5

Séries e Séries de Potências

Séries estão entre os recursos mais utilizados na física, física-matemática e engenharia. Séries podem ser usadas para representar funções, para resolver equações diferenciais e solucionar outros problemas em análise funcional. Séries também são um dos recursos mais empregados em métodos computacionais para calcular aproximações de funções e outras quantidades em análise. Neste capítulo será realizada uma breve introdução de séries em geral, para em seguida apresentar a definição e propriedades do tipo de série mais empregada em física-matemática: a *série de potências.*

5.1 Sequências e seus limites

Uma *série* é coloquialmente interpretada como uma soma de infinitos termos. Contudo, esta concepção não é rigorosamente correta. A maneira usual de atribuir significado para a soma de um número infinito de termos é por meio de uma sequência de somas parciais. Sequências também são importantes na análise matemática em geral.

5.1.1 Definição e propriedades de sequências

Seja U um conjunto e u_1, u_2, u_3, $\dots$, uma lista de elementos de U. Uma ***sequência*** ou ***sucessão*** de elementos de u é uma função[1] do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ em U. Seja $u : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{K}$ a função sobre U que mapeia os números naturais em elementos do conjunto $\mathbb{K}$. Na física-matemática, as sequências de interesse são numéricas ($U \subseteq \mathbb{R}$ ou $U \subseteq \mathbb{C}$) ou de funções.[2] Será empregada a notação (u_n) para representar a sequência, onde $u_n = u(n)$ é o valor da sequência para $n \in \mathbb{N}$. Outras notações são $(u_n)_{n=1}^{\infty}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_1, u_2, \dots)$, ou ainda $\{u_n\}$.

Toda sequência é formada por uma lista infinita de elementos de U, mas a aplicação não necessita ser injetiva, de modo que os elementos da sequência não precisam ser todos distintos. Se u representa a aplicação sobre U, será empregada a notação (u_n) para representar a sequência, onde $u_n = u(n)$ é o valor da sequência para $n \in \mathbb{N}$. Outras notações são $(u_n)_{n=1}^{\infty}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_1, u_2, \dots)$, ou ainda $\{u_n\}$.

Exemplo 5.1. Sequências podem ser definidas por fórmulas tais como

$$u_n = \frac{n}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Então, $u_0 = 0$, $u_1 = 1/2$, $u_2 = 2/3$, $\dots$; ou seja, a sequência é

$$(u_n) = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots.$$

Ou, a sequência pode ser definida de forma recursiva, como em

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 0, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{(a_{n+1} - a_n)^2}{2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Neste caso,

$$(a_n) = 1, 0, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{81}{128}, \dots.$$

[1] Ver definição 2.22.

[2] Ver definição 7.1 de uma classe funcional, *i.e.*, de conjuntos de funções.

Se a partir de um certo valor n suficientemente grande os elementos de uma sequência numérica permanecem na vizinhança de um número arbitrariamente pequeno, diz-se que esta sequência possui um *limite*, sendo neste caso classificada como uma ***sequência convergente***. Em caso contrário, a sequência é classificada como ***divergente***. Formalmente, se (u_n) é uma sequência numérica, o número $u \in \mathbb{R}$ ou $u \in \mathbb{C}$ é o ***limite*** de (u_n) se, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|u_n - u| < \epsilon,$$

para todo $n > N$.

Para uma sequência de números reais, isto equivale a mostrar que todos os seus elementos, para $n > N$, estão contidos dentro do intervalo $(u - \epsilon, u + \epsilon)$. Sempre que possível, emprega-se técnicas de cálculo de limites para a determinação do limite da sequência, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u,$$

sempre que possível. Por exemplo, a primeira sequência no exemplo 5.1 é convergente, com limite

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

pois,

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \epsilon,$$

para $n > \frac{1}{\epsilon} - 1$.

Exemplo 5.2 (***Sequência de Fibonacci***)**.** Uma das sequências mais conhecidas é a *sequência de Fibonacci* (F_n), definida pela recursão

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \ \ (n \in \mathbb{N})\,.$$

Esta sequência é

$$(F_n) = 0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots.$$

A sequência de Fibonacci é divergente, mas a sequência das razões dos termos consecutivos,

$$r_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} \ \ (n \geqslant 1) : \quad (r_n) = 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \dots$$

converge para um número bem conhecido. Para se obter o limite de (r_n), manipula-se a relação de recorrência da sequência de Fibonacci,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \Rightarrow \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{1}{F_{n+1}/F_n}.$$

Como o limite existe, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi,$$

o que leva à equação para φ,

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \Longrightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \Longrightarrow \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887\dots,$$

o qual é denominado o *número de ouro* ou a *razão de ouro.*

Exemplo 5.3 (***Sequência geométrica***)**.** A sequência $(r^n) = 0, r, r^2, r^3, \dots$ é denominada *sequência geométrica.* Se $|r| < 1$, então a sequência é convergente, com

$$\lim r^n = 0.$$

Se $|r| >1$, a sequência é divergente. Se $r = 1$ a sequência converge, ao passo que se $r = -1$ a sequência é divergente.

Algumas definições, teoremas e propriedades importantes sobre limites serão apresentados agora.

Teorema 5.1. *Uma sequência possui no máximo um limite.*

Demonstração. Suponha, ao contrário, que a sequência possua dois limites, u_1 e u_2. Então, dado $\epsilon > 0$, existem $\{N_1, N_2\} \subset \mathbb{N}$ tais que $|u_n - u_1| < \epsilon$, para todo $n > N_1$, e $|u_n - u_2| < \epsilon$, para todo $n > N_2$. Portanto, se $n = \max(N_1, N_2)$ e $n > N$,

$$|u_2 - u_1| = |u_n - u_1 + u_2 - u_n| \leqslant |u_n - u_1| + |u_n - u_2| < 2\epsilon.$$

Mas, a inegualdade $|u_2 - u_1| < 2\epsilon$ somente pode ser satisfeita se $u_1 = u_2$, pois, em caso contrário, basta escolher $\epsilon = |u_1 - u_2|/2$ para violar a inegualdade. □

Definição 5.1. Uma sequência (u_n) é ***limitada*** se existe um $R > 0$ tal que $|u_n| \leqslant R$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma sequência é ***ilimitada*** se não for limitada.

Teorema 5.2. *Toda sequência convergente é limitada. A recíproca não é verdadeira.*

Demonstração. Suponha que $\lim u_n = u$. Se $\epsilon = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|u_n - u| < 1$ para todo $n > N$. Portanto,

$$|u_n| = |u_n - u + u| \leqslant |u_n - u| + |u| < 1 + |u|, \ \forall n > N.$$

Definindo então $M = \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|, 1 + |u|)$, resulta que $|u_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para verificar que a recíproca não é verdadeira, basta escolher uma sequência limitada que não seja convergente; por exemplo, a sequência $\{u_n\} = \{(-)^n; n \in \mathbb{N}\}$ é limitada ($|u_n| = 1$), mas não é convergente. □

Um detalhamento maior acerca de sequências limitadas também é realizado.

Definição 5.2 (*Sequências limitadas ou monotônicas*). Uma terminologia mais específica com relação a certas sequências é possível. Uma sequência (u_n) é dita ser

limitada superiormente: se existir um $M \in \mathbb{R}$ tal que $u_n \leqslant M$ para todo n;

limitada inferiormente: se existir um $m \in \mathbb{R}$ tal que $u_n \geqslant m$ para todo n;

limitada: se a sequência for limitada tanto superiormente quanto inferiormente;

monotonicamente crescente: (ou simplesmente **crescente**) se $u_n \leqslant u_{n+1}$ para todo n;

monotonicamente decrescente: (ou simplesmente **decrescente**) se $u_n \geqslant u_{n+1}$ para todo n;

monotônica: se é crescente ou decrescente;

estritamente crescente: se $u_n < u_{n+1}$ para todo n;

estritamente decrescente: se $u_n > u_{n+1}$ para todo n;

estritamente monotônica: se é estritamente crescente ou estritamente decrescente;

alternada: se u_n muda de sinal alternativamente, ou seja, se $u_n u_{n+1} < 0$ para todo n.

Sequências constantes são consideradas tanto crescentes quanto decrescentes.

Existe então o seguinte teorema.

Teorema 5.3. *Toda sequência crescente e limitada superiormente é convergente. Toda sequência decrescente e limitada inferiormente é convergente.*

Teorema 5.4 (Álgebra de limites para sequências reais convergentes). *Suponha que (a_n) e (b_n) sejam sequências reais convergentes, tais que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$. Então:*

***(ALS1)* (Lei da linearidade):** $\lim\limits_{n\to\infty} (ra_n + sb_n) = ra + sb$, *onde* $\{r, s\} \subset \mathbb{R}$.

***(ALS2)* (Lei do produto):** $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$.

***(ALS3)* (Lei do quociente):** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$, *desde que* $b \neq 0$.

***(ALS4)* (Lei da raiz):** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a}$, *desde que* $\sqrt[m]{a_n}$ *exista para todo* n *e* $\sqrt[m]{a}$ *exista.*

Teorema 5.5 (Regra do confronto para sequências). *Sejam (a_n), (b_n) e (c_n) três sequências tais que $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ para todo $n > N$, com $N \in \mathbb{N}$. Se*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L,$$

então $\lim_{n\to\infty} b_n = L$. Se $b_n \longrightarrow \infty$, então $c_n \longrightarrow \infty$. Se $c_n \longrightarrow -\infty$, então $b_n \longrightarrow -\infty$.

Uma *sequência de Cauchy* é aquela sequência cujos elementos se tornam arbitrariamente próximos entre si à medida que a sequência progride. Alternativamente, uma sequência de Cauchy pode ser definida quando, dada uma quantidade positiva ϵ arbitrariamente pequena, todos os elementos da mesma distam entre si por uma distância menor que ϵ, exceto possivelmente por um subconjunto finito de elementos da sequência. Este conceito é útil porque permite decidir se a sequência é convergente, sem necessariamente conhecer o seu limite.

Definição 5.3 (*Sequência de Cauchy*). Uma sequência $(u_n) \subset \mathbb{R}$ é denominada uma *sequência de Cauchy* se para todo $\epsilon < 0$ existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|u_m - u_n| < \epsilon$$

para todos $m, n > N$. De forma equivalente, a sequência (u_n) é dita *de Cauchy* se para todo $\epsilon < 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|u_{n+m} - u_n| < \epsilon$$

para todo $n > N$ e para todo $m \in \mathbb{N}$.

Teorema 5.6 (Critério de Cauchy para convergência). *Toda sequência real convergente é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência real tal que $\lim_{n\to\infty} u_n = u$. Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|u_n - u| < \frac{\epsilon}{2}, \forall n > N.$$

Portanto, para $m, n > N$ resulta

$$|u_n - u_m| \leqslant |u_n - u| + |u_m - u| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

e (u_n) é uma sequência de Cauchy. □

5.1.2 Algumas sequências importantes

Existem algumas sequências numéricas que surgem com tamanha frequência que foram nomeadas e estudadas com profundidade. Algumas destas sequências serão discutidas aqui. Maiores detalhes e outras sequências podem ser consultadas na *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS).[3]

5.1.2.1 Números de Bernoulli

Os números de Bernoulli foram nomeados devido aos estudos de Jakob Bernoulli para a generalização de somas finitas, tais como

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n, \qquad \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

Sabe-se que para $p \in \mathbb{N}$, a forma geral da soma é

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^p = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k} B_k n^{p+1-k},$$

onde a sequência $\{B_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ é formada pelos *números de Bernoulli*.[4]

[3] Em: https://en.wikipedia.org/wiki/On-Line_Encyclopedia_of_Integer_Sequences, ou https://pt.wikipedia.org/wiki/OEIS.
[4] OEIS: A027641/A027642.

A função geradora dos números de Bernoulli é

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n, \quad |z| < 2\pi.$$

Os primeiros números de Bernoulli são:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42},$$
$$B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad B_{14} = \frac{7}{6}, \quad B_{16} = -\frac{3617}{510}.$$

Nota-se que

$$B_{2n+1} = 0, \quad (-1)^{n+1} B_{2n} > 0, \qquad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

e outros números podem ser gerados a partir dos primeiros a partir da identidade

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0,$$

ou das relações de recorrência

$$B_{n+1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k-2} \frac{B_k}{k} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 0 \quad (n = 2, 3, \dots),$$
$$B_{n+1} = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{B_k}{n+2-k} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

5.2 SÉRIES NUMÉRICAS

Serão consideradas agora séries numéricas em geral, sua definição, algumas de suas principais propriedades e testes de convergência.

5.2.1 DEFINIÇÃO

Sejam $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ uma sequência infinita de termos, define-se a n-ésima soma parcial destes termos como

$$S_n = \sum_{m=0}^{n} u_m, \qquad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Ou seja, considera-se a sequência

$$(S_n) = S_0, S_1, S_2, \dots = u_0, (u_0 + u_1), (u_0 + u_1 + u_2), \dots$$

e levanta-se a questão sobre a convergência de (S_n), para a qual testes de convergência devem ser obtidos.

Definição 5.4 (*Série numérica*). A série $\sum_{m=0}^{\infty} u_m$ é dita ser ***convergente a S*** se a sequência de somas parciais (S_n), com

$$S_n = \sum_{m=0}^{n} u_m,$$

convergir para o número S, denominado a soma da série. Neste caso, emprega-se a notação

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_m = \lim_{n \to \infty} S_n = S.$$

Se a sequência (S_n) não convergir, então a série é dita ser ***divergente***. Se $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, diz-se que a série diverge para $+\infty$ ou $-\infty$, empregando a notação

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_m = \pm\infty.$$

Uma série divergente que não diverge para $\pm\infty$ é dita ser ***oscilante***.

Alguns exemplos de séries numéricas são apresentados a seguir

Exemplo 5.4. Seja a série $\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + \cdots$. A sequência (S_n) tem a soma parcial

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + \cdots + n.$$

Observa-se que sempre é possível escrever

$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + (n-(n-1)) + (n-n) = \underbrace{n + \cdots + n}_{(n+1)\text{ vezes}} - S_n,$$

então

$$S_n = n(n+1) - S_n \Longrightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2},\ (n = 1, 2, \dots).$$

Portanto, o limite da sequência é

$$\lim_{n\to\infty} S_n \longrightarrow \infty.$$

Portanto, esta série é divergente.

Exemplo 5.5 (*Série geométrica*). Uma série geométrica é aquela na qual a razão de termos sucessivos na soma é uma constante. Denotando esta constante por r, a série geométrica tem a forma

$$S(a,r) = \sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + \cdots,\ \text{com } a \neq 0.$$

Assim, o n-ésimo termo da sequência de somas parciais é

$$S_n(r) = \sum_{n=0}^{n} ar^n.$$

Mas,

$$S_n = a\left(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} + r^n\right) \Longrightarrow rS_n = a\left(r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + r^{n+1}\right).$$

Subtraindo as expressões resulta

$$(r-1)S_n = a\left(r^{n+1} - 1\right) \Longrightarrow S_n = a\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r},\quad (r \neq 1).$$

Se $|r| < 1$ o limite de S_n fica

$$S(a,r) = \lim_{n\to\infty} S_n = a\frac{1 - \lim_{n\to\infty} r^{n+1}}{1 - r} = \frac{a}{1 - r},$$

de acordo com o limite da sequência geométrica (exemplo 5.3).

Se $r = 1$, a série diverge, pois $S_n = an$. Se $r = -1$,

$$S_n(-1) = \frac{1}{2}\left[1 + (-)^n\right]a \Longrightarrow S_n(-1) = \begin{cases} a, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Como (S_n) não possui limite, a série diverge para $r = -1$.

Se $|r| > 1$ a série também não converge. Se $r > 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0. \end{cases}$$

Se $r < -1$, a série é oscilante.

5.2.2 Testes de convergência

Em muitas situações, o interesse estará nas propriedades gerais da série, ao invés de sua soma. Portanto, sempre que o valor inicial da série não for importante, será empregada a notação $\sum u_k$, ao invés de $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$. Boa parte dos testes de convergência apresentados nesta seção podem ser formulados em termos de teoremas, cujas demonstrações se baseiam em teoremas sobre as sequências de soma parcial, como o teorema 5.4, por exemplo.

5.2.2.1 TESTES GENÉRICOS

As seguintes propriedades valem para quaisquer séries.

1. ***(Unicidade da soma e linearidade das séries)*** A soma de uma série convergente é única. Além disso, se $\sum a_k$ e $\sum b_k$ são duas séries convergentes com somas A e B, respectivamente, então, para qualquer par de constantes α e β,
$$\sum (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum a_k + \beta \sum b_k = \alpha A + \beta B. \tag{5.1}$$
2. Se ou $\sum a_k$ ou $\sum b_k$ diverge e a outra converge, então a série $\sum (a_k + b_k)$ diverge.
3. ***(Critério de Cauchy para convergência de séries)*** Uma série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ é convergente se e somente se a sequência de somas parciais é uma sequência de Cauchy, *i. e.* , dado $\epsilon > 0$, deve existir um $N \in \mathbb{N}$ tal que
$$|S_m - S_n| = \left|\sum_{k=0}^{m} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k\right| = |u_{n+1} + \cdots + u_m| < \epsilon \text{ se } m > n > N;$$
ou, de forma equivalente,
$$|S_{n+p} - S_n| = |u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| < \epsilon \text{ se } n > N \text{ e } p \in \mathbb{N}.$$
4. Uma condição necessária, mas não suficiente, para a série $\sum u_k$ ser convergente é
$$\lim_{k\to\infty} u_k = 0.$$
5. Se $\lim u_k$ não existe, ou existe mas não é nulo, então a série $\sum u_k$ diverge.

5.2.2.2 SÉRIES ABSOLUTAMENTE OU CONDICIONALMENTE CONVERGENTES, OU SÉRIES DE TERMOS NÃO NEGATIVOS

Dada a série $\sum u_k$, pode-se formar uma nova série $\sum |u_k|$. Se esta nova série é convergente, então a série original $\sum u_k$ é dita ***absolutamente convergente***. Se uma série é convergente, mas não é absolutamente convergente, então esta é dita ***condicionalmente convergente***.

Já séries cujos termos são todos não negativos também possuem testes específicos. Para uma série $\sum u_k$, com $u_k \geqslant 0$ para todo k, vale $S_n = S_{n-1} + u_n$ e, assim, a sequência de somas parciais (S_n) é crescente, o que permite então usar o teorema 5.3 para se formular testes de convergência para séries de termos não negativos.

Existem então os seguintes testes.

1. ***(Teste de convergência absoluta)*** Uma série absolutamente convergente é sempre convergente. A recíproca não é verdadeira.
2. Suponha que $u_k \geqslant 0$ para todo k. Então a série $\sum u_k$ ou converge ou diverge para $+\infty$. Em particular, se a sequência (S_n) é superiormente limitada, então a série converge para $\sum u_k = \sup (S_n)$.
3. Se $u_k \geqslant 0$ para todo k, a série $\sum u_k$ converge se e somente se a sequência de somas parciais é limitada.
4. Se (u_k) for uma sequência decrescente de números reais positivos, uma condição necessária para a convergência da série $\sum u_k$ é
$$\lim_{k\to\infty} k u_k = 0.$$
5. Se (u_k) for uma sequência decrescente de números reais positivos e $\lim u_k$ não existir, ou existir mas não é zero, a série $\sum u_k$ é divergente.
6. Se existirem $N \in \mathbb{N}$ e $M > 0$, tais que $0 \leqslant a_k \leqslant M b_k$ para todo $k \geqslant N$, então
   (a) se $\sum b_k$ converge, então $\sum a_k$ também converge, e $\sum_{k\geqslant N} a_k \leqslant M \sum_{k\geqslant N} b_k$;

(b) se $\sum a_k$ diverge, então $\sum b_k$ também diverge.

7. Se a série $\sum a_k$ convergir absolutamente e a sequência (b_n) é limitada, então $\sum a_k b_k$ converge absolutamente.

8. ***(Teste da comparação do limite)*** Se $a_k > 0$ e $b_k > 0$ para todo $k \geqslant N$, tal que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = L,$$

então:

(a) se $0 < L < \infty$, então as ambas as séries $\sum a_k$ e $\sum b_k$ convergem ou divergem;

(b) se $L = 0$, então a série $\sum a_k$ converge sempre que $\sum b_k$ converge;

(c) se $L \longrightarrow \infty$, então a série $\sum a_k$ diverge sempre que $\sum b_k$ diverge;

(d) se $\lim_{k\to\infty} |a_k/b_k| = L$ existir, então a série $\sum a_k$ converge absolutamente se e somente se $\sum b_k$ convergir absolutamente.

9. ***(Teste da razão)*** Seja a série $\sum u_k$ com:

(a) $u_k > 0$ para todo $k \geqslant N$. Dados

$$L = \limsup_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} \text{ e } \ell = \liminf_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k},$$

então a série converge se $L < 1$ e diverge se $\ell > 1$. O teste é inconclusivo se $\ell \leqslant 1 \leqslant L$.

(b) termos não nulos. Dados

$$L = \limsup_{k\to\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| \text{ e } \ell = \liminf_{k\to\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|,$$

então a série converge absolutamente se $L < 1$ e diverge se $\ell > 1$. O teste é inconclusivo se $\ell \leqslant 1 \leqslant L$.

(c) *(forma simples)* com termos não nulos. Dado

$$L = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|,$$

então a série converge absolutamente se $L < 1$ e diverge se $L > 1$. O teste é inconclusivo se $L = 1$.

10. ***(Teste da raiz)*** Suponha que (u_k) seja uma sequência:

(a) de número reais não negativos. Dado

$$L = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k},$$

então a série $\sum u_k$ converge se $L < 1$ e diverge se $L > 1$. O teste é inconclusivo se $L = 1$.

(b) de números reais. Dado

$$L = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|u_k|},$$

então a série $\sum u_k$ converge absolutamente se $L < 1$ e diverge se $L > 1$. O teste é inconclusivo se $L = 1$.

(c) *(forma simples)* de números reais. Dado

$$L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|u_k|},$$

então a série $\sum u_k$ converge absolutamente se $L < 1$ e diverge se $L > 1$. O teste é inconclusivo se $L = 1$.

5.2.2.3 SÉRIES ALTERNADAS

Uma série real alternada é aquela em que os termos sucessivos alternam em sinal. Uma série deste tipo tem a forma

$$\sum (-)^k u_k, \text{ com } u_k \geqslant 0 \text{ para todo } k.$$

Para este tipo de série, os testes a seguir existem:

1. ***(Teste da série alternada)*** Uma série alternada

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-)^k u_k,$$

onde $u_k \geqslant 0$ para todo k, converge se as seguintes condições são satisfeitas:

(a) $\lim u_n = 0$;

(b) (u_n) é uma sequência decrescente, *i. e.*, $u_{n+1} \geqslant u_n$ para todo n.

2. ***(Estimativa de erro para série alternada)*** Se a série alternada $\sum (-)^k u_k$ satisfizer as condições acima e tiver a soma S, então

$$|S - S_n| \leqslant u_{n+1}.$$

5.2.3 REARRANJO DE TERMOS EM SÉRIES

Em muitas aplicações práticas, os termos de um série podem ser rearranjados para diferentes fins. Contudo, é necessário realizar o rearranjo dos termos de uma série com mais cuidado que com uma soma finita. Por exemplo, é correto fazer

$$1 + 2 + (3 + 5) + 6 = (1 + 2 + 3) + (5 + 6) = (1 + 2) + (3 + 5 + 6) = \cdots .$$

Porém, seja a série $\sum_{k=0}^{\infty} (-)^k$, a qual é divergente. Um rearranjo ingênuo dos termos resultaria em

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0,$$

ao passo que outro rearranjo ingênuo levaria a

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \cdots = 1.$$

Portanto, critérios devem ser adotados para a realização correta do rearranjo de uma série, caso esta seja convergente ou divergente.

Definição 5.5 (***Rearranjo de série***). Suponha que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ seja uma série. Seja $\{n_k\}$ uma sequência de inteiros positivos tal que cada inteiro positivo ocorra exatamente uma vez na sequência; ou seja, existe uma função bijetora[5] $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, com $f(k) = n_k$ tal que cada termo da série $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ $(b_k = a_{n_k})$ é também um termo em $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, mas ocorrendo em uma ordem distinta. Neste caso, a série $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ é denominada um *rearranjo* de $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Para o rearranjo de uma série, existe o teorema a seguir.

Teorema 5.7 (Rearranjo de série absolutamente convergente). *Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolutamente com soma S, então toda série $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ que é um rearranjo de $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ também converge absolutamente para a mesma soma S.*

Supondo que as séries $\sum a_k$ e $\sum b_k$ possam ser rearranjadas de forma bem sucedida de acordo com, por exemplo, o teorema 5.7, em muitas aplicações pode ser interessante considerar o rearranjo de uma série dupla, como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n),$$

[5] Ver definição 2.22.

a qual pode ser obtida, por exemplo, pelo produto das séries simples $\sum a_k$ e $\sum b_k$. Caso o rearranjo da série dupla possa ser realizado, as fórmulas a seguir são válidas,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}A(k,n-k) \tag{5.2a}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}B(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n+k) \tag{5.2b}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}A(k,n-2k) \tag{5.2c}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}B(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}B(k,n+2k) \tag{5.2d}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\lfloor n/m\rfloor}A(k,n-mk)\,,\ \text{para } m\in\mathbb{N} \tag{5.2e}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\lfloor n/m\rfloor}B(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}B(k,n+mk)\,, \tag{5.2f}$$

onde $\lfloor x\rfloor$ é a *função chão*, a qual tem como argumento $x\in\mathbb{R}$ e como valor o maior inteiro menor ou igual x. Esta função pode ser definida como

$$\lfloor x\rfloor=\max\left\{m\in\mathbb{Z}\,\middle|\,m\leqslant x\right\}.$$

5.3 Séries de potências

Séries de potência estão entre os tipos de séries mais empregados na física-matemática. Estas são um tipo de série funcional na forma $\sum f_k(x)$, sendo que $f_k(x)=a_k(x-a)^k$, isto é, é uma função potência. Devido a sua importância, vários resultados obtidos na seção 5.2 serão adaptados para séries de potências.

Empregando a notação usual, a série

$$S(a;x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k \tag{5.3}$$

é denominada *série de potências centrada em* $x=a$, ou uma *série de Taylor sobre* $x=a$. Se $a=0$, a série

$$S(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k \tag{5.4}$$

é denominada *série de Maclaurin*, a qual é a série de Taylor centrada em $x=0$. Estas séries de potências somente têm sentido para aqueles valores de $x\in\mathbb{R}$ para os quais elas convergem. O conjunto dos valores de x para os quais uma série funcional $\sum f_k(x)$ (como a série de potências) converge é denominado o ***conjunto de convergência*** ou a ***região de convergência*** da série.

5.3.1 Testes de convergência e raio de convergência

Alguns dos testes de convergência apresentados na seção 5.2.2 serão agora aplicados às séries de potências (5.3) e (5.4). Para tanto, estas serão tratadas como séries numéricas fixando-se o valor de x e então determinando se a série converge para este valor do argumento. Indicações sobre a convergência também serão fornecidas pelos coeficientes a_k.

1. Dada a série de Maclaurin (5.4):
   (a) Se a série converge em $x=x_0$ ($x_0\neq 0$), então converge absolutamente para $|x|<|x_0|$.
   (b) Se a série diverge em x_1, então ela diverge para $|x|>|x_1|$.

2. ***(Convergência das séries de Maclaurin)*** Para a série de potências (5.4), uma das afirmações abaixo é correta:
   (a) a série converge somente em $x = 0$;
   (b) a série converge para todo $x \in \mathbb{R}$;
   (c) existe um $R > 0$ tal que a série converge absolutamente para $|x| < R$ e diverge para $|x| > R$.

De acordo com as condições de convergência das séries de Maclaurin, o conjunto de pontos no qual $\sum a_k x^k$ converge é um intervalo em torno da origem, denominado *intervalo de convergência*. Este intervalo pode conter somente $x = 0$, todo o conjunto dos número reais ou um intervalo finito centrado na origem que pode fechado, meio fechado ou aberto. Se o intervalo tem comprimento $2R$, então R é denominado o ***raio de convergência da série de Maclaurin***. Existe então o teorema a seguir.

Teorema 5.8. *Para cada série de Maclaurin, existe um $R \in [0,\infty) \bigcup \{\infty\}$, o raio de convergência da série, tal que a série converge para $|x| < R$ e diverge para $|x| > R$.*

A partir deste teorema, uma simples transformação de variável $X = x - a$ pode ser usada para demonstrar o seguinte teorema, válida agora para séries de Taylor.

Teorema 5.9 (Convergência de uma série de Taylor). *Para a série de potências*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k ,$$

existe um $R > 0$, denominado raio de convergência, para o qual exatamente uma das afirmações é verdadeira:

1. *A série converge somente para $x = a$,* i. e., $R = 0$.
2. *A série converge para todo $x \in \mathbb{R}$,* i. e., $R \longrightarrow \infty$.
3. *A série converge absolutamente para $|x-a| < R$,* i. e., *para todo x no intervalo aberto $(a-R, a+R)$ e diverge para $|x-a| > R$,* i. e., *para todo x em $(-\infty, a-R) \bigcup (a+R,\infty)$. A série pode convergir absolutamente, condicionalmente ou divergir em cada ponto limite, $x = a+R$ e $x = a-R$.*

A figura 5.1 ilustra os possíveis intervalos e raios de convergência de uma série de Taylor.

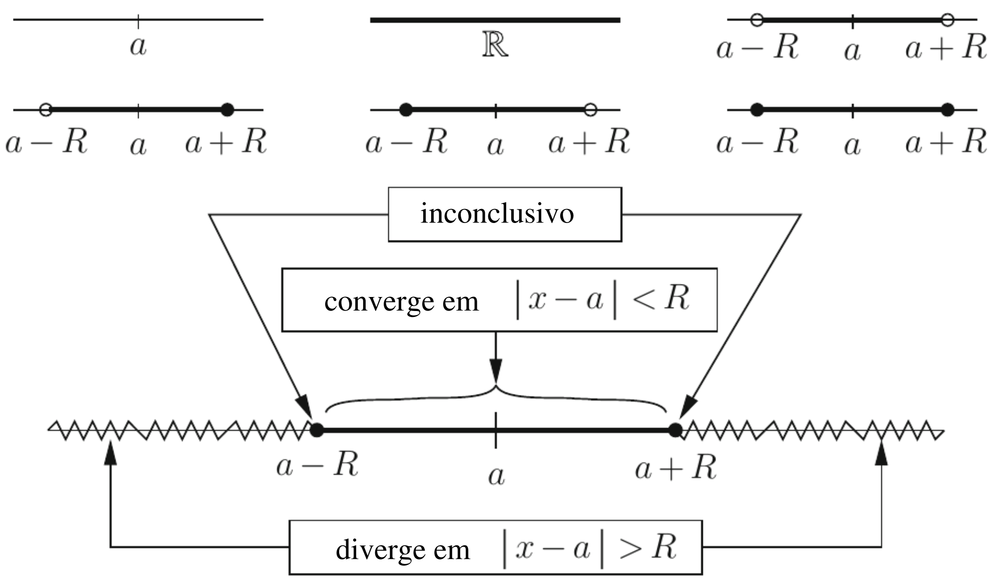

Figura 5.1: Acima: possíveis intervalos de convergência de uma série de Taylor. Abaixo: raio de convergência finito da série $\sum a_k (x-a)^k$.

A determinação do raio de convergência de uma série de potência é realizada a partir das condições de convergência de uma série numérica, apresentadas na seção 5.2.2. Os métodos são os seguintes.

1. ***(Cauchy-Hadamard)*** A série $\sum a_k x^k$ tem seu raio de convergência R determinado por

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n},$$

onde, por convenção, $1/0 = \infty$ e $1/\infty = 0$.

2. O raio de convergência da série $\sum a_k x^k$ é determinado por

   (a) $\dfrac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$,

   (b) $\dfrac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$,

   desde que estes limites existam.

Novamente, estas expressões podem ser aplicadas a uma série de Taylor centrada em $x = a$ por meio da transformação de variável $X = x - a$.

5.3.2 Operações com séries de potências

Diversas operações envolvendo uma, duas ou mais séries são com frequência necessárias. Essas operações envolvem adição de séries, produtos de séries, a potenciação de uma série e também a diferenciação e integração de séries de potências. Assumindo que as séries originais, antes das operações, são convergentes com determinados raios de convergência, o problema consiste então em determinar a série de potências resultante (se esta existir) e o raio de convergência desta. Nesta seção algumas destas operações serão discutidas.

5.3.2.1 Unicidade dos coeficientes de uma série de potências.

Para uma dada função $f(x)$, existe uma única série de potências que representa a função dentro do raio de convergência.

Teorema 5.10 (Unicidade dos coeficientes). *Seja $R > 0$ o raio de convergência de*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

e seja

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

tal que $g(x) = f(x)$, ou seja,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \text{ para } |x| < R.$$

Então $b_k = a_k$ para todo $k \geqslant 0$.

Este teorema na verdade é um corolário do teorema 5.12 abaixo.

A partir deste teorema, conclui-se que uma série de potências é identicamente nula,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0 \text{ (para todo } x\text{)},$$

se e somente se $a_k = 0$ para todo k.

5.3.2.2 TRANSFORMAÇÃO DO ÍNDICE DE SOMA

O índice de soma de uma série infinita é um parâmetro mudo tal qual a variável de integração de uma integral definida. Portanto, o símbolo empregado para o índice de soma é imaterial. Por exemplo,

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^nx^n}{n!}=\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{2^\ell x^\ell}{\ell!}=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{2^\mu x^\mu}{\mu!}.$$

Se a série é convergente, a função $S(x)$ que ela representa não depende do valor do índice de soma.

Da mesma forma como é possível realizar transformações da variável de integração, é possível também mudar o índice de soma da série, de forma a manter o resultado invariante. Alguns exemplos de transformação do índice são:

1. Transforme
$$\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n$$
em uma série cujo índice de soma inicie em $n=0$, ao invés de $n=2$.

   Para tanto, defina o índice intermediário n' tal que $n'=n-2$. Neste caso, como na série original o primeiro termo corresponde a $n=2$, na série reescrita o primeiro termo corresponderá a $n'=0$. Além disso, nos coeficientes e potências da série escreve-se $n=n'+2$; ou seja,
$$\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n'=0}^{\infty}a_{n'+2}x^{n'+2}.$$
   A identidade pode ser verificada escrevendo-se explicitamente os primeiros termos das séries em ambos os lados:
$$a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots=a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots.$$
   Finalmente, como n' é um índice mudo, pode-se remover o apóstrofo ('), resultando por fim
$$\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}x^{n+2}.$$
   Na prática, a potência da série original foi aumentada por um fator 2 e, para compensar, o índice de soma começou a ser contado a partir de um valor 2 subtraído do valor inicial.

2. Escreva a expressão
$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)\,a_nx^{r+n-1}\ \ (r=\text{cte.})$$
como uma série cuja potência genérica é dada por x^{r+n}.

   Primeiro insere-se x^2 para dentro da série usando a propriedade distributiva (5.1). Em seguida, diminui-se o índice da potência por um fator 1, compensando isso com o aumento do índice de soma pelo mesmo fator; ou seja, fazendo $m=n+1$, resulta
$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)\,a_nx^{r+n-1}=\sum_{m=1}^{\infty}(r+m-1)\,a_{m-1}x^{r+m}=\sum_{n=1}^{\infty}(r+n-1)\,a_{n-1}x^{r+n}.$$

3. Assuma que a identidade
$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$
é válida para todo x e determine o que isto implica com relação aos coeficientes $\{a_n\}$.

   A implicação será baseada no teorema 5.10 sobre a unicidade dos coeficientes. Para tanto, aumenta-se a potência da série da esquerda pelo fator 1, resultando
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,a_{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

Portanto, de acordo com o teorema 5.10, resulta a *relação de recorrência*

$$(n+1)\,a_{n+1} = a_n \Longrightarrow a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)\,.$$

Os primeiros termos da relação de recorrência são

$$(n=0):\ a_1 = a_0, \quad (n=1):\ a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2!}, \quad (n=2):\ a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3!}$$
$$(n=3):\ a_4 = \frac{a_3}{4} = \frac{a_0}{4!} \quad (n=4):\ a_5 = \frac{a_4}{5} = \frac{a_0}{5!},$$

e assim por diante. Por indução, conclui-se que

$$a_n = \frac{a_0}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)\,.$$

Ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \stackrel{(5.1)}{=} a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = a_0 e^x.$$

5.3.2.3 Diferenciação e integração séries de potências.

Os seguintes teoremas existem.

Teorema 5.11. *As séries de potência*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ e } \sum_{k=n}^{\infty} k\,(k-1)\cdots(k-n+1)\,a_k x^{k-n}$$

têm o mesmo raio de convergência.

Teorema 5.12 (Diferenciação termo-a-termo de série de potências). *Se*

$$S\,(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

possui o raio de convergência $R > 0$, então a função $S\,(x)$ é diferenciável em $|x| < R$ e

$$S'\,(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad (|x| < R)\,.$$

Além disso, $S^{(n)}\,(x)$ existe para todo $n \geqslant 1$ e todo x em $|x| < R$, e

$$S^{(n)}\,(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k\,(k-1)\cdots(k-n+1)\,a_k x^{k-n} \quad (|x| < R)\,.$$

Os coeficientes a_n são unicamente determinados, com $a_n = f^{(n)}\,(0)\,/n!$.

O teorema 5.12 é um caso particular do teorema de Taylor, para o qual uma demonstração válida para funções analíticas pode ser vista no teorema 6.20.

Se a série de potências para $S\,(x)$ estiver centrada em $x = c$, basta substituir x por $X = x - c$ nas fórmulas acima.

Da mesma forma, dentro do raio de convergência da série $S\,(x) = \sum a_k\,(x-c)^k$,

$$\int S\,(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}\,(x-c)^{k+1} + C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k}\,(x-c)^k + C,$$

sendo C uma constante arbitrária.

5.3.2.4 Operações algébricas envolvendo séries de potências.

Duas séries de potências podem ser adicionadas, subtraídas ou multiplicadas. O menor intervalo de convergência da série resultante é a intersecção dos intervalos de convergência das séries iniciais. Duas séries podem também ser divididas, mas existem condições de validade para esta operação e o intervalo de convergência deve ser obtido especificamente para a série resultante.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO. Dadas as séries de Taylor centradas no mesmo ponto $x = c$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k \text{ e } g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-c)^k, \tag{5.5}$$

então

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k)(x-c)^k. \tag{5.6}$$

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO. Dadas as séries (5.5), o produto destas pode ser escrito

$$f(x)\, g(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-c)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} a_k b_r (x-c)^{k+r}.$$

Identificando o coeficiente da série dupla como

$$A(r,k) = a_k b_r (x-c)^{k+r}$$

e aplicando a fórmula de rearranjo (5.2a), o produto das séries resulta

$$f(x)\, g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_r (x-c)^k \text{ onde } c_k = \sum_{r=0}^{k} a_{k-r} b_r = \sum_{r=0}^{k} a_r b_{k-r}. \tag{5.7}$$

Os primeiros termos são

$$c_0 = a_0 b_0, \qquad c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1, \qquad c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2, \qquad \cdots.$$

Por indução matemática, pode-se chegar à formula para a potenciação da série $f(x) = \sum a_k (x-c)^k$, a qual é

$$h(x) = [f(x)]^n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-c)^k, \quad (n \geqslant 1). \tag{5.8a}$$

Então os coeficientes $\{c_k\}$ são dados recursivamente por

$$c_0 = a_0^n, \qquad c_k = \frac{1}{k a_0} \sum_{r=1}^{k} (rn - k + r)\, a_r c_{k-r}. \tag{5.8b}$$

Os primeiros termos da fórmula recursiva são

$$c_1 = \frac{n}{a_0} a_1 c_0, \quad c_2 = \frac{1}{2a_0}\left[(n-1)\, a_1 c_1 + 2n a_2 c_0\right],$$
$$c_3 = \frac{1}{3a_0}\left[(n-2)\, a_1 c_2 + (2n-1)\, a_2 c_1 + 3n a_3 c_0\right], \quad \cdots.$$

Já para a divisão das séries originais, deseja-se obter $h(x) = \sum c_k (x-c)^k$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-c)^k} = h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-c)^k. \tag{5.9a}$$

Para determinar os coeficientes $\{c_k\}$, calcula-se, alternativamente, os coeficientes do produto

$$h(x)\, g(x) = f(x),$$

de onde resulta

$$a_k = \sum_{r=0}^{k} c_{k-r} b_r.$$

Observando os primeiros termos desta identidade,

$$a_0 = c_0 b_0 \Longrightarrow c_0 = \frac{a_0}{b_0}$$

$$a_1 = c_1 b_0 + c_0 b_1 \Longrightarrow c_1 = \frac{1}{b_0^2}\left(a_1 b_0 - a_0 b_1\right) = \frac{1}{b_0^2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_0 & b_0 \end{vmatrix}$$

$$a_2 = c_2 b_0 + c_1 b_1 + c_0 b_2 \Longrightarrow c_2 b_0 = a_2 - \frac{1}{b_0^2}\left(a_1 b_0 - a_0 b_1\right) b_1 - \frac{a_0}{b_0} b_2 \Longrightarrow c_2 = \frac{1}{b_0^3}\begin{vmatrix} a_2 & b_1 & b_2 \\ a_1 & b_0 & b_1 \\ a_0 & 0 & b_0 \end{vmatrix}.$$

A expressão geral, válida para qualquer coeficiente c_k $(k \geqslant 1)$ é

$$c_k = \frac{1}{b_0^{k+1}}\begin{vmatrix} a_k & b_1 & b_2 & \cdots & b_k \\ a_{k-1} & b_0 & b_1 & \cdots & b_{k-1} \\ a_{k-2} & 0 & b_0 & \cdots & b_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{vmatrix} \quad (k \geqslant 1). \tag{5.9b}$$

Ou, recursivamente,

$$c_k = \frac{1}{b_0}\left(a_k - \sum_{r=1}^{k} c_{k-r} b_r\right) \quad (k \geqslant 1). \tag{5.9c}$$

Claro que a divisão de séries somente existe se $g(x = c) \neq 0$ $(b_0 \neq 0)$.

Em particular, a recíproca da série de $f(x)$ é

$$h(x) = [f(x)]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - c)^k, \tag{5.10a}$$

com

$$c_0 = \frac{1}{a_0}, \quad c_1 = -\frac{1}{a_0^2} a_1, \quad c_2 = \frac{1}{a_0^3}\left(a_1^2 - a_0 a_2\right),$$

$$c_k = \frac{(-)^k}{a_0^{k+1}}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{k-2} & a_{k-1} \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{k-3} & a_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 \end{vmatrix} \quad (k \geqslant 1), \tag{5.10b}$$

$$c_k = -\frac{1}{a_0}\sum_{r=1}^{k} c_{k-r} a_r \quad (k \geqslant 1).$$

Série de potência elevada a uma potência positiva. Seja a série (5.5) para $f(x)$ calculada em $c = 0$ por simplicidade. Deseja-se elevar esta série a uma potência $n \geqslant 1$ e escrever o resultado como uma série; ou seja, deseja-se calcular os coeficientes $\{c_n\}$ da série tal que

$$[f(x)]^n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Para tanto, considera-se a fórmula do lado esquerdo em termos da sequência das somas parciais e emprega-se o teorema binomial

$$(\alpha + \beta)^n = \sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}\alpha^{n-\ell}\beta^{\ell} = \sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}\alpha^{\ell}\beta^{n-\ell}, \text{ sendo } \binom{n}{\ell} = \frac{n!}{(n-\ell)!\ell!},$$

ou, genericamente, o teorema multinomial

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n}\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m}\alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}\cdots\alpha_m^{k_m},$$

sendo

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_m!},$$

de forma conveniente. Ou seja, o primeiro termo da sequência é

$$(a_0)^n = c_0 \Longrightarrow c_0 = a_0^n.$$

Já o segundo termo é

$$\left(a_0 + a_1 x\right)^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} a_0^{n-\ell} \left(a_1 x\right)^\ell = a_0^n + n a_0^{n-1} a_1 x + \cdots + \left(a_1 x\right)^n = c_0 + c_1 x.$$

Contribuições para o coeficiente c_2 virão também do próximo termo da sequência, mas o coeficiente c_1 é unicamente determinado por

$$c_1 = n a_0^{n-1} a_1 = n \frac{c_0}{a_0} a_1.$$

Agora, o termo c_2 será determinado a partir de

$$\begin{aligned}
\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right)^n &= \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \binom{n}{k_1, k_2, k_3} a_0^{k_1} \left(a_1 x\right)^{k_2} \left(a_2 x^2\right)^{k_3} \\
&= a_0^n + n a_0^{n-1} a_1 x + \left[n a_0^{n-1} a_2 + \frac{1}{2} n \left(n-1\right) a_0^{n-2} a_1^2 \right] x^2 + \cdots \\
&= c_0 + c_1 x + \left[\frac{n}{a_0} c_0 a_2 + \frac{1}{2a_0} \left(n-1\right) a_1 c_1 \right] x^2 + \cdots ,
\end{aligned}$$

de onde vem

$$c_2 = \frac{1}{2a_0} \left[\left(n-1\right) a_1 c_1 + 2n a_2 c_0 \right].$$

Por indução, a forma geral dos coeficientes c_k é

$$c_0 = a_0^n, \qquad c_k = \frac{1}{k a_0} \sum_{m=1}^{k} \left(mn - k + m\right) a_m c_{k-m} \ \ (k \geqslant 1). \tag{5.11}$$

EXPONENCIAÇÃO DE SÉRIE. Dada agora a série de Maclaurin para $f\left(x\right)$ escrita como

$$f\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n,$$

sendo que os coeficientes $\{a_n\}$ são conhecidos. Deseja-se calcular os coeficientes $\{c_n\}$ da série tal que

$$e^{f(x)} = \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \right) = e^{a_0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \tag{5.12a}$$

Estes coeficientes são dados por

$$c_n = \frac{B_n\left(a_1, \dots, a_n\right)}{n!}, \tag{5.12b}$$

sendo $B_n\left(a_1, \dots, a_n\right)$ o n-ésimo ***polinômio completo de Bell***, dado por

$$B_n\left(x_1, \dots, x_n\right) = n! \sum_{1j_1+\cdots+nj_n=n} \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^{j_i}}{\left(i!\right)^{j_i} j_i!},$$

os quais satisfazem a relação de recorrência

$$B_{n+1}\left(x_1, \dots, x_{n+1}\right) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_{n-i}\left(x_1, \dots, x_{n-i}\right) x_{i+1}.$$

Os primeiros polinômios de Bell são

$$B_0 = 1, \quad B_1\left(x_1\right) = x_1, \quad B_2\left(x_1, x_2\right) = x_1^2 + x_2,$$
$$B_3\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^3 + 3x_1 x_2 + x_3, \quad B_4\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = x_1^4 + 6x_1^2 x_2 + 4x_1 x_3 + 3x_2^2 + x_4.$$

Portanto, os primeiros termos da expansão desejada são

$$\begin{aligned}
e^{f(x)} &= e^{a_0} \left[1 + B_1\left(a_1\right) x + \frac{1}{2} B_2\left(a_1, a_2\right) x^2 + \frac{1}{6} B_3\left(a_1, a_2, a_3\right) x^3 + \cdots \right] \\
&= e^{a_0} \left[1 + a_1 x + \frac{1}{2} \left(a_1^2 + a_2\right) x^2 + \frac{1}{6} \left(a_1^3 + 3a_1 a_2 + a_3\right) x^3 + \cdots \right].
\end{aligned} \tag{5.12c}$$

5.3.2.5 Substituição de séries.

Dada a série

$$y\left(x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^k,$$

deseja-se obter $h\left(x\right)=\sum c_kx^k$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_kx^k=\sum_{k=1}^{\infty}b_ky^k.$$

Neste caso,

$$c_1=a_1b_1,\quad c_2=a_2b_1+a_1^2b_2,\quad c_3=a_3b_1+2a_1a_2b_2+a_1^3b_3,$$
$$c_4=a_4b_1+a_2^2b_2+2a_1a_3b_2+3a_1^2a_2b_3+a_1^4b_4,\dots.$$

Em particular, a reversão da série $y\left(x\right)=\sum a_kx^k$ na série $x\left(y\right)=\sum b_ky^k$ é dada por

$$a_1b_1=1,\quad a_1^3b_2=-a_2,\quad a_1^5b_3=2a_2^2-a_1a_3,$$
$$a_1^7b_4=5a_1a_2a_3-a_1^2a_4-5a_2^3,\dots.$$

Referências

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. **Handbook of Mathematical Functions**. New York: Dover, 1970.

BOAS, M. L. **Mathematical Methods in the Physical Sciences**. Second Ed. New York: John Wiley & Sons, 1983. 793 pp.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, D. B. **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems**. 11th. Ed. [S.l.]: Wiley, 2017. 610 + xii pp. ISBN 9781119443766. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=SyaVDwAAQBAJ>.

GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. **Table of Integrals, Series and Products**. Seventh. San Francisco: Academic Press, 2007. 1222 pp. ISBN 0-12-373637-4.

LEMOS, N. A. **Convite à Física Matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013. 504 + xv pp. ISBN 9788578611927. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=eoeqzgEACAAJ>.

PONNUSAMY, S. **Foundations of Mathematical Analysis**. Boston: Birkhäuser, 2011. (SpringerLink : Bücher). 570 + xv pp. ISBN 9780817682927. DOI: 10.1007/978-0-8176-8292-7. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=flwN3psxt_kC>.

SRIVASTAVA, H. M.; MANOCHA, H. L. **A Treatise on Generating Functions**. Edição: G. M. Bell. Chichester: Ellis Horwood, 1984. (Ellis Horwood series in mathematics and its applications). ISBN 9780470200100.