incorporou a mesma na sua teoria da relatividade restrita. Na literatura atual, pode-se encontrar diversas derivações distintas da transformação de Lorentz. Aqui, a mesma será apresentada sem a sua dedução.

Fazendo novamente referência à figura 9.15, considera-se dois referenciais inerciais K e K' , sendo que este último desloca-se com velocidade v constante em relação ao primeiro. Agora, porém, deve existir uma quarta coordenada, a coordenada temporal $x_0 = ct$, cujo eixo Cartesiano está orientado perpendicularmente ao hiper-plano 3D no qual os eixos espaciais $\{x_i\}$ estão localizados. Se as origens O e O' de ambos os referenciais coincidem em $t = t' = 0$, então a transformação entre as coordenadas de K e K' é dada por:

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}ct \end{cases} \iff \begin{cases} ct = \gamma(ct' + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}') \\ \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}')\boldsymbol{\beta} + \gamma\boldsymbol{\beta}ct', \end{cases} \quad (9.81a)$$

onde foram definidos os parâmetros *beta* ($\boldsymbol{\beta}$) e *gama* (γ) de Lorentz, respectivamente dados por

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (9.81b)$$

Posteriormente, será demonstrado que as equações de Maxwell são invariantes em forma frente a transformação (9.81a).

Definindo as componentes paralela (r_{\parallel}) e perpendicular (r_{\perp}) do vetor posição em relação a $\boldsymbol{\beta}$,

$$\mathbf{r}_{\parallel} = \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}}{\beta^2}\boldsymbol{\beta} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel} = \frac{(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\beta}}{\beta^2},$$

a transformação de Lorentz pode também ser expressa de uma forma mais simples e intuitiva como

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}) \\ r'_{\parallel} = \gamma(r_{\parallel} - \beta ct) \\ \mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp} \end{cases} \iff \begin{cases} ct = \gamma(ct' + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}') \\ r_{\parallel} = \gamma(r'_{\parallel} + \beta ct') \\ \mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r}'_{\perp}. \end{cases} \quad (9.81c)$$

Com relação à teoria da relatividade restrita, esta será abordada de uma maneira sucinta. Como foi visto na seção anterior, as equações de Maxwell não são invariantes frente a uma transformação de Galileu. De acordo com estas, uma onda eletromagnética necessariamente requer um meio para se propagar, tal como ocorre com ondas mecânicas. Este meio seria o éter, o qual não havia sido detectado em experimentos específicos, tais como o experimento de Michelson-Morley. Embora acredita-se que Albert Einstein não estava ciente dos resultados destes experimentos em 1905, mesmo assim a hipótese do éter não era aceitável a partir de suas concepções individuais a respeito do espaço-tempo e do comportamento dos campos eletromagnéticos. Confrontado com o fato de que as equações de Maxwell não são invariantes frente a uma transformação de Galileu, Albert Einstein considerou as seguintes possibilidades:

1. As equações de Maxwell estavam incorretas. Uma teoria correta do eletromagnetismo deveria ser invariante frente a uma transformação de Galileu.
2. Existia um referencial privilegiado para o eletromagnetismo, no qual o éter está em repouso.
3. Existe um princípio da relatividade, distinto da relatividade galileana, e válido tanto para a mecânica quanto para o eletromagnetismo. Isto implicaria em alterações nas leis da mecânica.

A escolha realizada por Einstein a favor da possibilidade 3 levou-o a propor 2 postulados fundamentais:

Postulado 1 (Postulado da relatividade). As leis da natureza e os resultados decorrentes de quaisquer experimentos realizados em um dado sistema de referências são independentes do movimento de translação do sistema como um todo.

Postulado 2 (Postulado da constância da velocidade da luz). A velocidade da luz é constante e independente do movimento da fonte emissora.

Postulado 2' (alternativo). Em todo sistema inercial de referências, existe uma velocidade limite finita universal, denotada por c , para todas as entidades físicas.

Com base nestes postulados e assumindo outros princípios físicos tais como a isotropia do espaço livre, Einstein realizou sua própria derivação da transformação de Lorentz e demonstrou que as equações de Maxwell são invariantes em forma para estas transformações.

Fazendo referência novamente aos referenciais K e K' na figura 9.15, se no instante $t = t' = 0$, quando as origens O e O' coincidem, for emitido um pulso luminoso a partir da origem comum, então, de acordo com o postulado 2, as frentes de onda observadas por observadores situados nas origens de cada referencial irão se propagar na forma de ondas esféricas que se deslocam com a mesma velocidade, igual a c . Do ponto de vista do observador no referencial K , a frente de onda no instante t localiza-se no ponto (x_1, x_2, x_3) determinado pela equação

$$\sum_{i=1}^3 x_i^2 - c^2 t^2 = 0,$$

ao passo que a mesma frente de onda, vista pelo observador em K' , atinge o ponto (x'_1, x'_2, x'_3) no instante t' , determinado por

$$\sum_{i=1}^3 x_i'^2 - c'^2 t'^2 = 0.$$

Definindo uma nova coordenada em cada referencial como

$$x_0 = ict \quad \text{e} \quad x'_0 = ict',$$

os postulados da relatividade e o princípio de isotropia do espaço demandam então que

$$\sum_{\mu=0}^3 x_\mu^2 = \sum_{\mu=0}^3 x_\mu'^2.$$

Com base nesta expressão, a qual é análoga a uma rotação de eixos em um espaço de dimensão 4 que preserva a métrica do espaço,²⁰ Einstein derivou novamente a transformação (9.81).

9.15.1.4 O ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI E OS QUADRIVETORES

Com base nos trabalhos de Lorentz, Poincaré e Einstein, em 1907 o matemático alemão Hermann Minkowski (1864 – 1909) mostrou que a teoria da relatividade restrita poderia ser melhor formalizada assumindo que os fenômenos físicos ocorrem não em um espaço de dimensão 3, mas em um espaço de dimensão 4, doravante denominado o **espaço-tempo de Minkowski**, aqui representado por \mathbb{M}^4 . Neste espaço, uma transformação de Lorentz corresponde a uma rotação arbitrária dos eixos em torno da origem.

Einstein, que foi estudante de Minkowski no Instituto Eletrotécnico de Zurique, inicialmente considerou o trabalho de Minkowski como um simples artifício matemático, porém posteriormente percebeu que a interpretação geométrica do \mathbb{M}^4 seria necessária para a compreensão e desenvolvimento de sua posterior teoria da relatividade geral.

Formalmente, o espaço-tempo de Minkowski é um espaço vetorial real de dimensão 4. Este possui, portanto, 4 vetores de base, os quais não necessitam em geral ser considerados. Um vetor do \mathbb{M}^4 , portanto, possui 4 componentes que podem estar na forma contravariante ou covariante. Estes vetores do \mathbb{M}^4 são usualmente denominados **quadrivetores**. Cada quadrivector possui 3 componentes que correspondem às coordenadas espaciais usuais do \mathbb{E}^3 mais uma coordenada temporal igual a ct . Uma coordenada qualquer de um quadrivector, quer seja temporal ou espacial, será identificada por um índice grego (μ, ν, \dots) . Quando for necessário especificar explicitamente uma coordenada espacial, será empregado um índice latino (i, j, \dots) . Finalmente, quando for necessário especificar explicitamente a coordenada temporal, será empregado o índice "0". O quadrivector posição no \mathbb{M}^4 tem os seus componentes escritos na forma contravariante

²⁰Porém agora em um espaço vetorial complexo.

definidos como uma quádrupla de números que pode ser representada de diferentes maneiras como:

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (\{x^\mu\}) = (x^0, \{x^i\}) = (ct, \mathbf{r}), \quad \text{onde } \mu = 0, \dots, 3 \text{ e } i = 1, \dots, 3.$$

No espaço \mathbb{M}^4 está suposta a validade de uma transformação $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ que leva as coordenadas $\{x^\mu\}$ a novas coordenadas

$$x'^\mu = x'^\mu(\{x^\nu\}), \quad (\mu = 0, \dots, 3),$$

de acordo com a transformação de Lorentz (9.81). Esta transformação pode ser escrita de uma forma compacta como

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (9.82a)$$

sendo que Λ^μ_ν é denominada a **matriz de transformação de Lorentz**. Obviamente, é válida também a transformação inversa

$$x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu x'^\nu, \quad (9.82b)$$

onde

$$\Lambda^\mu_\alpha (\Lambda^{-1})^\alpha_\nu = \delta^\mu_\nu, \quad \text{sendo } [\delta^\mu_\nu] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a delta de Kronecker escrita na forma de um tensor de posto 2 misto. Comparando (9.82a,b) com (9.81), conclui-se que

$$\begin{aligned} \Lambda^0_0 &= \gamma & (\Lambda^{-1})^0_0 &= \gamma \\ \Lambda^0_i &= \Lambda^i_0 = -\gamma\beta_i & (\Lambda^{-1})^0_i &= (\Lambda^{-1})^i_0 = \gamma\beta_i \\ \Lambda^i_j &= \delta_{ij} + (\gamma - 1) \frac{\beta_i\beta_j}{\beta^2} & (\Lambda^{-1})^i_j &= \delta_{ij} + (\gamma - 1) \frac{\beta_i\beta_j}{\beta^2}. \end{aligned} \quad (9.82c)$$

Ou, na forma matricial,

$$\Lambda \equiv \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1 + (\gamma - 1) \frac{\beta_1^2}{\beta^2} & (\gamma - 1) \frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2} & (\gamma - 1) \frac{\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_2 & (\gamma - 1) \frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1) \frac{\beta_2^2}{\beta^2} & (\gamma - 1) \frac{\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_3 & (\gamma - 1) \frac{\beta_1\beta_3}{\beta^2} & (\gamma - 1) \frac{\beta_2\beta_3}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1) \frac{\beta_3^2}{\beta^2} \end{pmatrix} \quad (9.82d)$$

$$\Lambda^{-1} \equiv \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta_1 & \gamma\beta_2 & \gamma\beta_3 \\ \gamma\beta_1 & 1 + (\gamma - 1) \frac{\beta_1^2}{\beta^2} & (\gamma - 1) \frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2} & (\gamma - 1) \frac{\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ \gamma\beta_2 & (\gamma - 1) \frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1) \frac{\beta_2^2}{\beta^2} & (\gamma - 1) \frac{\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ \gamma\beta_3 & (\gamma - 1) \frac{\beta_1\beta_3}{\beta^2} & (\gamma - 1) \frac{\beta_2\beta_3}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1) \frac{\beta_3^2}{\beta^2} \end{pmatrix}. \quad (9.82e)$$

De acordo com os postulados da relatividade, dados dois referenciais inerciais K e K' , dois eventos quaisquer sempre ocorrem com separações espaço-temporais dadas respectivamente por $\{dx^\mu\}$ e $\{dx'^\mu\}$, de tal forma que a quantidade

$$ds^2 \doteq (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = ds'^2 \equiv (dx'^0)^2 - (dx'^1)^2 - (dx'^2)^2 - (dx'^3)^2 \quad (9.83a)$$

permanece sempre invariante frente a uma transformação de Lorentz.

A quantidade ds^2 definida em (9.83a) é denominada um **intervalo infinitesimal** entre eventos no espaço-tempo de Minkowski, ou, simplesmente, a **métrica de Minkowski**. Nota-se que ds^2 não é positivo-definido, pois em princípio sempre é possível encontrar uma transformação tal que $ds^2 < 0$.²¹

Desta maneira, é possível definir o *tensor de métrica* do \mathbb{M}^4 a partir do intervalo ds^2 , de tal forma que

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (9.83b)$$

²¹Porém, esta transformação, denominada *tipo-espaço*, viola a causalidade implícita nos postulados da relatividade. As outras transformações possíveis são *tipo-tempo*, para a qual $ds^2 > 0$ e *tipo-luz*, para a qual $ds^2 = 0$ (para $x^\mu \neq 0$).

onde

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ sendo que } g = \det(g) = -1. \quad (9.83c)$$

O tensor de métrica (9.83b,c) mostra que o espaço \mathbb{M}^4 é plano; porém, de acordo com a definição 9.9, é um tipo de espaço pseudo-Riemanniano, os quais são assim denominados justamente por apresentarem sua métrica dada por expressões como (9.83a). Em tais espaços, é comum caracterizar-se o tensor de métrica também por sua *assinatura*, a qual é o conjunto de números indicando a quantidade de autovalores positivos, negativos e nulos do tensor de métrica. No caso do \mathbb{M}^4 , a assinatura do tensor de métrica é indicada por $\{+, -, -, -\}$.

Propriedades matemáticas do tensor de métrica do \mathbb{M}^4 :

1. $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ (simétrico).
2. $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ (forma contravariante).
3. $g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = g^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$ (forma mista).
4. $\text{Tr}(g) = -2$.

Não será realizada aqui uma discussão ampla das consequências físicas das transformações de Lorentz e dos postulados da relatividade. Discussões a respeito do conceito de simultaneidade, contração espacial, adição de velocidades e cone de luz são referidas a textos específicos sobre relatividade. O único conceito relevante para a presente discussão é do **tempo próprio**.

Considera-se uma partícula com velocidade instantânea $u(t)$ em relação ao referencial K . Em um intervalo de tempo dt , sua posição muda por $dr = u dt$. De (9.83a), o elemento de arco no espaço-tempo percorrido pela partícula é

$$ds^2 = c^2 dt^2 - |dr|^2 = c^2 dt^2 (1 - \beta_u^2) \text{ em } K,$$

sendo $\beta_u = u/c$ o fator beta da velocidade instantânea da partícula em K .

Dado agora o referencial K' onde a partícula está instantaneamente em repouso, como $dr' = 0$ em K' , a partícula percorre o elemento de arco ds'^2 somente ao longo da coordenada temporal, ou seja,

$$ds'^2 = c^2 dt'^2 \equiv c^2 d\tau^2 \text{ em } K'.$$

Como este elemento de arco é um invariante frente a transformação de Lorentz, isto é, $ds'^2 = ds^2$, isto implica que

$$d\tau = \sqrt{1 - \beta_u^2(t)} dt = \frac{dt}{\gamma_u(t)}, \text{ sendo } \gamma_u(t) = (1 - \beta_u^2(t))^{-1/2}.$$

A outra implicação é que a quantidade $d\tau$ também é um invariante de Lorentz. Esta quantidade é o elemento de tempo próprio da partícula, ou seja, o intervalo infinitesimal de tempo mensurado no referencial instantaneamente em repouso com a mesma.

Se for possível resolver a equação de movimento da partícula no referencial K entre os instantes t_1 e t_2 , então o intervalo de tempo próprio transcorrido no referencial em repouso com a partícula será dado por

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma_u(t)}.$$

Este resultado mostra também que $\Delta\tau \leq \Delta t = t_2 - t_1$, uma vez que $\gamma_u \geq 1$ sempre. Ou seja, em qualquer referencial, o intervalo de tempo medido para um determinado processo físico será sempre maior ou igual que o tempo transcorrido no referencial em repouso com a partícula. Este fenômeno é denominado de *dilatação temporal*.

Dado o tensor de métrica na teoria da relatividade restrita, pode-se agora definir os seguintes objetos que compõe o espaço-tempo de Minkowski:

Tensores de posto zero. Também denominados escalares ou **invariantes de Lorentz**.

Tensores de posto um. Também denominados **quadrivetores**. Como os componentes de um quadrivetor podem estar na forma contravariante ou covariante, será empregada uma notação própria que indica explicitamente qual é a forma dos mesmos.

Vetores contravariantes. Tomando como exemplo o quadrivetor posição, um quadrivetor com componentes contravariantes possui uma componente temporal a^0 e três componentes espaciais $\mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3)$, sendo este denotado de forma genérica como

$$\tilde{\mathbf{a}} \equiv (a^0, \mathbf{a}) = (a^0, a^1, a^2, a^3).$$

As componentes $a^\mu = a^\mu(\tilde{r})$ transformam-se de acordo com (9.41) e (9.82a) como

$$a'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} a^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu, \quad (9.84a)$$

ou, de forma explícita,

$$a'^0 = \Lambda^0{}_\nu a^\nu = \Lambda^0{}_0 a^0 + \Lambda^0{}_i a^i = \gamma a^0 - \gamma \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{a} \quad (9.84b)$$

$$a'^i = \Lambda^i{}_\nu a^\nu = \Lambda^i{}_0 a^0 + \Lambda^i{}_j a^j = a^i - \gamma a^0 \beta_i + (\gamma - 1) \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{a}}{\beta^2} \beta_i. \quad (9.84c)$$

A transformação inversa, de acordo com (9.82b), é

$$a^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} a'^\nu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu a'^\nu. \quad (9.84d)$$

Vetores covariantes. Um quadrivetor com componentes covariantes possui uma componente temporal a_0 e três componentes espaciais ($\{a_i\}$). Usando a propriedade de rebaiamento de índice do tensor de métrica, percebe-se facilmente, com o uso de (9.83c) que a relação $a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$ implica que

$$a_0 = a^0 \quad \text{e} \quad a_i = -a^i.$$

Este quadrivetor com componentes covariantes é denotado de forma genérica como

$$\underline{\mathbf{a}} = (a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_0, -\mathbf{a}).$$

Suas componentes $a_\mu = a_\mu(\tilde{r})$ transformam-se, de acordo com (9.41) e (9.82b) como

$$a'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} a_\nu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu a_\nu, \quad (9.85a)$$

$$a'_0 = (\Lambda^{-1})^\nu{}_0 a_\nu = \gamma a_0 - \gamma \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{a}$$

$$a'_i = (\Lambda^{-1})^\nu{}_i a_\nu = a_i + \gamma a_0 \beta_i - (\gamma - 1) \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{a}}{\beta^2} \beta_i.$$

A transformação inversa, de acordo com (9.82a), é

$$a_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} a'_\nu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu a'_\nu. \quad (9.85b)$$

Da mesma forma como ocorre com o quadrivetor covariante, a forma contravariante pode ser obtida a partir da primeira usando o tensor de métrica: $a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu$.

Tensores de posto dois. Podem ter seus componentes em três formas: contravariantes, covariantes ou mistos.

Tensor contravariante. Trata-se de um tensor $F^{\mu\nu}$ com 16 componentes que se transforma de acordo com as regras dadas por (9.41) e (9.82a):

$$F'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} F^{\alpha\beta} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}. \quad (9.86a)$$

Tensor covariante. Trata-se de um tensor $F_{\mu\nu}$ com 16 componentes que se transforma de acordo com (9.41) e (9.82b):

$$F'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} F_{\alpha\beta} = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu F_{\alpha\beta}. \quad (9.86b)$$

Tensor misto. Uma das possíveis formas é o tensor F^μ_ν com 16 componentes que se transforma como:

$$F'^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} F^\alpha_\beta = \Lambda^\mu_\alpha (\Lambda^{-1})^\beta_\nu F^\alpha_\beta. \quad (9.86c)$$

As diferentes formas do tensor \mathcal{F} podem ser obtidas usando a propriedade de elevação ou rebaixamento de índices do tensor de métrica. Por exemplo,

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}, \quad F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} F^{\alpha\beta}, \quad F^\mu_\nu = g^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu}.$$

O produto interno no espaço-tempo de Minkowski possui uma definição ligeiramente distinta do mesmo produto em um espaço Euclidiano. Dados os quadrivetores pertencentes ao \mathbb{M}^4 , o produto interno entre quaisquer dois vetores corresponde ao mapeamento $\mathbb{M}^4 \times \mathbb{M}^4 \mapsto \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. **Simetria.** Dados os quadrivetores \tilde{a} e \tilde{b} , o seu produto interno é

$$a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a^0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

2. **Bilinearidade.** Dados \tilde{a} , \tilde{b} e $\tilde{v} \in \mathbb{M}^4$ e $d \in \mathbb{R}$, então

$$(da^\mu + b^\mu) v_\mu = da^\mu v_\mu + b^\mu v_\mu.$$

3. Dados \tilde{a} e $\tilde{b} \in \mathbb{M}^4$, se $a^\mu b_\mu = 0$ para qualquer $\tilde{b} \in \mathbb{M}^4$, então, necessariamente, $\tilde{a} = 0$.

Dado o quadrivetor $\tilde{a} \in \mathbb{M}^4$, a sua *magnitude* é definida por

$$\|\tilde{a}\|^2 = \|\underline{a}\|^2 = a^\mu a_\mu = a^0 a_0 - a^2,$$

sendo a^2 a norma Euclidiana de seus componentes espaciais. Nota-se que, ao contrário do que ocorre em um espaço Euclidiano, a magnitude de um quadrivetor não é necessariamente positivo-definida, uma vez que o espaço de Minkowski é pseudo-Euclidiano.²²

Como era esperado, o produto interno de dois quadrivetores é um invariante de Lorentz, isto é, dados \tilde{a} e \tilde{b} , de acordo com (9.84) e (9.85),

$$a'^\mu b'_\mu = a'_\mu b'^\mu = \Lambda^\mu_\alpha (\Lambda^{-1})^\beta_\mu a^\alpha b_\beta = \delta^\beta_\alpha a^\alpha b_\beta = a^\alpha b_\alpha.$$

Se os vetores \tilde{a} e \tilde{b} forem ambos não nulos, mas $a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = 0$, então estes são ditos serem (algebricamente) *ortogonais*.

Cabe também discutir a maneira como o operador diferencial $\partial/\partial x^\mu$ se transforma. Dadas as transformações $x'^\mu = x'^\mu(\tilde{r})$ e $x^\mu = x^\mu(\tilde{r}')$, pode-se usar a regra da cadeia e escrever

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}.$$

Comparando a expressão acima com (9.85a), percebe-se que a diferenciação frente a uma coordenada *contravariante* transforma-se como um quadrivetor *covariante*. Pode-se então usar a seguinte notação para o operador quadrivetorial gradiente na forma covariante:

$$\underline{\partial} \equiv (\{\partial_\mu\}) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right), \quad (9.87a)$$

onde ∇ é o operador gradiente usual do \mathbb{E}^3 .

Agora, como $x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$, pode-se escrever

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = g^{\nu\alpha} \delta^\mu_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\nu} = g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = g^{\mu\nu} \partial_\nu,$$

o que mostra que a diferenciação frente a uma coordenada *covariante* transforma-se como um quadrivetor *contravariante*. Especificamente,

$$\frac{\partial}{\partial x_0} = g^{0\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^0} = \partial_0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = g^{i\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = -\frac{\partial}{\partial x^i} = -\partial_i.$$

²²Ver discussão na seção 3.8.1.

Portanto, definindo o operador quadrivetorial gradiente na forma contravariante, este resulta igual a

$$\tilde{\partial} \equiv (\{\partial^\mu\}) = (\partial^0, \{\partial^i\}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, -\nabla \right). \quad (9.87b)$$

A *quadrividivergência* de um quadrivetor \tilde{a} é o invariante de Lorentz

$$\partial^\mu a_\mu = \partial_\mu a^\mu = \frac{\partial a^0}{\partial x^0} + \nabla \cdot \mathbf{a}.$$

O operador laplaciano no \mathbb{M}^4 é a contração invariante

$$\square \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} - \nabla^2,$$

sendo que o operador “ \square ” é denominado o *d’Alembertiano*.

9.15.1.5 FORMULAÇÃO COVARIANTE DO ELETROMAGNETISMO CLÁSSICO

A invariância de forma ou *covariância* das equações de Maxwell, bem como das leis físicas relacionadas, tais como a equação de continuidade e a força de Lorentz, foi demonstrada por Lorentz e por Poincaré. A covariância implica que as grandezas $\rho(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ transformam-se de uma maneira bem definida pelas transformações de Lorentz.

Inicia-se a derivação das formas covariantes das leis do eletromagnetismo pela equação da continuidade (9.74b), a qual é assumida válida em um determinado referencial K . Inicialmente, é necessário postular uma forma para o quadrivetor densidade de corrente elétrica $\tilde{\mathbf{J}}$. Escrevendo-se os operadores diferenciais em termos dos componentes do quadrivetor posição contravariante $\tilde{\mathbf{r}}$,

$$\frac{\partial (c\rho)}{\partial x^0} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial J_i}{\partial x^i} = 0.$$

Percebe-se então que se for definido o quadrivetor

$$\tilde{\mathbf{J}} \equiv (J^0, \{J^i\}) = (c\rho, \mathbf{J}),$$

pode-se escrever a equação da continuidade, de acordo com (9.87a), como

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (\text{em } K).$$

Mostra-se facilmente que a equação acima é invariante em forma frente a uma transformação de Lorentz, ou seja, na mudança $K \rightarrow K'$, pode-se mostrar que esta equação se torna igual a

$$\partial'_\mu J'^\mu = 0 \quad (\text{em } K').$$

É interessante também mostrar explicitamente a transformação das componentes de $\tilde{\mathbf{J}}$ para o referencial K' . De (9.84b,c), obtém-se

$$\begin{aligned} \rho' &= \gamma \left(\rho - \frac{1}{c} \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{J} \right) \\ \mathbf{J}' &= \mathbf{J} - \gamma c \rho \boldsymbol{\beta} + (\gamma - 1) \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{J}}{\beta^2} \boldsymbol{\beta}, \end{aligned}$$

a qual pode ser comparada diretamente com a transformação de Galileu (9.80) para estas quantidades. É digno de menção que a densidade de carga é mensurada de forma distinta entre os referenciais K e K' .

Agora, para se derivar a forma covariante das equações de Maxwell (9.74a), a abordagem tradicionalmente adotada parte dos potenciais eletrodinâmicos. É também conveniente adotar-se o calibre de Lorenz nesta derivação, dentro do qual os potenciais $\Phi(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ são determinados pela condição de Lorenz (9.76) e pelas equações (9.77a,b). Como antes, assume-se que estas equações são respeitadas em um determinado referencial K .

Observa-se então ser possível escrever as equações para os potenciais como

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial (x^0)^2} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial (x^i)^2} = \frac{4\pi}{c} (c\rho)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial (x^0)^2} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial (x^i)^2} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^0} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x^i} = 0.$$

Dada a definição acima para $\tilde{\mathbf{J}}$, se for definido o quadrivetor potencial

$$\tilde{\mathbf{A}} \equiv (A^0, \{A^i\}) = (\Phi, \mathbf{A}),$$

as 3 equações acima são escritas nas suas formas covariantes como

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu, \quad (\mu = 0, \dots, 3)$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0.$$

Uma vez definidos o quadrivetor potencial e as equações que o mesmo obedece, considera-se agora a relação dos mesmos com o campo. Esta relação é fornecida pelas expressões (9.75). Escrevendo as mesmas para a i -ésima componente dos campos, ainda empregando a notação do \mathbb{E}^3 ,

$$E_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \quad \text{e} \quad B_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j}.$$

Reescrevendo agora estas expressões em termos de derivações das componentes *contravariantes* do quadrivetor potencial $\tilde{\mathbf{A}}$ em relação aos componentes do quadrivetor posição *covariante* $\underline{r} = (x_0, -\mathbf{r})$, obtém-se

$$E_i = \frac{\partial A^0}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_0} = -(\partial^0 A^i - \partial^i A^0)$$

$$B_i = -\epsilon_{ijk} \frac{\partial A^k}{\partial x_j} = -\epsilon_{ijk} \partial^j A^k \implies B_i = -(\partial^j A^k - \partial^k A^j),$$

sendo que na última expressão deve-se sempre realizar uma permutação cíclica de $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Ainda na mesma expressão,

$$B_i = -\epsilon_{ijk} \partial^j A^k \implies \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\epsilon^{ijk} B_k.$$

Percebe-se então que não é possível estas expressões em um único quadrivetor. A maneira correta de agrupar os campos é na forma de um tensor de posto dois denominado **tensor do campo eletromagnético**, o qual, na forma contravariante $F^{\mu\nu}$ é definido como

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.$$

Identificando os componentes de $F^{\mu\nu}$:

$$F^{\mu\mu} \stackrel{\text{NS}}{=} 0$$

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = -E_i$$

$$F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = E_i$$

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\epsilon^{ijk} B_k.$$

Ou seja, o tensor de campo é antissimétrico. Pode-se escrever o mesmo forma matricial como

$$[F^{\mu\nu}] \equiv \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

O tensor de campo eletromagnético na forma covariante é obtido por

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} F^{\alpha\beta},$$

resultando na forma matricial

$$[F_{\mu\nu}] \equiv \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uma outra forma útil para o tensor de campo é a sua forma dual, a qual é obtida de acordo com a definição de um tensor dual, apresentada na seção 9.6.2. Para tanto, inicialmente define-se o símbolo de Levi-Civita de quarta ordem $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ como

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1; & \text{permutações pares de } \{0, 1, 2, 3\} \\ -1; & \text{permutações ímpares de } \{0, 1, 2, 3\} \\ 0; & \text{outras combinações} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{12} [(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)(\gamma - \delta)].$$

Da mesma forma como ocorre com o símbolo de terceira ordem, o qual está relacionado com o cálculo do determinante de uma matriz 3×3 , o símbolo $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ pode ser empregado no cálculo do correspondente determinante de uma matriz 4×4 ,

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} A = \epsilon^{\mu\nu\kappa\theta} A_{\mu}^{\alpha} A_{\nu}^{\beta} A_{\kappa}^{\gamma} A_{\theta}^{\delta},$$

como ocorre nas expressões (9.33). Também como ocorre com o símbolo de terceira ordem, $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ é um tensor relativo de peso $w = +1$. Contudo, como no caso das transformações de Lorentz, $\Lambda = \det(\Lambda) = +1$, o símbolo de Levi-Civita se transforma como um tensor de posto quatro na transformação entre referenciais.

Portanto, o tensor dual do campo eletromagnético, definido como

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

age como um tensor frente a uma transformação de Lorentz. Na representação matricial, este tensor é dado por

$$[\mathcal{F}^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, em termos dos tensores de campo $F^{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu}$ e $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ e do quadrivetor \tilde{J} , as equações de Maxwell (9.74a) podem ser escritas de uma forma manifestamente covariante. Principiando pelas equações inhomogêneas (lei de Gauss da eletricidade e lei de Ampère), a forma covariante das mesmas é

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^{\nu}.$$

Por sua vez, as equações homogêneas (lei de Gauss do magnetismo e a lei de Faraday) têm a sua forma covariante de duas maneiras equivalentes,

$$\partial_{\mu} \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0,$$

ou

$$\partial_{\mu} F_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} F_{\sigma\mu} + \partial_{\sigma} F_{\mu\nu} = 0,$$

onde μ, ν e σ são quaisquer combinações dos índices $\{0, 1, 2, 3\}$.

Um ponto importante consiste em mostrar a lei de transformação dos campos. Dado o tensor de campo $F^{\mu\nu}$ no referencial K , um observador no referencial K' irá observar estes campos de acordo com (9.86a),

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} F^{\alpha\beta}.$$

Realizando a transformação, os campos observados no referencial K' são

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \boldsymbol{\beta}$$

$$\mathbf{B}' = \gamma(\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \boldsymbol{\beta}.$$

Exercício 9.21. Obtenha os campos transformados para o referencial K' .

Solução. Realiza-se a transformação inicialmente para o campo elétrico. A i -ésima componente em K' é $E'^i = F'^{i0}$. Então,

$$\begin{aligned} F'^{i0} &= \Lambda^i_{\alpha} \Lambda^0_{\beta} F^{\alpha\beta} \\ &= \Lambda^i_{\alpha} \Lambda^0_{\beta} F^{\alpha\beta} \\ &= \Lambda^i_0 \Lambda^0_{\beta} F^{0\beta} + \Lambda^i_j \Lambda^0_{\beta} F^{j\beta} \\ &= \Lambda^i_0 \Lambda^0_j F^{0j} + \Lambda^i_j \Lambda^0_0 F^{j0} + \Lambda^i_j \Lambda^0_k F^{jk} \\ &= \gamma E_i + \gamma (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B})_i - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \beta_i. \end{aligned}$$

Já os componentes de \mathbf{B}' são dados a partir de

$$F^{ij} = -\epsilon^{ij\ell} B_{\ell} \implies \epsilon_{ijm} F^{ij} = -\epsilon_{ijm} \epsilon^{ij\ell} B_{\ell} = -2\delta_m^{\ell} B_{\ell} = -2B_m \implies B_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F^{jk}.$$

Portanto, no referencial K' ,

$$\begin{aligned} B'_i &= -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F'^{jk} \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \Lambda^j_{\alpha} \Lambda^k_{\beta} F^{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \left[\Lambda^j_0 \Lambda^k_m F^{0m} + \Lambda^j_{\ell} \Lambda^k_0 F^{\ell 0} + \Lambda^j_{\ell} \Lambda^k_m F^{\ell m} \right] \\ &= \gamma B_i - (\gamma - 1) \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}}{\beta^2} \beta_i - \gamma (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E})_i \\ &= \gamma B_i - \gamma (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E})_i - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \beta_i. \end{aligned}$$

Uma expressão interessante também pode ser obtida para a equação de movimento de uma partícula carregada sob a ação dos campos eletromagnéticos. Na mecânica Newtoniana, esta equação é

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right),$$

sendo \mathbf{p} o momentum linear (Newtoniano) da partícula e q a sua carga. Para derivar a forma covariante desta equação, inicialmente define-se o quadrivetor velocidade a partir de $\tilde{\mathbf{r}}$ e do tempo próprio τ como

$$\tilde{\mathbf{U}} = \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau} = (\gamma_u c, \gamma_u \mathbf{v}),$$

sendo $\tilde{\mathbf{U}}$ a quadrivelocidade. A partir desta, pode-se definir o quadrivetor momentum linear como $\tilde{\mathbf{p}} = m_0 \tilde{\mathbf{U}} = (E/c, \gamma_u \mathbf{p})$, sendo m_0 a *massa de repouso* da partícula, ou seja, a massa que seria mensurada em um referencial sempre em repouso com a mesma e

$$E = \gamma_u m_0 c^2 = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + p^2 c^2}$$

a sua *energia relativística*. Esta quantidade também é um invariante de Lorentz. Portanto, a forma covariante da equação de movimento da carga q é

$$\frac{dp^{\mu}}{d\tau} = m_0 \frac{dU^{\mu}}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} U_{\nu}.$$

É interessante separar as componentes temporal e espacial desta equação. Estas são, respectivamente,

$$\begin{aligned} \frac{dp^0}{d\tau} &= \frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau} = \frac{q}{c} \gamma_u (\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}) \\ \frac{dp^i}{d\tau} &= \frac{d}{d\tau} (\gamma_u p_i) = q \gamma_u \left[E_i + \frac{1}{c} (\mathbf{u} \times \mathbf{B})_i \right]. \end{aligned}$$

Das equações acima, a última corresponde à forma relativística da força de Lorentz, enquanto que a primeira descreve a taxa de transferência de energia entre a carga e os campos.

Por fim, quando há um sistema de partículas carregadas (caracterizadas pelo quadrivetor \tilde{J}) interagindo com os campos, observa-se a conservação da energia, do momentum linear e do momentum angular totais deste sistema. A primeira lei de conservação em particular é denominada *teorema de Poynting*. A lei de conservação geral possui dois termos, um termo correspondente às ondas e outro contendo a interação destas com as partículas. O primeiro termo é descrito em função do *tensor energia-momentum* $\Theta^{\mu\nu}$, dado por

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(g^{\mu\sigma} F_{\sigma\alpha} F^{\alpha\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right).$$

Pode-se perceber que $\Theta^{\mu\nu}$ é simétrico.

A lei de conservação para o sistema cargas + campos é

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = -\frac{1}{c} F^{\nu\sigma} J_\sigma.$$

9.15.2 A MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD NA RELATIVIDADE GERAL

Uma solução exata para as equações de Einstein (9.71) foi encontrada por Karl Schwarzschild (1873 - 1916) ainda em 1915, menos de dois meses após a primeira publicação da teoria da relatividade geral. Schwarzschild obteve sua solução enquanto estava servindo no exército alemão durante a I Guerra Mundial, publicou a mesma no início de 1916²³ e pouco tempo depois acabou falecendo em virtude de uma doença contrída no campo de batalha.

A solução de Schwarzschild descreve o campo gravitacional (ou seja, a métrica do espaço-tempo) gerado no espaço que rodeia um corpo de massa M esférico homogêneo, sem carga elétrica, com momentum angular nulo e fixa na origem do sistema de referência.

9.15.2.1 DERIVAÇÃO DO TENSOR DE MÉTRICA

Considera-se um contínuo espaço-tempo de 4 dimensões, o qual se reduz assintoticamente ao espaço de Minkowski introduzido na seção 9.15.1.4 a uma distância infinita do corpo de massa M . Neste espaço, o quadrivetor posição continua sendo determinado pela 4-upla (x^0, x^1, x^2, x^3) . Assumindo que as equações de Einstein (9.71a) podem ser escritas como

$$G^\alpha_\beta = 0,$$

contraíndo o tensor de Einstein (9.71b) resulta

$$G^\alpha_\alpha = R^\alpha_\alpha - \frac{1}{2} \delta^\alpha_\alpha R = R - \frac{1}{2} 4R = 0,$$

o que implica que $R = 0$. Portanto, as equações de Einstein se reduzem a

$$R_{\alpha\beta} = 0.$$

Lembrando que o tensor de Ricci é dado por (9.69), no espaço R^4 em questão as equações de Einstein ficam

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^\gamma_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\delta_{\alpha\beta} \Gamma^\gamma_{\delta\gamma} - \Gamma^\delta_{\alpha\gamma} \Gamma^\gamma_{\delta\beta} = 0, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, 2, 3), \quad (9.88)$$

na forma (9.69b). Alternativamente, pode-se empregar a forma (9.69d).

Busca-se uma solução do sistema acima para um espaço esfericamente simétrico. Por isso, as coordenadas espaciais do quadrivetor serão escritas em termos das coordenadas polares esféricas $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ e $x^3 = \varphi$. Além disso, como já mencionado, a distâncias infinitas da

²³Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie (A respeito do campo gravitacional de uma partícula massiva na teoria de Einstein). *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, v. 7, p. 189–196, 1916. Acesso: <https://www.biodiversitylibrary.org/item/93032#page/215/mode/lup> (Versão em inglês: <https://arxiv.org/abs/physics/9905030v1>).

massa que gera o campo, a métrica do espaço-tempo deve se reduzir à métrica do espaço-tempo de Minkowski M^4 , dada por

$$ds^2 = (cdt)^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Por estas razões, Schwarzschild propôs a seguinte métrica para o espaço-tempo em torno da massa M :

$$ds^2 = e^{2\nu(r)} c^2 dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (9.89)$$

onde $\nu(r)$ e $\lambda(r)$ são funções que devem ser derivadas pelas equações de campo e que estão sujeitas à condição de contorno

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \nu(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \lambda(r) = 0.$$

Comparando a métrica proposta acima com a métrica geral no R^n definida em (9.26), conclui-se que

$$\mathbf{g} \equiv [g_{\alpha\beta}] = \begin{pmatrix} e^{2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Ou seja, o tensor de métrica é diagonal. O determinante de $g_{\alpha\beta}$ é

$$g = g_{00}g_{11}g_{22}g_{33} = -e^{2(\nu+\lambda)} r^4 \sin^2 \theta$$

e sua forma contravariante é

$$[g^{\alpha\beta}] = \begin{pmatrix} e^{-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}.$$

De acordo com a expressão (9.46), os símbolos de Christoffel são escritos

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} \left(\frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\delta\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\delta} \right).$$

Para a derivação destes símbolos, escreve-se inicialmente

$$g_{\alpha\beta} \stackrel{\text{NS}}{=} f_\alpha^\delta \delta_{\alpha\beta}, \quad g^{\alpha\beta} \stackrel{\text{NS}}{=} f_\alpha^{-2} \delta^{\alpha\beta},$$

onde

$$f_0 = e^\nu, \quad f_1 = e^\lambda, \quad f_2 = r, \quad f_3 = r \sin \theta,$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} f_\gamma^{-2} \delta^{\gamma\delta} \left(\frac{\partial f_\beta^2}{\partial x^\alpha} \delta_{\beta\delta} + \frac{\partial f_\alpha^2}{\partial x^\beta} \delta_{\alpha\delta} - \frac{\partial f_\alpha^2}{\partial x^\delta} \delta_{\alpha\beta} \right) \\ &\stackrel{\text{NS}}{=} f_\gamma^{-2} \left(f_\beta \delta_\beta^\gamma \frac{\partial f_\beta}{\partial x^\alpha} + f_\alpha \delta_\alpha^\gamma \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^\beta} - f_\alpha \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^\gamma} \right). \end{aligned}$$

Após uma certa álgebra, as matrizes de Christoffel ficam então:

$$\begin{aligned} \Gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & \nu' & 0 & 0 \\ \nu' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \Gamma^1 &= \begin{pmatrix} e^{2(\nu-\lambda)} \nu' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-2\lambda} r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-2\lambda} r \sin^2 \theta \end{pmatrix} \\ \Gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-1} & 0 \\ 0 & r^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \theta \sin \theta \end{pmatrix} & \Gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cotan \theta \\ 0 & r^{-1} \cotan \theta & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9.90)$$

Destes resultados pode-se concluir que

$$\Gamma^0_{ij} = 0, \quad \Gamma^i_{0j} = \Gamma^i_{j0} = 0.$$

Inserindo os símbolos de Christoffel dados por (9.90) e suas derivadas nas equações de campo (9.88), obtém-se, após uma certa quantidade de álgebra,

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= 0, \quad (\alpha \neq \beta) \\ R_{00} &= [\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + 2r^{-1}\nu'] e^{2(\nu-\lambda)} = 0 \\ R_{11} &= -\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 + 2r^{-1}\lambda' = 0 \\ R_{22} &= 1 - [1 + r(\nu' - \lambda')] e^{-2\lambda} = 0 \\ R_{33} &= [1 - (1 + \nu'r - \lambda'r) e^{-2\lambda}] \text{sen}^2 \theta = 0. \end{aligned}$$

Portanto, observa-se que $R_{\alpha\beta} = 0$ para $\alpha \neq \beta$ e a partir dos elementos da diagonal resulta o seguinte sistema de equações para as funções $\nu(r)$ e $\lambda(r)$:

$$\nu'' - \nu'\lambda' + \nu'^2 + 2r^{-1}\nu' = 0 \quad (9.91a)$$

$$\nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 - 2\lambda'r^{-1} = 0 \quad (9.91b)$$

$$[r(\lambda' - \nu') - 1] e^{-2\lambda} + 1 = 0 \quad (9.91c)$$

$$\{[r(\lambda' - \nu') - 1] e^{-2\lambda} + 1\} \text{sen}^2 \theta = 0. \quad (9.91d)$$

A equação (9.91d) é uma mera repetição de (9.91c). De (9.91a) e (9.91b) conclui-se que

$$\lambda' = -\nu' \implies \lambda(r) = -\nu(r) + \text{cte.}$$

Porém, pelo limite $r \rightarrow \infty$ que ambas têm que satisfazer, resulta que, simplesmente, $\lambda(r) = -\nu(r)$. Com isso, (9.91c) resulta

$$-(2r\nu' + 1) e^{2\nu} + 1 = 0.$$

Chamando $\mu(r) = e^{2\nu}$,

$$2\nu' = \frac{\mu'}{\mu} \implies r\mu' + \mu = 1.$$

A solução desta EDO é

$$\mu(r) = e^{2\nu(r)} = 1 - \frac{r_G}{r},$$

onde r_G é uma constante de integração denominada o *raio gravitacional* ou o *raio de Schwarzschild do corpo*, a qual será em breve identificada com a massa do mesmo.

Assim, inserindo esta solução em (9.89), obteve-se a métrica de Schwarzschild

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{r_G}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_G}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \\ [g_{\alpha\beta}] &= \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9.92)$$

9.15.2.2 CONSEQUÊNCIAS E APLICAÇÕES DA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

Serão discutidos agora de forma breve algumas das principais consequências advindas da métrica de Schwarzschild.

TRAJETÓRIA DE PARTÍCULAS NO CAMPO GRAVITACIONAL E O LIMITE NEWTONIANO

Na teoria da relatividade geral, as equações de movimento de uma partícula de massa m sob a ação do campo gravitacional determinado pela métrica $g_{\alpha\beta}$ do espaço-tempo são exatamente as equações (9.61), as quais resultam nas curvas geodésicas entre dois pontos quaisquer do espaço-tempo determinado pela métrica. Ou seja, na relatividade geral as equações de movimento são

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\ell^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{d\ell} \frac{dx^\gamma}{d\ell} = 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3),$$

sendo ℓ a extensão do arco da trajetória da partícula no espaço-tempo.

Será feito uso agora do conceito de *tempo próprio*, discutido na seção 9.15.1.4 e que consiste no intervalo de tempo registrado no referencial sempre em repouso com o observador. Dada a métrica

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

no referencial em repouso ao observador, dois eventos infinitesimalmente separados no tempo e que ocorrem no mesmo ponto do espaço ocorrem no intervalo $d\tau$, onde τ é o *tempo próprio*. Então, neste referencial, $dx^i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) e

$$ds^2 \doteq c^2 d\tau^2 = g_{00} (dx^0)^2.$$

Portanto,

$$\frac{d\tau}{d\ell} = c^{-1}, \quad d\tau = \sqrt{g_{00}} dt.$$

Então, nas equações de movimento será realizada a mudança de variável $\ell \rightarrow \tau$ via

$$\frac{dx^\alpha}{d\ell} = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{d\tau}{d\ell} = c^{-1} \frac{dx^\alpha}{d\tau}.$$

Dessa forma, as equações de movimento da partícula no campo gravitacional ficam

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3).$$

Na métrica de Schwarzschild, os símbolos de Christoffel são dados por (9.90) e

$$d\tau = \sqrt{\mu} dt.$$

Neste caso, as equações de movimento tornam-se

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} + 2\nu' \frac{dr}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} &= 0 \\ \frac{d^2 x^1}{d\tau^2} + \mu^2 \nu' \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 - \nu' \left(\frac{dx^1}{d\tau} \right)^2 - \mu r \left(\frac{dx^2}{d\tau} \right)^2 - \mu r \sin^2 \theta \left(\frac{dx^3}{d\tau} \right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2 x^2}{d\tau^2} + 2r^{-1} \frac{dx^1}{d\tau} \frac{dx^2}{d\tau} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{dx^3}{d\tau} \right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2 x^3}{d\tau^2} + 2r^{-1} \frac{dx^1}{d\tau} \frac{dx^3}{d\tau} + 2 \cotan \theta \frac{dx^2}{d\tau} \frac{dx^3}{d\tau} &= 0. \end{aligned}$$

Mas, como $\nu' = \mu'/2\mu$, pode-se escrever

$$\frac{d}{d\tau} \left(\mu \frac{dx^0}{d\tau} \right) = 0 \quad (9.93a)$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} - \mu r \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 - \mu r \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2} \mu \mu' \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\mu'}{\mu} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (9.93b)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(r^2 \frac{d\theta}{d\tau} \right) - r^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (9.93c)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} \right) = 0. \quad (9.93d)$$

Observa-se que a primeira e a última equações de movimento pode ser imediatamente integradas, resultando em

$$\begin{aligned} \mu \frac{dx^0}{d\tau} &= \alpha \\ r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} &= h, \end{aligned}$$

onde α e h são constantes de movimento, as quais foram escolhidas de maneira a facilitar a identificação do limite não relativístico no movimento da partícula. Adicionalmente, será determinada agora a orientação do referencial. Como a métrica é esfericamente simétrica, os eixos do

referencial podem ter qualquer orientação arbitrária, sem que isso comprometa a generalidade da equação de movimento. Observando que a terceira equação de movimento é

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} - \operatorname{sen} \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = 0,$$

se a partícula estiver no plano $\theta = \pi/2$ em um determinado instante próprio τ_0 , pode-se desenvolver $\theta(\tau)$ em torno de τ_0 como

$$\theta(\tau) = \frac{\pi}{2} + \left. \frac{d\theta}{d\tau} \right|_{\tau_0} (\tau - \tau_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2\theta}{d\tau^2} \right|_{\tau_0} (\tau - \tau_0)^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3\theta}{d\tau^3} \right|_{\tau_0} (\tau - \tau_0)^3 + \dots$$

Ou seja,

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \left. \frac{d\theta}{d\tau} \right|_{\tau_0} + \left. \frac{d^2\theta}{d\tau^2} \right|_{\tau_0} (\tau - \tau_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^3\theta}{d\tau^3} \right|_{\tau_0} (\tau - \tau_0)^2 + \dots$$

Se, adicionalmente, $d\theta/d\tau|_{\tau_0} = 0$, então a equação de movimento mostra que $d^2\theta/d\tau^2|_{\tau_0} = 0$. Para se obter $d^3\theta/d\tau^3|_{\tau_0}$, deriva-se a equação para $\theta(\tau)$, resultando então que esta derivada também é nula. Assim, pode-se mostrar que todos os termos na série de Taylor para $\theta(\tau)$ são nulos exceto o primeiro. Portanto, as equações de movimento na métrica de Schwarzschild admitem uma solução $\theta(\tau) = \pi/2$, exatamente como na teoria Newtoniana da gravitação.

As equações de movimento reduzem-se então para

$$\begin{aligned} \mu \frac{dx^0}{d\tau} &= \alpha \\ r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} &= h, \\ \frac{d^2r}{d\tau^2} - \mu r \left(\frac{h}{r^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \mu \mu' \left(\frac{\alpha}{\mu} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\mu'}{\mu} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Agora, o termo $(dr/d\tau)^2$ na equação será modificado a partir da métrica. De (9.92), resulta que

$$\begin{aligned} \mu^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 &= \mu \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left[\left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \right] - c^2 \\ &= \mu^{-1} \alpha^2 - \frac{h^2}{r^2} - c^2, \end{aligned}$$

onde também foi empregada a identidade $dl = cd\tau$. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{d\tau^2} - \mu \frac{h^2}{r^3} + \frac{1}{2} \mu' \frac{h^2}{r^2} + \frac{1}{2} \mu' c^2 &= 0, \\ \frac{d^2r}{d\tau^2} - \left(1 - \frac{3}{2} \frac{r_G}{r} \right) \frac{h^2}{r^3} + \frac{r_G c^2}{2r^2} &= 0, \end{aligned} \tag{9.94}$$

uma vez que $\mu = 1 - r_G/r$.

Para identificar finalmente a expressão para o raio gravitacional r_G , considera-se primeiro o limite clássico das equações de movimento. Observa-se que

$$d\tau = \sqrt{\mu} dt = \sqrt{1 - \frac{r_G}{r}} dt.$$

O limite clássico é obtido para $r \gg r_G$, de onde

$$d\tau \approx \left(1 - \frac{r_G}{2r} \right) dt \approx dt.$$

Neste limite, a equação (9.94) fica

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{r_G c^2}{2r^2} = 0.$$

Esta equação será comparada com as equações de movimento de uma partícula de massa m sob a influência da força gravitacional de uma massa M , de acordo com a lei da gravitação universal de Newton. As equações são as seguintes:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{m}U' &= 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 &= 0 \\ \frac{d}{dt}(r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) &= 0 \implies r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = h \end{aligned}$$

onde

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

é a energia potencial gravitacional do sistema composto pelas massas M e m e h é proporcional ao momentum angular (constante). Estas equações admitem uma solução $\theta = \pi/2 = \text{cte.}$, em cuja situação a equação radial pode ser escrita

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{GM}{r^2} = 0.$$

Comparando esta equação com (9.94) no limite clássico, obtém-se

$$r_G = \frac{2GM}{c^2}.$$

É interessante comparar os raios de Schwarzschild de alguns objetos astronômicos conhecidos. A tabela 9.3 mostra o valores de r_G e também da densidade dos objetos. Observa-se que a Terra tem um raio gravitacional de pouco menos do que 1 cm, ao passo que para o Sol, $r_G \approx 3$ km. Ou seja, os seus raios gravitacionais são muito menores que os seus tamanhos. Contudo, um objeto suficientemente denso pode ser um raio de Schwarzschild maior que o seu tamanho. Se o raio do objeto é

$$r = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho}},$$

sendo ρ sua densidade, então $r_G > r$ se

$$\rho > \frac{3c^6}{32\pi G^3 M^2}.$$

Isto é o que ocorre com um Buraco Negro.

DISTORÇÕES DO ESPAÇO-TEMPO NA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

Alguns dos resultados mais conhecidos da métrica de Schwarzschild serão apresentados agora. O espaço-tempo descrito pela métrica (9.92) não é “plano” como o espaço Euclidiano, tacitamente assumido na gravitação Newtoniana. Se forem considerados dois pontos infinitesimalmente próximos na direção radial a partir da massa M , de tal forma que $dt = d\theta = d\varphi$, resulta que a extensão do elemento de arco na direção radial resulta

$$dR = \left(1 - \frac{r_G}{r}\right)^{-1/2} dr > dr.$$

Ou seja, a distância entre os pontos r_1 e r_2 ($> r_1$) é obtida pela integração

$$R_{21} = \int_{r_1}^{r_2} \left(1 - \frac{r_G}{r}\right)^{-1/2} dr = \left[\sqrt{r(r-r_G)} + r_G \ln(\sqrt{r} + \sqrt{r-r_G})\right]_{r_1}^{r_2} > r_2 - r_1.$$

Tabela 9.3: Raios de Schwarzschild de alguns objetos astronômicos.

	r_G (m)	Densidade (g/cm ³)
Terra	$8,83 \times 10^{-3}$	$2,04 \times 10^{27}$
Sol	$2,95 \times 10^3$	$1,84 \times 10^{16}$
Via Láctea	$2,08 \times 10^{15}$ ($\sim 0,2$ a.l.)	$3,72 \times 10^{-8}$

Obviamente, se $M \rightarrow 0$, $R_{21} \rightarrow r_2 - r_1$ e o espaço torna-se plano.

Considerando agora a relação entre o tempo próprio τ e o tempo t medido por um observador distante da massa M , parte-se da relação

$$d\tau = \sqrt{\mu} dt = \sqrt{1 - \frac{r_G}{r}} dt,$$

o que mostra que $d\tau < dt$. O tempo próprio entre dois eventos quaisquer ocorrendo no mesmo ponto do espaço é então dado por

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{r_G}{r}} dt < t_2 - t_1.$$

Observa-se que $\tau \rightarrow 0$ à medida que $r \rightarrow r_G$. Este resultado caracteriza o denominado *horizonte de eventos*, pois para um observador situado exatamente no ponto $r = r_G$ quaisquer dois eventos que levam um intervalo de tempo τ finito irão ocorrer ao longo de um intervalo de tempo infinito para um outro observador situado distante do raio gravitacional de M . A dilatação temporal prevista na métrica de Schwarzschild foi corroborada pelo experimento de Pound-Rebka em 1959 (POUND; REBKA, 1959, 1960).²⁴

REFERÊNCIAS

- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. **Mathematical Methods for Physicists**. Sixth. New York: Elsevier, 2005. 1182 + xii pp. ISBN 0-12-059876-0.
- BELLAC, M.; LÉVY-LEBLOND, J.M. Galilean electromagnetism. English. **Il Nuovo Cimento**, Società Italiana di Fisica, v. 14, n. 2, p. 217–234, abr. 1973. ISSN 0369-3554. DOI: [10.1007/BF02895715](https://doi.org/10.1007/BF02895715).
- BISHOP, R. L.; GOLDBERG, S. I. **Tensor Analysis on Manifolds**. New York: Dover, 2012. (Dover Books on Mathematics). ISBN 9780486139234.
- BLOCH, A. M. **Nonholonomic Mechanics and Control**. New York: Springer, 2003. (Interdisciplinary Applied Mathematics). ISBN 9780387955353.
- BORISENKO, A.A.I.; TARAPOV, I.E.; SILVERMAN, R.A. **Vector and Tensor Analysis With Applications**. New York: Dover, 1968. (Dover Books on Mathematics). 257 + x pp. ISBN 9780486638331.
- DALARSSON, M.; DALARSSON, N. **Tensor Calculus, Relativity, and Cosmology: A First Course**. New York: Elsevier, 2005. 280 + xii pp. ISBN 9780122006814.
- DEBENEDICTIS, Andrew. Integration in General Relativity, p. 7, fev. 1998. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/physics/9802027>.
- EINSTEIN, Albert. A Generalized Theory of Gravitation. **Reviews of Modern Physics**, American Physical Society, v. 20, n. 1, p. 35–39, 1 jan. 1948. DOI: [10.1103/RevModPhys.20.35](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.20.35).
- FITZPATRICK, Richard. **Fluid Mechanics**. [S.l.: s.n.], 2012. Acesso em 10/03/2013. Disponível em: <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/3361/fluidhtml/Fluidhtml.html>.
- GARWIN, Richard L.; LEDERMAN, Leon M.; WEINRICH, Marcel. Observations of the Failure of Conservation of Parity and Charge Conjugation in Meson Decays: the Magnetic Moment of the Free Muon. **Physical Review**, American Physical Society, v. 105, n. 4, p. 1415–1417, 4 fev. 1957. DOI: [10.1103/PhysRev.105.1415](https://doi.org/10.1103/PhysRev.105.1415).
- JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics**. Third. New York: John Wiley & Sons, 1999. 808 + xxi pp. ISBN 0-471-30932-X.
- JOSHI, A. W. **Matrices And Tensors In Physics**. New Delhi: John Wiley & Sons, 1995. 342 + xvi pp. ISBN 9788122405637.
- KAY, D. **Schaums Outline of Tensor Calculus**. New York: McGraw-Hill, 2011. (Schaum's Outline Series). 228 + ix pp. ISBN 9780071756037.
- LEE, T. D.; YANG, C. N. Question of Parity Conservation in Weak Interactions. **Physical Review**, American Physical Society, v. 104, n. 1, p. 254–258, 1 out. 1956. DOI: [10.1103/PhysRev.104.254](https://doi.org/10.1103/PhysRev.104.254).

²⁴Ver também: [Physics Focus: The Weight of Light](#).

- MATHEWS, Jon; WALKER, R. L. **Mathematical methods of physics**. Second. [S.l.]: W. A. Benjamin, 1970. (World Student Series). 501 + xiii pp. ISBN 9780805370027.
- MISNER, C.W.; THORNE, K.S.; WHEELER, J.A. **Gravitation**. San Francisco: Freeman, 1973. 1279 + xxvii pp. ISBN 9780716703440.
- NEARING, James. **Mathematical Tools for Physics**. New York: Dover Publications, out. 2010. (Dover Books on Physics). 496 pp. ISBN 978-0486482125.
- POUND, R. V.; REBKA, G. A. Apparent Weight of Photons. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 4, n. 7, p. 337–341, 7 abr. 1960. DOI: [10.1103/PhysRevLett.4.337](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.4.337).
- _____. Gravitational Red-Shift in Nuclear Resonance. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 3, n. 9, p. 439–441, 9 nov. 1959. DOI: [10.1103/PhysRevLett.3.439](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.3.439).
- PRICE, Richard H. General relativity primer. **American Journal of Physics**, v. 50, n. 4, p. 300–329, abr. 1982. DOI: [10.1119/1.12853](https://doi.org/10.1119/1.12853).
- RILEY, K. F.; HOBSON, M. P.; BENCE, S. J. **Mathematical Methods for Physics and Engineering**. 3rd. Ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 1333 + xxvii pp. ISBN 9781139450997. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=Mq1n1EKhNcsC>>.
- RINDLER, Wolfgang. **Relativity: Special, General, and Cosmological**. New York: Oxford University Press, 2006. 430 + xvi pp. ISBN 9780198567325.
- SHARIPOV, R. A. **Quick introduction to tensor analysis**. [S.l.], mar. 2004. 47 pp. eprint: [arXiv:math/0403252](https://arxiv.org/abs/math/0403252). Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/math/0403252>>.
- SILVEIRA, V. M. G. da. **On CP violation and relativistic non-inertial effects**. Abr. 2019. 106 f. Diss. (Mestrado) – IF-UFRGS, Porto Alegre. Disponível em: <https://sabi.ufrgs.br/F/YM9MTR51JMXFYNG3R1N7BQ4G9TM56454YMGVT6UQKTSIX3M6EI-05313?func=find-b&request=Vinicius+Medeiros+Gomes+da+Silveira&find_code=WAU&adjacent=N&x=0&y=0&filter_code_2=WLN&filter_request_2=&filter_code_3=WYR&filter_request_3=&filter_code_4=WYR&filter_request_4>.
- SIMMONDS, James D. **A Brief on Tensor Analysis**. Second. New York: Springer-Verlag, jul. 1997. (Undergraduate Texts in Mathematics). 112 + xiv pp. ISBN 9780387940885.
- SOKOLNIKOFF, I. S. **Tensor Analysis. Theory and Applications**. New York: John Wiley & Sons, 1951. (Applied Mathematics Series). 335 + x pp.
- SYNGE, J.J.L.; SCHILD, A. **Tensor calculus**. New York: Dover, 1969. (Dover books on advanced mathematics). 329 + ix pp. ISBN 9780486636122.
- SZEKERES, Peter. **A Course in Modern Mathematical Physics: Groups, Hilbert Space, and Differential Geometry**. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. ISBN 9780521536455. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=pRgjkgEACAAJ>>.
- WU, C. S.; AMBLER, E.; HAYWARD, R. W.; HOPPES, D. D.; HUDSON, R. P. Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay. **Physical Review**, American Physical Society, v. 105, n. 4, p. 1413–1415, 4 fev. 1957. DOI: [10.1103/PhysRev.105.1413](https://doi.org/10.1103/PhysRev.105.1413).