8

FUNÇÕES ESPECIAIS

FUNÇÕES ESPECIAIS, não são fundamentalmente distintas das chamadas funções "elementares". Estas últimas são compostos pelas funções que usualmente surgem em estudos elementares de análise diferencial e integral, tais como as funções potência, polinômios, funções exponenciais e logaritmos, funções trigonométricas circulares e trigonométricas hiperbólicas. Estas funções elementares caracterizam-se por possuírem propriedades matemáticas bem conhecidas há mais de cem anos e por possuirem representações conhecidas, como em séries em potências, por exemplo, que permitem o seu cálculo numérico.

Já as funções ditas "especiais" têm como principal característica definidora a frequência com que as mesmas surgem em problemas físicos, o que justifica a definição de uma nova função matemática. Muitas dessas funções não podem ser representadas por funções elementares, mas algumas sim, como é o caso dos polinômios ortogonais. As funções especiais possuem uma definição básica que pode ser na forma de uma integral ou como solução de uma determinada equação diferencial. Entretanto, quase todas funções especiais também podem ser representadas por séries de Taylor ou por outro tipo de representação em séries, o que permite o seu cálculo numérico.

Neste capítulo, serão apresentadas algumas das funções especiais mais comuns na física-matemática.

8.1 A FUNÇÃO GAMA E FUNÇÕES RELACIONADAS

A primeira menção da agora denominada *função gama* ocorreu em 1729 em uma correspondência entre os matemáticos Leonhard Euler (1707 – 1783) e Christian Goldbach (1690 – 1764). A função gama é provavelmente a função especial mais comum na física-matemática, porque ocorre em toda série de Taylor ou Maclaurin, uma vez que o fatorial de um número inteiro é um caso da função gama, mas também aparece em séries quando o argumento é semi-inteiro ou racional.

A forma mais geral da função gama é o mapeamento[1] $\Gamma(z) : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$. A sua primeira definição é devida a Euler, que buscava representar o fatorial $n!$ de um número inteiro em termos de quantidades algébricas simples. Esta definição é

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1.2.3.\cdots.n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z \quad (z \neq 0, -1, -2, -3, \dots). \tag{8.1a}$$

A definição mais empregada atualmente é a integral imprópria, denominada ***integral de Euler***,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0), \tag{8.1b}$$

sendo que quando $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ é necessário empregar a continuação analítica.

De acordo com estas definições, a função $\Gamma(z)$ é uma função meromórfica[2] sem raízes e com polos simples com resíduos[3]

$$\operatorname*{Res}_{z\to -n} \Gamma(z) = \lim_{z\to -n} (z+n)\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!} \ (n \in \mathbb{N}),$$

[1] Ver definição 2.22 de uma função de uma variável.
[2] Isto é, possui apenas polos em uma região finita do plano complexo.
[3] Ver seção 6.9.1.

sendo que a expressão dos resíduos de $\Gamma(z)$ é deduzida na expressão (8.5) abaixo.

Por sua vez, a sua recíproca $1/\Gamma(z)$ é uma função inteira, com raízes nos polos de $\Gamma(z)$. A figura 8.1 mostra os gráficos de $\Gamma(x)$ e $1/\Gamma(x)$ ao longo do eixo real x. Observa-se que $\Gamma(x)$ é contínua para $x > 0$, mas apresenta polos em $x = 0, -1, -2, \dots$. Estes mesmos pontos são as raízes da função $1/\Gamma(x)$.

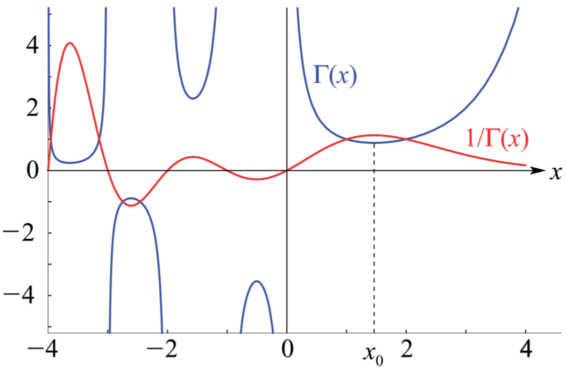

Figura 8.1: Gráficos de $\Gamma(x)$ e $1/\Gamma(x)$ no eixo real.

Uma definição alternativa da função $1/\Gamma(z)$ é devida a Weierstrass (1856),[4] em termos do produto infinito

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-z/n} \right], \tag{8.1c}$$

onde γ é a constante de Euler, definida por

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right] = 0.57721566490153286060651209008240243104 22\dots.$$

8.1.1 A propriedade recursiva fundamental

A propriedade fundamental obedecida pela função gama é a sua recursividade. Ou seja, tomando a definição (8.1b) calculada em $z+1$ e integrando por partes, resulta

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = \cancelto{0}{-t^z e^{-t}\Big|_0^\infty} + z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt,$$
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{8.2}$$

A partir desta fórmula recursiva, outra importante propriedade surge. Observa-se que

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1.$$

Então, de (8.2), $\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2$, $\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3!$, e assim por diante. Ou seja,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

a qual é válida inclusive para calcular $0! = \Gamma(1) = 1$.

Neste sentido, a função gama é a generalização do fatorial de um número inteiro positivo e pode ser interpretada como o fatorial de um número não natural.

Pela definição (8.1b), a função gama é analítica no semiplano $\operatorname{Re} z > 0$. Mas, de acordo com a propriedade recursiva (8.2), pode-se escrever

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

e com isso obter a continuação analítica de $\Gamma(z)$ no semiplano $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ parte por parte, desde que z não seja um inteiro não positivo.

8.1.2 Fórmula de reflexão

Uma outra importante propriedade da função gama é a fórmula de reflexão. Partindo da definição (8.1b), calcula-se

$$\Gamma(z+1)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty s^z e^{-s} ds \int_0^\infty t^{-z} e^{-t} dt = \int_0^\infty \int_0^\infty ds dt \left(\frac{s}{t} \right)^z e^{-(s+t)}.$$

[4]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897), matemático alemão, muitas vezez chamado “pai da análise moderna”.

Transformando agora das variáveis $\{s,t\}$ para $u=s+t$ e $v=s/t$, o Jacobiano da transformação, tal que $dsdt=Jdudv$, é

$$J=\frac{\partial\left(s,t\right)}{\partial\left(u,v\right)}=\begin{Vmatrix}\partial s/\partial u & \partial t/\partial u\\ \partial s/\partial v & \partial t/\partial v\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}v/\left(1+v\right) & 1/\left(1+v\right)\\ u/\left(1+v\right)^{2} & -u/\left(1+v\right)^{2}\end{Vmatrix}=\frac{u}{\left(1+v\right)^{2}}.$$

Ou seja,

$$\Gamma\left(1+z\right)\Gamma\left(1-z\right)=\int_{0}^{\infty}\frac{v^{z}dv}{\left(1+v\right)^{2}}\int_{0}^{\infty}du\,ue^{-u}.$$

A integração em u é trivial, resultando igual à unidade. Já a integral em v pertence à classe de integrais discutida na seção 6.9.4.5.[5]

Assim, obtém-se as seguintes fórmulas de reflexão,

$$\Gamma\left(1+z\right)\Gamma\left(1-z\right)=\frac{\pi z}{\operatorname{sen}\pi z}\qquad\left(z\notin\mathbb{Z}\right)\tag{8.3a}$$

$$\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(1-z\right)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}\qquad\left(z\notin\mathbb{Z}\right)\tag{8.3b}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)=\frac{\pi}{\cos\pi z}\qquad\left(z+\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}\right).\tag{8.3c}$$

Estas fórmulas também pode ser utilizadas para a continuação analítica de $\Gamma\left(z\right)$ no semiplano esquerdo.

8.1.3 A DECOMPOSIÇÃO DE PRYM

Retornando à definição (8.1b), divide-se a integral de Euler como

$$\Gamma\left(z\right)=\int_{0}^{1}t^{z-1}e^{-t}dt+\int_{1}^{\infty}t^{z-1}e^{-t}dt,$$

sendo que a segunda integral é uma função inteira em z.[6]

Como a primeira integral é definida, pode-se desenvolver e^{-t} em uma série de Maclaurin e integrar termo a termo, uma vez que a série converge uniformemente, de onde resulta

$$\Gamma\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{n!\left(z+n\right)}+\int_{1}^{\infty}t^{z-1}e^{-t}dt,\tag{8.4}$$

a qual é válida para $z\neq-n$ $(n=0,1,2,\dots)$. Calculando o raio de convergência[7] da série, conclui-se que ela converge para qualquer valor $z\in\mathbb{C}$. Portanto, (8.4) é uma representação de $\Gamma\left(z\right)$ válida em todos os pontos $z\neq0,-1,-2,-3,\dots$.

Observa-se agora, a partir de (8.4), que

$$\lim_{z\to-n}\left(z+n\right)\Gamma\left(z\right)=\lim_{z\to-n}\left(z+n\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{m}}{m!\left(z+m\right)}+\underbrace{\lim_{z\to-n}\left(z+n\right)\int_{1}^{\infty}t^{z-1}e^{-t}dt}_{=0},$$

$$\lim_{z\to-n}\left(z+n\right)\Gamma\left(z\right)=\frac{\left(-1\right)^{n}}{n!},\tag{8.5}$$

a qual determina os resíduos de $\Gamma\left(z\right)$ nos polos em $z=-n$ $(n\in\mathbb{N})$.

8.1.4 FÓRMULA DE DUPLICAÇÃO

Uma outra identidade importante é a *fórmula de duplicação de Legendre*, dada por

$$\Gamma\left(2z\right)=\pi^{-1/2}2^{2z-1}\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right).\tag{8.6}$$

A demonstração desta fórmula será realizada na seção 8.1.7 abaixo.

[5]Ver também exemplo 6.34.
[6]Ver seção 6.4.5.
[7]Ver seção 5.2.2.2.

8.1.5 Valores especiais

É possível calcular vários valores especiais para $\Gamma(z)$ a partir da definição ou das propriedades apresentadas acima. Por exemplo, já foi visto na seção 8.1.1 que

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Agora, retornando à definição (8.1b) e fazendo a troca de variável $t \to t^2$ na integral, resulta a definição alternativa

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty t^{2z-1} e^{-t^2} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0). \tag{8.7}$$

Portanto,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt \Longrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

O mesmo resultado pode ser obtido a partir de (8.3b).

A partir deste último resultado e de repetidas aplicações de (8.2), obtém-se

$$\dots, \Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}, \qquad \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}, \qquad \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi},$$
$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}, \qquad \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}, \dots.$$

A generalização para qualquer número semi-inteiro é realizada a partir de indução matemática e com a definição do duplo fatorial de um número ímpar. Este último é o número $n!!$ (n ímpar) tal que

$$n!! = n \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 1, \text{ para } n \geqslant 1.$$

Esta quantidade obedece a relação de recorrência

$$n!! = n(n-2)!!,$$

a qual pode ser invertida e escrita

$$n!! = \frac{(n+2)!!}{n+2},$$

a qual permite estender o conceito de fatorial duplo para números ímpares negativos:

$$(-1)!! = \frac{1!!}{1} = 1, \qquad (-3)!! = \frac{(-1)!!}{-1} = -1, \qquad (-5)!! = \frac{(-3)!!}{-3} = \frac{1}{3}, \dots.$$

Observa-se que a seguinte expressão é válida,

$$(-n)!! \times n!! = (-1)^{(n-1)/2} n \qquad (n = 1, 3, 5, \dots).$$

Com a definição do fatorial duplo, obtém-se então a fórmula generalizada

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

8.1.6 Expansões em série

As expansões em séries de potências das funções especiais são alguns dos recursos mais empregados para o cálculo numérico das funções, além de fornecer informações importantes a respeito das propriedades matemáticas das mesmas. Nesta seção, serão discutidas expansões da função $\Gamma(z)$ nas vizinhanças da origem, bem como a sua expansão assintótica.

8.1.6.1 Expansões em séries de potências

Busca-se primeiro uma expansão em série para $\ln\Gamma(z+1)$. Formalmente, a série de Maclaurin desta função é escrita

$$\ln\Gamma(z+1)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k}{dz^k}\ln\Gamma(z+1)\bigg|_{z=0}\right)z^k.$$

Introduzindo as definições das funções digama (8.12) e poligama (8.16), pode-se escrever

$$\ln\Gamma(z+1)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_k}{k}(-z)^k\quad(|z|<1),\tag{8.8}$$
$$S_1=\gamma,\quad S_k=\zeta(k)\ (k\geqslant 2),$$

onde o raio de convergência segue da definição da função $\zeta(s)$.

Busca-se agora a expansão para a função $1/\Gamma(z)$. Escrevendo primeiro

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k,$$

onde, obviamente, $a_0=1$. Tomando a sua derivada logarítmica, obtém-se

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,a_{k+1}z^k\right)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-)^kS_{k+1}z^k\right),$$

onde foi introduzida a série (8.8). Manipulando o lado direito de acordo com a fórmula (5.7) para o produto de séries, obtém-se a relação de recorrência

$$(k+1)\,a_{k+1}=\sum_{r=0}^{k}(-)^rS_{r+1}a_{k-r}\quad(k\geqslant 0).$$

Finalmente, empregando a fórmula de recursão da função gama, obtém-se a expansão

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\sum_{k=1}^{\infty}c_kz^k,\ \text{onde}$$
$$c_1=1,\quad c_2=\gamma,\quad (k+1)\,c_{k+2}=\sum_{r=0}^{k}(-)^rS_{r+1}c_{k+1-r}\ \ (k\geqslant 1).$$

Os primeiros termos desta expansão são[8]

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=z+\gamma z^2+\frac{1}{2}\left(\gamma^2-\frac{\pi^2}{6}\right)z^3+\cdots$$

8.1.6.2 Expansão assintótica: a fórmula de Stirling

A *fórmula de Stirling* foi originalmente derivada para se obter uma aproximação para $n!$ quando $n\to\infty$. Esta fórmula é

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}n^ne^{-n}\quad(n\to\infty).$$

Como $n!=\Gamma(n+1)$, busca-se agora a expansão assintótica completa para a função gama.

Parte-se então da representação integral (8.15b) da função digama. Integrando ambos os lados, resulta

$$\ln\Gamma(z+1)=K+\left(z+\frac{1}{2}\right)\ln z-z+F(z),$$

onde

$$F(z)=\int_0^{\infty}\beta(t)\,e^{-zt}dt$$

[8] Alguns valores de $\zeta(n)$ para n inteiro positivo estão em https://dlmf.nist.gov/25.6.

e K é uma constante a ser determinada. Para tanto, aplica-se o logaritmo na fórmula de duplicação (8.6), fazendo primeiro $z \to z + {}^{1}/_{2}$, isto é,

$$2z \ln 2 + \ln \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) + \ln \Gamma(z+1) - \ln \Gamma(2z+1) = \frac{1}{2} \ln \pi.$$

Considera-se agora a função $F(z)$. Da definição de $\beta(t)$ em (8.15b) e da análise da função geradora dos números de Bernoulli, discutidos na seção 5.1.2.1, observa-se que

$$\beta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \frac{t^{2n-2}}{(2n)!}.$$

Portanto,

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} \int_0^{\infty} t^{2n-2} e^{-zt} dt = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{n(2n-1)} \frac{1}{z^{2n-1}},$$
$$F(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{B_2}{z} + \frac{B_4}{6z^3} + \frac{B_6}{15z^5} + \cdots\right).$$

Ou seja, $F(z) \to 0$ para $z \to \infty$.

Inserindo então a representação integral calculada para $z + {}^{1}/_{2}$, $z+1$ e $2z+1$ na fórmula da duplicação e fazendo as simplificações possíveis, resulta

$$K + \frac{1}{2} + z \ln\left(\frac{2z-1}{2z}\right) + F\left(z - \frac{1}{2}\right) + F(z) - F(2z) = \frac{1}{2} \ln(2\pi).$$

Fazendo $z \to \infty$ neste resultado, as funções $F(z)$, $F(z - {}^{1}/_{2})$ e $F(2z)$ todas se anulam. Além disso,

$$\lim_{z\to\infty} z \ln\left(\frac{2z-1}{2z}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Portanto, a constante vale

$$K = \frac{1}{2} \ln(2\pi).$$

Resulta então

$$\ln \Gamma(z+1) = \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \left(z + \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{n(2n-1)} \frac{1}{z^{2n-1}},$$
$$\ln \Gamma(z) = \ln\left(\sqrt{2\pi} z^{z-1/2} e^{-z}\right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{n(2n-1)} \frac{1}{z^{2n-1}},$$
$$\ln \Gamma(z) = \ln\left(\sqrt{2\pi} z^{z-1/2} e^{-z}\right) + \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \frac{1}{1260z^5} - \frac{1}{1680z^7} + \cdots.$$

Tomando a exponencial em ambos os lados, resulta então

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-1/2} e^{-z} \exp\left(\frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \frac{1}{1260z^5} - \frac{1}{1680z^7} + \cdots\right).$$

O último termo é a exponencial de uma série, a qual por sua vez pode ser colocada na forma de uma série de potências de acordo com a fórmula (5.12). De acordo com (5.12c),

$$\exp\left(\frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \frac{1}{1260z^5} - \frac{1}{1680z^7} + \cdots\right) = 1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51840z^3} - \frac{571}{2488320z^4} + \cdots.$$

Portanto, resulta a expansão assintótica

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-1/2} e^{-z}\left(1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51840z^3} - \frac{571}{2488320z^4} + \cdots\right). \tag{8.9}$$

Da fórmula de Stirling acima, obtém-se a expansão assintótica de $1/\Gamma(z)$ pela aplicação da regra (5.10),

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^{1/2-z} e^{z}\left(1 - \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} + \frac{139}{51840z^3} - \frac{571}{2488320z^4} + \cdots\right).$$

8.1.7 A FUNÇÃO BETA

A função beta, representada por $B(p,q)$, é intimamente relacionada à função gama, na forma de uma razão de gamas. A função beta aparece por exemplo em muitas expansões em série de outras funções especiais.

Uma maneira de definir a função beta é diretamente por

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\quad(\operatorname{Re}p>0,\ \operatorname{Re}q>0). \tag{8.10}$$

Retornando agora à definição (8.7), calcula-se o produto

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty s^{2p-1}e^{-s^2}ds\int_0^\infty t^{2q-1}e^{-t^2}dt.$$

Mudando as variáveis da integração dupla das coordenadas Cartesianas $\{s,t\}$ para coordenadas plano-polares $\{r,\theta\}$, sendo $s=r\cos\theta$ e $t=r\operatorname{sen}\theta$, resulta

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q)&=4\int_0^\infty dr\,r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}\int_0^{\pi/2}d\theta\,\cos^{2p-1}\theta\operatorname{sen}^{2q-1}\theta\\&=2\Gamma(p+q)\int_0^{\pi/2}d\theta\,\cos^{2p-1}\theta\operatorname{sen}^{2q-1}\theta,\end{aligned}$$

onde a definição (8.7) foi novamente empregada. De acordo com a definição (8.10), resultam assim as seguintes definições alternativas, em termos das *integrais beta de Euler*,

$$B(p,q)=2\int_0^{\pi/2}d\theta\,\cos^{2p-1}\theta\operatorname{sen}^{2q-1}\theta \tag{8.11a}$$

$$=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \tag{8.11b}$$

$$=2\int_0^1 x^{2p-1}\left(1-x^2\right)^{q-1}dx \tag{8.11c}$$

$$=\int_0^\infty u^{p-1}(1+u)^{-(p+q)}du, \tag{8.11d}$$

sendo que a segunda forma foi obtida a partir da transformação $t=\cos^2\theta$, ao passo que a terceira forma foi obtida a partir de $t=x^2$ e, finalmente, a quarta forma foi obtida por $t=u/(1+u)$.

As definições da função beta servem para demonstrar a fórmula de Legendre da duplicação (8.6), conforme segue.

Fórmula de duplicação de Legendre. Considera-se primeiro (8.11b) para os argumentos,

$$B\left(z+\frac{1}{2},z+\frac{1}{2}\right)=\int_0^1 t^{z-1/2}(1-t)^{z-1/2}dt.$$

Fazendo a substituição $t=(1+s)/2$, resulta

$$B\left(z+\frac{1}{2},z+\frac{1}{2}\right)=2^{-2z}\int_{-1}^1\left(1-s^2\right)^{z-1/2}ds=2^{-2z+1}\int_0^1\left(1-s^2\right)^{z-1/2}ds.$$

Contudo, a última integral também pode ser colocada em termos da função beta, de acordo com (8.11c). Desta forma, chega-se à identidade

$$B\left(z+\frac{1}{2},z+\frac{1}{2}\right)=2^{-2z}B\left(\frac{1}{2},z+\frac{1}{2}\right),$$

a qual fornece finalmente a fórmula de duplicação (8.6),

$$\Gamma(2z)=\pi^{-1/2}2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right).$$

□

8.1.8 A DERIVADA LOGARÍTMICA DA FUNÇÃO GAMA: AS FUNÇÕES DIGAMA E POLIGAMA

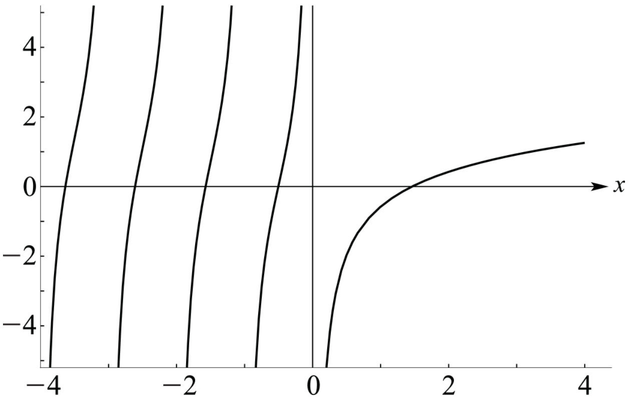

Figura 8.2: Gráfico de $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$.

A derivada de $\Gamma(z)$ *per se* não é encontrada com frequência na teoria das funções especiais. Muito mais frequente é a *derivada logarítmica*, também denominada *função digama*,

$$\psi(z) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \tag{8.12}$$

A figura 8.2 mostra o gráfico de $\psi(x)$ ao longo do eixo real. A função $\Gamma(z)$ é meromórfica, com polos simples em $z = -n$.

Uma expressão simples para a função digama é obtida a partir da representação de Weierstrass (8.1c). Tomando o logaritmo desta expressão, obtém-se

$$\ln\Gamma(z) = -\gamma z + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z}{n+1} - \ln z - \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{z}{n}\right).$$

Finalmente, derivando em relação a z, resulta

$$\psi(z) = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z}\right), \quad (z \neq 0, -1, -2, \dots), \tag{8.13}$$

de onde segue o valor especial

$$\psi(1) = -\gamma.$$

A partir da fórmula de recursão (8.2) é fácil observar que a função digama satisfaz a sua própria fórmula de recursão, dada por

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}.$$

Por outro lado, tomando o logaritmo de (8.3b) e derivando, obtém-se a fórmula de reflexão

$$\psi(z) - \psi(1-z) = -\frac{\pi}{\tan\pi z} \quad (z \neq 0, -1, -2, \dots), \tag{8.14}$$

a qual pode ser empregada para calcular a continuação analítica de $\psi(z)$.

Observa-se que $\psi(z+1)$ também pode ser obtida a partir da representação integral

$$\psi(z+1) = -\gamma + \int_0^1 \frac{1-t^z}{1-t}dt \quad (\operatorname{Re} z > -1). \tag{8.15a}$$

A demonstração desta fórmula parte da identidade

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{N-1} t^n + \frac{t^N}{1-t}, \text{ para } N \geqslant 1.$$

Então,

$$\psi(z+1) = -\gamma + \sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z}\right) + \int_0^1 \frac{(1-t^z)\,t^N}{1-t}dt.$$

Como a função $(1-t^z)/(1-t)$ é limitada em $0 \leqslant t \leqslant 1$ quando $\operatorname{Re} z < 1$, então

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^1 \frac{(1-t^z)\,t^N}{1-t}dt = 0,$$

de onde segue (8.13).

Partindo de (8.15a), uma outra representação integral pode ser obtida. Em primeiro lugar, (8.15a) pode ser escrita

$$\psi(z+1) = -\gamma + \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{1-\epsilon}\frac{1-t^z}{1-t}dt = -\gamma - \lim_{\epsilon\to 0}\left(\ln\epsilon + \int_0^{1-\epsilon}\frac{t^z}{1-t}dt\right).$$

Mediante uma mudança apropriada na variável de integração, obtém-se

$$\psi(z+1) = -\gamma - \lim_{\epsilon\to 0}\left(\ln\epsilon + \int_\epsilon^\infty \frac{e^{-zt}}{e^t-1}dt\right).$$

Por outro lado, de (8.13), observa-se que $\Gamma'(1) = -\gamma$. Mas, mediante uma derivação direta de (8.1b), conclui-se que

$$-\gamma = \int_0^\infty \ln t e^{-t}dt \Longrightarrow \begin{aligned} -\gamma &= \lim_{\epsilon\to 0}\left(\ln z + \ln\epsilon + \int_{\epsilon z}^\infty t^{-1}e^{-t}dt\right) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left(\ln z + \ln\epsilon + \int_\epsilon^\infty t^{-1}e^{-zt}dt\right). \end{aligned}$$

Combinando as duas expressões, obtém-se

$$\psi(z+1) = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\ln z + \int_\epsilon^\infty \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{e^t-1}\right)e^{-zt}dt\right],$$

resultando finalmente

$$\psi(z+1) = \ln z + \frac{1}{2z} - \int_0^\infty t\beta(t)\,e^{-zt}dt \quad (\mathrm{Re}\,z > 0), \tag{8.15b}$$

onde

$$\beta(t) = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right).$$

As funções

$$\psi^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n}\psi(z) = \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\ln\Gamma(z) \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{8.16}$$

são denominadas *funções poligama*. A partir da derivação direta de (8.13), estas são dadas por

$$\psi^{(n)}(z) = (-1)^{n+1} n! \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(k+z)^{n+1}} \quad \left(\begin{matrix} z \neq 0, -1, -2, \dots \\ n \geqslant 1 \end{matrix}\right),$$

de onde seguem os valores especiais

$$\psi^{(n)}(1) = (-1)^{n+1} n!\zeta(n+1),$$

sendo

$$\zeta(n+1) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{n+1}}.$$

A função $\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty n^{-s}$ é conhecida como a *função zeta de Riemann*.[9]

As funções poligama satisfazem a relação de recorrência

$$\psi^{(n)}(z+1) = \psi^{(n)}(z) + (-1)^n \frac{n!}{z^{n+1}}.$$

Derivando diretamente (8.14), obtém-se as fórmulas de reflexão

$$\psi^{(n)}(z) - (-1)^n \psi^{(n)}(1-z) = -\pi\frac{d^n}{dz^n}\cot(\pi z) \quad \left(\begin{matrix} z \neq 0, -1, -2, \dots \\ n \geqslant 1 \end{matrix}\right).$$

8.1.9 O SÍMBOLO DE POCHHAMMER

O *símbolo de Pochhammer* $(a)_n$ é outra quantidade relacionada à função gama. Este símbolo é usualmente empregado na representação em séries de potências das funções hipergeométricas. Em termos da função gama, a sua definição é

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \quad (a \neq 0, -1, -2, \dots). \tag{8.17a}$$

[9] Informações sobre a função $\zeta(s)$ podem ser obtidas em https://dlmf.nist.gov/25.

Quando $a = -n$ $(n \in \mathbb{N})$, existe a definição alternativa

$$(a)_n = \frac{(-1)^n (-a)!}{(-a-n)!}. \tag{8.17b}$$

A partir desta definição, observa-se que

$$(0)_0 = 1.$$

Quando $n \in \mathbb{N}^+$ (*i.e.*, $n = 1, 2, 3, \ldots$), o símbolo de Pochhammer é

$$(a)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (a+k),$$

conforme pode ser verificado a partir da definição (8.17a). Ou seja,

$$(a)_0 = 1, \qquad (a)_1 = a, \qquad (a)_2 = a(a+1), \qquad (a)_3 = a(a+1)(a+2), \qquad \ldots.$$

Por outro lado, verifica-se também que

$$(a)_{-n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{a-k} \quad \left(n \in \mathbb{N}^+\right),$$

$$(a)_{-1} = \frac{1}{a-1}, \quad (a)_{-2} = \frac{1}{(a-1)(a-2)}, \quad (a)_{-3} = \frac{1}{(a-1)(a-2)(a-3)}, \quad \ldots.$$

Estes resultados mostram que

$$(0)_n = 0, \quad (0)_{-n} = \frac{(-1)^n}{n!} \qquad \left(n \in \mathbb{N}^+\right).$$

Algumas propriedades importantes de $(a)_n$ são:

$$\begin{aligned}
(1-b)_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (n!)^2}{(n-k)!(k!)^2} (b)_k \quad \left(n \in \mathbb{N}^+\right) \\
(a+b)_n &= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(a)_k (b)_{n-k}}{k!(n-k)!} \quad (n \in \mathbb{N}) \\
(a)_{m+n} &= (a)_m (a+m)_n \\
(a)_{2n} &= 2^{2n} \left(\frac{a}{2}\right)_n \left(\frac{a+1}{2}\right)_n \\
(a)_n &= \frac{(-1)^n}{(1-a)_{-n}} \quad (n \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Por fim, relações de recorrência entre vizinhos imediatos ou distantes são:

$$\begin{aligned}
(a)_n &= \frac{a+n-1}{a-1} (a-1)_n = \frac{a}{a+n} (a+1)_n \\
(a)_n &= (a+n-1)(a)_{n-1} = \frac{(a)_{n+1}}{a+n} \\
(a)_n &= \frac{\Gamma(a-m)\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)\Gamma(a-m+n)} (a-m)_n = \frac{\Gamma(a+m)\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)\Gamma(a+m+n)} (a+m)_n \\
(a)_n &= \frac{(a)_{n-m}}{(a+n)_{-m}} = \frac{(a)_{n+m}}{(a+n)_m} \\
(a)_n &= \frac{(a-m)_{n+m}}{(a-m)_m} = (a)_m (a+m)_{n-m}.
\end{aligned}$$

[EM CONSTRUÇÃO]

REFERÊNCIAS

ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J.; HARRIS, F. E. **Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide**. 7th. Ed. New York: Elsevier Science, 2013. 1205 + xiii pp. ISBN 9780123846549. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=qLFo%5C_Z-PoGIC>.

ASKEY, R. A.; ROY, R. Gamma Function. In: OLVER, Frank W. J.; LOZIER, Daniel W.; BOISVERT, Ronald F.; CLARK, Charles W. (Ed.). **NIST Handbook of Mathematical Functions**. New York: Cambridge, 2010. cap. 5, p. 135–147. ISBN 978-0-521-19225-5. Disponível em: <http://dlmf.nist.gov/5>.

LUKE, Yudell L. **The Special Functions and Their Approximations**. San Diego: Elsevier Science, 1969. v. I. (Mathematics in Science and Engineering). 349 + xx pp. ISBN 9780080955605. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=huu06mKbVoEC>.

RILEY, K. F.; HOBSON, M. P.; BENCE, S. J. **Mathematical Methods for Physics and Engineering**. 3rd. Ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 1333 + xxvii pp. ISBN 9781139450997. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=Mq1nlEKhNcsC>.

TEMME, Nico M. **Special Functions: An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics**. New York: Wiley, 1996. (Wiley-Interscience publication). 374 + xiii pp. ISBN 9780471113133. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=7dQko2CndYoC>.