



FÍSICA-MATEMÁTICA

RUDI GAELZER (INSTITUTO DE FÍSICA - UFRGS)

Apostila preparada para as disciplinas de Física-Matemática ministradas para os Cursos de Bacharelado em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre - RS.



Apostila escrita com:
PROCESSADOR DE DOCUMENTOS
LyX
<http://www.lyx.org/>
<http://wiki.lyx.org/LyX/LyX>

Referências bibliográficas:
SISTEMA biblatex
<http://ctan.org/pkg/biblatex>
<https://github.com/plk/biblatex>

SUMÁRIO

1	Sistemas de Coordenadas Curvilíneas Ortogonais	1
1.1	Coordenadas curvilíneas	1
1.2	Coordenadas curvilíneas ortogonais	6
1.3	Análise vetorial em sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonais	7
1.3.1	Álgebra vetorial	7
1.3.2	Integrais de caminho, de superfície e de volume	7
1.4	Operadores vetoriais diferenciais	10
1.4.1	Gradiente	10
1.4.2	Divergente e laplaciano	11
1.4.3	Rotacional	13
1.5	Sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonais	14
1.5.1	Coordenadas polares cilíndricas	14
1.5.2	Coordenadas polares esféricas	16
1.5.3	Coordenadas elípticas cilíndricas	18
1.6	Linhas de força e superfícies equipotenciais	20
1.6.1	Linhas de força de um campo vetorial	20
	Referências	22
2	Teoria de Grupos Abstratos	23
2.1	Definições e classificações iniciais	24
2.1.1	Classificação dos grupos	26
2.1.2	Exemplos de grupos	27
2.1.2.1	Grupos infinitos discretos	27
2.1.2.2	Grupos contínuos compactos	27
2.1.2.3	Grupos contínuos não compactos	28
2.1.2.4	Grupos finitos	30
2.2	Grupos finitos	30
2.2.1	Tabela de multiplicação de grupo	30
2.2.2	Grupo cíclico C_n	32
2.2.3	O Grupo simétrico S_n	32
2.2.3.1	Verificação dos axiomas de grupo	34
2.2.3.2	Notação de ciclos	35
2.3	Subgrupos, classes laterais e de conjugação	38
2.3.1	Subgrupos	38
2.3.2	Classes laterais e o teorema de Lagrange	39
2.3.3	Classes de conjugação	41
2.3.4	Subgrupos invariantes e grupo fator	44
2.4	Grupos de simetria	45
2.4.1	Grupos cristalográficos pontuais	48
2.4.2	Projeções estereográficas	52
2.4.3	Grupos cristalográficos espaciais	53
2.5	Produto direto de grupos	55
2.6	Mapeamentos entre grupos	56
2.6.1	Funções e mapeamentos	57
2.6.2	Mapeamento entre grupos e homomorfismo	58

2.7	Estruturas algébricas	63
2.7.1	Estruturas compostas por um conjunto com operações	64
2.7.1.1	Estruturas do tipo grupo	64
2.7.1.2	Estruturas do tipo anel	65
2.7.2	Estruturas do tipo Módulo	67
2.7.3	Estruturas do tipo álgebra	68
	Referências	69
3	Espaços Vetoriais	71
3.1	Espaço vetorial	71
3.2	Subespaços vetoriais e subespaços complementares	72
3.2.1	Subespaço soma	72
3.2.2	Subespaços complementares	72
3.3	Bases de um espaço vetorial	73
3.3.1	Transformação de base	74
3.4	Mapeamentos entre espaços vetoriais	75
3.5	Espaço vetorial dual	78
3.6	Subespaços invariantes	78
3.7	Espaço vetorial normado	78
3.8	Espaço com produto interno	79
3.8.1	Espaço real com produto interno	80
3.8.2	Espaço complexo com produto interno	80
3.8.3	Norma de um vetor induzida pelo produto interno	80
3.8.4	Bases ortonormais em espaços normados com produto interno	81
3.8.5	Operadores lineares em espaços com produto interno	82
3.9	Emprego de matrizes em espaços vetoriais	84
3.9.1	Definições iniciais	84
3.9.2	Álgebra matricial	85
3.9.3	Matrizes quadradas	87
3.9.3.1	Determinante	87
3.9.3.2	Tipos especiais de matrizes quadradas	88
3.9.4	Matrizes associadas a vetores e operadores	90
3.9.4.1	Transformação de base	90
3.9.4.2	Matriz de um operador linear	91
3.10	Autovetores e autovalores de um operador linear	95
3.10.1	O teorema espectral	95
3.11	Espaços tensoriais	97
3.12	Elementos de espaços métricos e topologia	98
3.13	Espaço vetorial métrico	102
3.13.1	Espaço vetorial métrico com norma.	102
3.13.2	Espaço de Banach.	102
3.13.3	Espaço de Hilbert	102
3.13.4	Espaço afim	103
	Referências	107
4	Teoria de Representações de Grupos	109
4.1	Primeiras definições e representações	110
4.1.1	Vetores e funções de base e representações regulares	111
4.1.2	Representação natural	114
4.2	Representações de grupos de transformações lineares	114
4.2.1	Espaços vetoriais e operadores na mecânica quântica	115
4.2.2	Espaços vetoriais e suas representações	116
4.3	Representações equivalentes e caracteres	117
4.4	Soma e produto diretos de matrizes e representações	118
4.4.1	Soma direta de matrizes	119
4.4.2	Soma direta de representações	121
4.4.3	Produto direto de matrizes	122
4.4.4	Produto direto de representações	124
4.5	Representações redutíveis ou irredutíveis	124
4.6	Teoremas fundamentais sobre representações de grupos e caracteres	128

4.6.1	Teoremas sobre representações	129
4.6.2	Interpretação do teorema da ortogonalidade	132
4.6.3	Teoremas sobre caracteres	137
4.6.4	Interpretação do teorema da ortogonalidade dos caracteres	139
4.6.5	Decomposição de uma representação em irreps	140
4.6.6	Construção de uma tabela de caracteres	143
4.7	Bases simetrizadas para representações irredutíveis	145
4.8	Bases para representações de grupos de produto direto	148
4.8.1	Redução da representação do produto direto. Série de Clebsch-Gordan	149
4.8.2	Bases para representações de produtos diretos. Coeficientes de Clebsch-Gordan	149
4.8.3	Representação de um grupo produto direto	151
4.9	Aplicações físicas da teoria de representações de grupo	152
4.9.1	Isomorfismo entre transformações sobre sistemas físicos e transformações sobre espaços funcionais	152
4.9.1.1	Translações espaciais	153
4.9.1.2	Rotações	156
4.9.1.3	Deslocamento temporal	159
4.9.2	O grupo do Hamiltoniano	159
4.9.2.1	Degenerescência normal ou acidental	160
4.9.2.2	Representações de $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}$	161
4.9.2.3	Teoria de grupos e “bons” números quânticos	164
4.9.3	Grupos Abelianos e o teorema de Bloch	166
4.9.3.1	Grupos cíclicos	166
4.9.3.2	O teorema de Bloch	166
4.9.4	Funções de base para representações irredutíveis	168
4.9.5	Perturbações, regras de seleção e simetria	174
4.9.5.1	Perturbações sobre autoestados	174
4.9.5.2	O teorema dos elementos de matriz e regras de seleção	174
4.10	Grupos e álgebras de Lie e suas representações	179
4.10.1	Definições iniciais	179
4.10.2	Transformações infinitesimais do grupo	184
4.10.3	Constantes de estrutura	190
4.10.4	Parametrização das transformações do grupo	194
4.10.5	Álgebras de Lie	196
4.10.6	Representações de grupos de Lie	198
4.10.7	Representações irredutíveis do $SU(2)$	202
4.10.8	O teorema de Casimir	203
	Referências	204
5	Séries e Séries de Potências	207
5.1	Sequências e seus limites	207
5.2	Séries numéricas	210
5.2.1	Definição	210
5.2.2	Testes de convergência	212
5.2.2.1	Testes genéricos	212
5.2.2.2	Séries absolutamente ou condicionalmente convergentes, ou séries de termos não negativos	212
5.2.2.3	Séries alternadas	214
5.2.3	Rearranjo de termos em séries	214
5.3	Séries de potências	215
5.3.1	Testes de convergência e raio de convergência	215
5.3.2	Operações com séries de potências	217
5.3.2.1	Unicidade dos coeficientes de uma série de potências.	217
5.3.2.2	Transformação do índice de soma	218
5.3.2.3	Diferenciação e integração séries de potências.	219
5.3.2.4	Operações algébricas entre séries de potências.	219
5.3.2.5	Substituição de séries.	221
	Referências	222

6	Funções de Uma Variável Complexa	223
6.1	Números e variáveis complexos	224
6.1.1	Representações vetorial e polar	225
6.1.2	Fórmula de Euler	226
6.2	Álgebra de números complexos	226
6.2.1	Fórmula de Moivre	228
6.2.2	Raízes de números complexos	228
6.3	Funções de uma variável complexa	230
6.3.1	Transformações ou mapeamentos	231
6.3.2	Pontos de ramificação, linhas de ramificação e superfícies de Riemann	231
6.3.3	Exemplos de funções unívocas ou plurívocas	232
6.4	O cálculo diferencial de funções de uma variável complexa	233
6.4.1	Limite de uma função complexa	233
6.4.2	Continuidade	235
6.4.3	Derivadas de funções complexas	236
6.4.4	As condições de Cauchy-Riemann	237
6.4.5	Funções analíticas	239
6.4.6	Funções harmônicas	239
6.4.7	Pontos singulares	240
6.5	Integração no plano complexo	240
6.5.1	Integrais de caminho no plano complexo	241
6.5.2	Propriedades matemáticas das integrais de linha	242
6.5.3	Tipos de curvas e domínios no plano complexo	243
6.5.3.1	Tipos de curvas no plano complexo	243
6.5.3.2	Domínios simplesmente ou multiplamente conexos	243
6.5.3.3	Convenção para o percurso de um contorno fechado	244
6.6	O teorema de Cauchy-Goursat	244
6.6.1	O teorema de Green no plano	244
6.6.2	O teorema de Cauchy-Goursat	244
6.7	Fórmulas integrais de Cauchy	248
6.8	Representação em séries de funções analíticas	250
6.8.1	Séries complexas	250
6.8.1.1	Convergência da série	251
6.8.1.2	Convergência absoluta	251
6.8.1.3	Convergência uniforme	252
6.8.2	Testes de convergência	252
6.8.2.1	Testes de convergência absoluta	252
6.8.2.2	Teste de convergência uniforme	252
6.8.3	Séries de potências e séries de Taylor	253
6.8.4	Séries de Taylor de funções elementares	255
6.8.5	Séries de Laurent	255
6.8.6	Teoremas de existência e unicidade	257
6.8.7	Algumas técnicas de construção de séries de Taylor e Laurent	257
6.8.8	Séries de Laurent de funções elementares	259
6.8.9	Classificação de singularidades	260
6.8.9.1	Polos	260
6.8.9.2	Singularidades essenciais	260
6.8.9.3	Singularidades removíveis	260
6.9	Integração no plano complexo pelo método dos resíduos	260
6.9.1	Resíduos	261
6.9.2	Teorema dos resíduos	262
6.9.3	Cálculo de resíduos	262
6.9.3.1	Primeiro método: direto da definição	262
6.9.3.2	Segundo método: polos de ordem m em $z = z_0$	263
6.9.3.3	Terceiro método: resíduo de uma função racional	264
6.9.3.4	Quarto método: pelo desenvolvimento em série de Laurent	264
6.9.4	Cálculo de integrais definidas ou impróprias	265
6.9.4.1	Integrais do tipo I: funções racionais	265
6.9.4.2	Integrais do tipo II: funções racionais de funções trigonométricas	267

6.9.4.3	Integrais do tipo III: integrais de Fourier	268
6.9.4.4	Integrais do tipo IV: integrando com polos no eixo real	269
6.9.4.5	Integrais do tipo V: integração ao longo de linhas de ramificação	272
6.9.4.6	Outros tipos de integrais	274
6.10	Continuação analítica	277
	Referências	280
7	Equações Diferenciais Ordinárias	281
7.1	Classificação das equações diferenciais ordinárias	281
7.2	Teoremas e definições para equações diferenciais lineares	283
7.2.1	Equações de segunda ordem	284
7.2.2	Obtenção da segunda solução	289
7.2.2.1	Método de Abel	289
7.2.2.2	Método da redução de ordem	290
7.2.3	Equações de ordem n	290
7.3	Soluções em séries de equações de segunda ordem	291
7.3.1	Soluções nas vizinhanças de um ponto ordinário	292
7.3.2	Soluções nas vizinhanças de um ponto singular	297
7.3.2.1	Equação de Euler	297
7.3.2.2	Pontos singulares regulares	299
7.3.2.3	O método de Frobenius	301
	Referências	305
8	Funções Especiais	307
8.1	A função gama e funções relacionadas	307
8.1.1	A propriedade recursiva fundamental	308
8.1.2	Fórmula de reflexão	308
8.1.3	A decomposição de Prym	309
8.1.4	Fórmula de duplicação	309
8.1.5	Valores especiais	309
8.1.6	A função beta	310
	Referências	312
9	Álgebra e Análise Tensoriais	313
9.1	Introdução e definições	313
9.1.1	Convenção de soma de índices e símbolos auxiliares	315
9.1.2	Símbolos auxiliares: Kronecker e Levi-Civita	316
9.2	Propriedades de transformação de escalares, vetores e tensores	317
9.2.1	Rotações	318
9.2.2	Transformações de paridade ou reflexões	322
9.2.3	Reversão temporal	323
9.3	Tensores Cartesianos	323
9.3.1	Espaços funcionais	323
9.3.2	Tensores Cartesianos de postos zero e um	324
9.3.3	Tensores Cartesianos de posto dois ou superior	328
9.4	Álgebra tensorial	331
9.4.1	Adição de tensores	331
9.4.2	Simetria e antissimetria	331
9.4.3	Tensores Hermitianos ou anti-Hermitianos	332
9.4.4	Produto externo de tensores	333
9.4.4.1	Produto externo de dois tensores	333
9.4.4.2	Diádicas	334
9.4.4.3	Gradiente de um vetor	334
9.4.4.4	Produto externo em geral	334
9.4.5	Contração e produto interno	335
9.4.5.1	Contração	335
9.4.5.2	Produto interno	335
9.4.5.3	Produtos com diádicas	336
9.4.6	Regra do quociente	336
9.5	Composição de transformações, rotações infinitesimais e tensores isotrópicos	338

9.5.1	Composição de transformações	339
9.5.2	Rotações infinitesimais	339
9.5.3	Tensores isotrópicos	340
9.6	Rotações impróprias, pseudotensores e tensores duais	342
9.6.1	Rotações impróprias e pseudotensores	343
9.6.2	Tensores duais	348
9.6.3	Tensores irredutíveis	348
9.7	Tensores generalizados	349
9.7.1	Coordenadas curvilíneas generalizadas	349
9.7.2	O espaço de Riemann e o tensor de métrica	350
9.7.2.1	Operação de elevação ou rebaixamento de índice	351
9.7.2.2	Elementos infinitesimais de arco e volume	352
9.8	Transformações generalizadas de coordenadas e tensores generalizados	354
9.9	Tensores relativos	357
9.10	Derivadas dos vetores de base e os símbolos de Christoffel	359
9.11	Diferenciação covariante	361
9.12	Operadores vetoriais na forma tensorial	365
9.12.1	Gradiente de campo escalar	365
9.12.2	Divergente de campo vetorial	365
9.12.3	Laplaciano de um campo escalar	366
9.12.4	Rotacional de um campo vetorial	367
9.13	Diferenciação absoluta e curvas geodésicas	367
9.13.1	Diferenciação absoluta ou intrínseca	367
9.13.2	Curvas Geodésicas	368
9.13.3	Transporte paralelo de campos vetoriais	373
9.14	Os tensores de Riemann, Ricci e Einstein	375
9.14.1	O tensor de curvatura de Riemann-Christoffel	375
9.14.2	O tensor de Ricci e o escalar de curvatura	380
9.14.3	O tensor de Einstein e as equações do campo gravitacional	380
9.15	Aplicações físicas	381
9.15.1	A transformação de Lorentz, o espaço-tempo de Minkowski e a formulação covariante do eletromagnetismo clássico	381
9.15.1.1	A situação anterior a 1900. A transformação de Galileu	382
9.15.1.2	Equações de Maxwell e a transformação de Galileu	383
9.15.1.3	A transformação de Lorentz e os princípios da relatividade restrita	386
9.15.1.4	O espaço-tempo de Minkowski e os quadrivetores	388
9.15.1.5	Formulação covariante do eletromagnetismo clássico	393
9.15.2	A métrica de Schwarzschild na relatividade geral	397
9.15.2.1	Derivação do tensor de métrica	397
9.15.2.2	Consequências e aplicações da métrica de Schwarzschild	399
	Referências	403

A Distribuições e a “Função” Delta de Dirac 405

A.1	Definição de Distribuições	405
A.1.1	Definição operacional de distribuição	405
A.1.1.1	Exemplos	405
A.1.2	Propriedades de distribuições	406
A.1.2.1	Combinação linear de distribuições	406
A.1.2.2	Produto de duas distribuições	406
A.1.2.3	Séries e integrais de distribuições	406
A.1.2.4	Derivadas de distribuições	407
A.2	Propriedades da “Função” δ	408
A.2.1	Definição da δ	408
A.2.2	Representações da $\delta(x - x_0)$ como o limite de um operador integral	408
A.2.3	Principais propriedades	409
A.2.4	Derivadas da $\delta(x)$	410
A.3	Deltas de Dirac em mais de uma dimensão	410
A.3.1	Coordenadas Curvilíneas Ortogonais	411
A.3.2	Pontos degenerados	411

Referências 413