

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA



MUITAS VEZES, pergunta-se o porquê da necessidade de se estudar variáveis complexas quando na física estamos interessados apenas nas soluções reais. Poder-se-ia esperar que um estudo de funções reais de variáveis reais seria suficiente para se conhecer as soluções fisicamente relevantes. A resposta é que em muitas situações é desejável estender nosso estudo a valores complexos das variáveis e das soluções por razões de completicidade e conveniência. Por exemplo, o conjunto dos números reais não forma uma base suficiente para a representação das raízes de equações polinomiais ou algébricas. Além disso, o conhecimento do comportamento de uma função complexa $f(z)$, para todos os valores complexos de z , nos fornece uma visão mais completa de suas principais propriedades (mesmo suas propriedades para z real), do que o conhecimento de seu comportamento para somente valores reais de z . A localização, no plano complexo, dos zeros e dos infinitos de f (isto é, a posição das raízes de $f(z) = 0$ e de $1/f(z) = 0$) nos fornece informações sobre o comportamento de f para todos os valores de z . Adicionalmente, uma integral de $f(z)$ ao longo de valores reais de z pode ser modificada em uma integral ao longo de uma trajetória conveniente no plano complexo, de forma a simplificar consideravelmente o seu cálculo.

Integrais no plano complexo possuem uma ampla variedade de aplicações úteis na física e na matemática. Dentre estas, pode-se destacar:

- Cálculo de integrais definidas.
- Inversão de séries de potências.
- Cálculo de produtos infinitos.
- Obtenção de soluções de equações diferenciais para grandes valores da variável (soluções assintóticas).
- Investigação da estabilidade de sistemas potencialmente oscilatórios.
- Inversão de transformadas integrais.

Algumas destas propriedades serão tratadas ao longo deste capítulo.

Em se tratando de soluções de equações da física-matemática, uma solução complexa deve ser tratada como uma função ou número complexos até o momento em que se quer compará-la com um valor medido, físico. Neste momento, devemos associar a parte real e/ou imaginária ou outra quantidade real derivada do número complexo (tal como o módulo) com parâmetros físicos reais. Assim, mencionando somente dois exemplos, o índice de refração real de uma onda eletromagnética propagando-se em um meio ativo torna-se uma quantidade complexa quando a absorção da energia transportada pela onda é incluída. A energia real associada com um nível de energia atômico ou nuclear torna-se complexa quando o tempo de vida finito do nível de energia é considerado.

Mas a mais importante razão para se estudar funções complexas é a compreensão que se pode obter a respeito das propriedades gerais das funções. Por exemplo, as singularidades da função podem estar relacionadas com singularidades físicas, tais como as causadas por fontes, cargas elétricas pontuais, etc. É possível, a partir do conhecimento das singularidades de uma função complexa, especificar-se a função completamente.

Estes serão alguns dos tópicos abordados neste capítulo.

6.1 NÚMEROS E VARIÁVEIS COMPLEXOS

O sistema numérico em uso atualmente é o resultado de um desenvolvimento gradual na matemática que se iniciou na Idade Antiga. Os números naturais (inteiros positivos) $\{0, 1, 2, \dots\}$ foram utilizados inicialmente para a contagem. O conjunto dos números naturais é representado pelo símbolo \mathbb{N} e diz-se que um dado número natural n *pertence* a \mathbb{N} ($n \in \mathbb{N}$).

Os inteiros negativos e o conceito do zero foram então introduzidos para permitir soluções de equações tais como $x+3 = 2$. Cria-se então o conjunto dos números inteiros $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, representado pelo símbolo \mathbb{Z} . Observa-se aqui que o conjunto \mathbb{N} é um sub-conjunto de \mathbb{Z} . Diz-se então que \mathbb{N} *está contido* em \mathbb{Z} ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$), ou que \mathbb{Z} *contém* \mathbb{N} ($\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$).

Para permitir a solução de equações tais como $bx = a$, para todos os inteiros a e b (com $b \neq 0$), os números racionais ($x = a/b$) foram introduzidos. Representa-se o conjunto de todos os números racionais por $\mathbb{Q} = \{x \mid x = p/q, \text{ com } (p, q) \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\}$. Nota-se aqui que \mathbb{Q} contém \mathbb{Z} , consistindo em aqueles $x \in \mathbb{Q} \mid q = 1$.

Posteriormente, os números irracionais foram introduzidos quando descobriu-se que números tais como as soluções da equação

$$x^2 - 2 = 0 \implies x = \pm\sqrt{2} = \pm 1.41423\dots$$

ou a razão entre o perímetro de uma circunferência de raio unitário e o seu diâmetro, igual a $\pi = 3.14159265359\dots$, não podem ser expressos por números racionais. O conjunto dos números irracionais é representado pelo símbolo \mathbb{Q}' . Nota-se aqui que \mathbb{Q} não contém nem está contido em \mathbb{Q}' , sendo ambos conjuntos de números completamente distintos.

A reunião, ou a *união*, dos números racionais com os irracionais formam o conjunto dos números reais, representado pelo símbolo \mathbb{R} ($\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$). Disciplinas usuais de cálculo apresentam seus teoremas e resultados considerando somente números pertencentes ao conjunto \mathbb{R} . Contudo, este conjunto ainda está incompleto para aplicações em álgebra e para a análise matemática.

Os números complexos foram descobertos na Idade Média, ao se pesquisar as raízes de certas equações quadráticas, tais como

$$z^2 + 1 = 0 \implies z = \pm\sqrt{-1}.$$

É óbvio, pelo nome dado, que eles foram considerados de maneira suspeita. Leonhard Paul Euler (1707-1783), em 1777, introduziu o símbolo

$$i = \sqrt{-1}.$$

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), na sua tese de doutorado em 1799, forneceu aos números complexos a agora familiar expressão algébrica $z = x + iy$, bem como a sua representação geométrica (vetorial) e, com isso, ajudou a desvendar parte de seu mistério. Neste século, a tendência tem sido definir os números complexos como símbolos abstratos sujeitos a certas regras formais de manipulação.

Como o número $\sqrt{-1}$ não possui representação possível dentro do conjunto de números reais, chamou-se este número de imaginário puro e atribuiu-se a ele símbolo $i = \sqrt{-1}$. Além disso, definiu-se um conjunto mais amplo de números, denominado conjunto dos números complexos $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$, o qual contém todos os números complexos, tendo o conjunto dos números reais como um sub-conjunto.

Um número complexo nada mais é que um par ordenado de dois números reais x e y . Assim, o número complexo z pode ser representado de, pelo menos, duas maneiras:

$$z = (x, y) = x + iy,$$

sendo a última representação a preferida neste texto. Deve-se notar que o ordenamento é significativo; assim, $a + ib \neq b + ia$.

Uma propriedade imediata do número i pode ser deduzida observando-se que $i^2 = i \cdot i = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$, $i^5 = i \cdot i^4 = i$, \dots . Da mesma forma,

$$\begin{aligned} i^{-1} &= \frac{1}{i} = \frac{i}{i \cdot i} = -i \\ i^{-2} &= \frac{1}{i^2} = -1 \end{aligned}$$

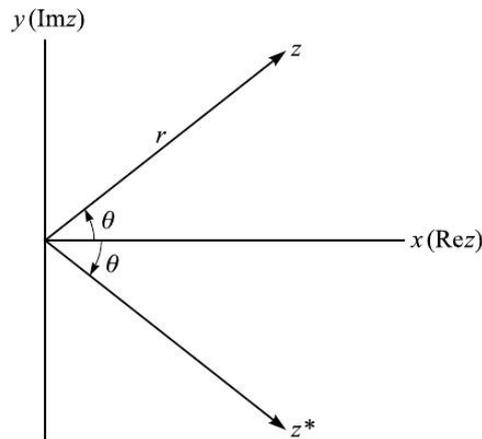


Figura 6.1: Plano complexo ou diagrama de Argand.

$$i^{-3} = -\frac{1}{i} = i$$

$$i^{-4} = 1$$

... ..,

resultando

$$i^{\pm 2n} = (-1)^n \tag{6.1a}$$

$$i^{\pm(2n+1)} = \pm(-1)^n i, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{6.1b}$$

6.1.1 REPRESENTAÇÕES VETORIAL E POLAR

Em muitas situações, é conveniente empregar-se uma representação gráfica da variável complexa. Traçando-se x — a parte real de z — como a abcissa e y — a parte imaginária de z — como a ordenada, obtém-se o plano complexo, ou *plano de Argand*, ilustrado na figura 6.1.

Em álgebra linear, frequentemente utiliza-se o conceito de um vetor posição r como membro do espaço vetorial \mathcal{R}^2 . Assim, pode-se representar o vetor r fazendo-se uso da base canônica $\{\hat{i}, \hat{j}\}$:

$$r = x\hat{i} + y\hat{j},$$

sendo x a componente de r na direção definida por \hat{i} e y a componente de r ao longo de \hat{j} .

Da mesma forma, pode-se interpretar o número complexo $z = x + iy$, de acordo com a representação gráfica da figura 6.1, como um vetor (ou *fator*), sendo x a componente ao longo do eixo real e y a componente ao longo do eixo imaginário. Assim, tal quantidade satisfaz as regras usuais de adição de vetores e de multiplicação por escalar. Inspeccionando a figura 6.1, relações simples de trigonometria mostram que

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta,$$

sendo $r \in \mathbb{R}$ ($0 \leq r < \infty$) denominado *módulo* ou *magnitude* de z e $\theta \in \mathbb{R}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$)¹ chamado de *argumento* ou *fase* de z . Portanto,

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta), \tag{6.2a}$$

onde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{6.2b}$$

$$\theta = \tan^{-1} (y/x). \tag{6.2c}$$

¹Ver uma definição mais geral para o intervalo de variação de θ a seguir.

6.1.2 FÓRMULA DE EULER

Uma representação equivalente à representação algébrica de z dada por (6.2) é a chamada *representação polar*:

$$z = re^{i\theta}. \quad (6.3)$$

Demonstração. A partir das seguintes séries de McLaurin:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\operatorname{cos} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

e das potências (6.1a,b), obtemos

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta. \quad (6.4)$$

Esta é a conhecida *Fórmula de Euler*. □

6.2 ÁLGEBRA DE NÚMEROS COMPLEXOS

Seja $z = x + iy \in \mathbb{C}$ um número complexo qualquer, as seguintes operações e definições se aplicam:

Parte real de z : a parte real de z é o número $x \in \mathbb{R}$. Esta operação é representada por

$$\operatorname{Re} z = x.$$

Parte imaginária de z : a parte imaginária de z é o número $y \in \mathbb{R}$. Esta operação é representada por

$$\operatorname{Im} z = y.$$

Complexo conjugado de z : o complexo conjugado de z , representado por \bar{z} ou z^* , tal que $z^* \in \mathbb{C}$, é definido por $z^* = x - iy$. Na figura 6.1, pode-se observar a representação vetorial de z^* .

Módulo de z : é o número $|z| \in \mathbb{R}$ tal que

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot z^*}.$$

Fase ou argumento de z : número $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi$, dado por

$$\theta \equiv \arg(z) = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right).$$

Usualmente, toma-se $\theta_0 = 0$, mas outros textos podem usar, por exemplo, $-\pi \leq \theta < \pi$.

As seguintes operações algébricas estão definidas para dois números $z_1 = a + ib = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = c + id = r_2 e^{i\theta_2}$ quaisquer, tais que $\{z_1, z_2\} \in \mathbb{C}$. Os números $\{r_1, r_2\} \in \mathbb{R}$ são, respectivamente, os módulos de z_1 e z_2 e $\{\theta_1, \theta_2\} \in \mathbb{R}$ são os respectivos argumentos.

Identidade: Se $z_1 = z_2$, então $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ e $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$; ou, de forma equivalente, $r_1 = r_2$ e $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$.

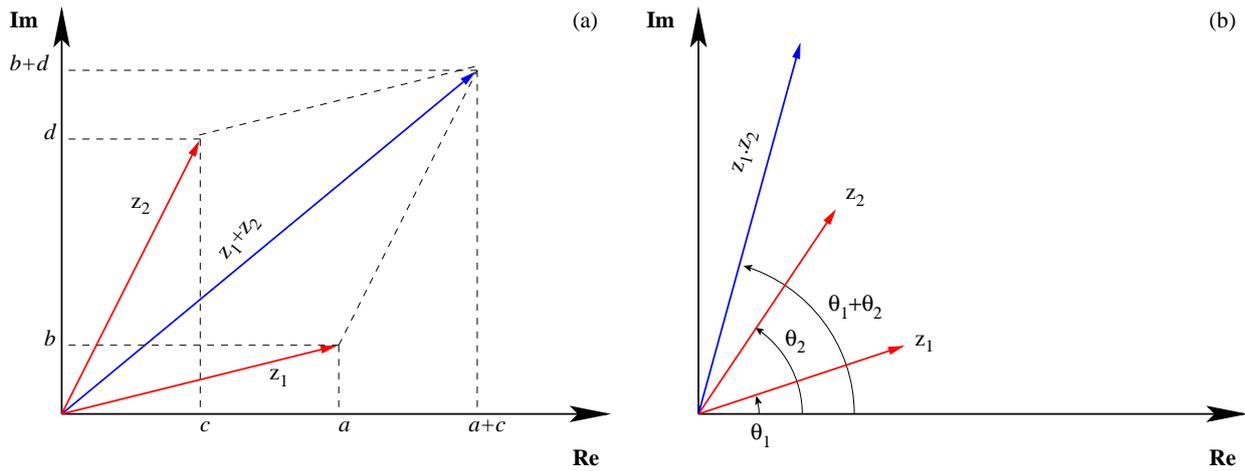


Figura 6.2: (a) Representação da operação $z_1 + z_2$. (b) Representação da operação $z_1 \cdot z_2$.

Adição: $z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + (b + d)i$. Esta operação está representada na figura 6.2(a).

Subtração: $z_1 - z_2 = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + (b - d)i$.

Conjugação complexa da adição: $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$.

Multiplicação por real: Dado um $h \in \mathbb{R}$,

$$h \cdot z_1 = h(a + ib) = ha + ihb.$$

Multiplicação de complexos:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

ou, em termos da forma polar,

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]. \quad (6.5)$$

Esta operação está representada na figura 6.2(b).

Divisão de complexos:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{|z_2|^2}, \text{ ou}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - i \frac{ad - bc}{c^2 + d^2}.$$

Ou, em termos da forma polar,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)].$$

Conjugação complexa do produto: $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$.

Outras operações algébricas, como potenciação e radiciação, serão vistas nas seções seguintes.

O valor absoluto de z ainda possui as seguintes propriedades. Sendo $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ números complexos, então

1. $|z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1| |z_2| \dots |z_n|$.
2. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, desde que $z_2 \neq 0$.
3. $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$.

$$4. |z_1 \pm z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

Números complexos $z = re^{i\theta}$ com $r = 1$ possuem $|z| = 1$ e são denominados *unimodulares*. Pode-se imaginar estes números situados ao longo da circunferência de raio unitário sobre o plano complexo. Pontos especiais nesta circunferência são:

$$\theta = 0. \quad z = e^{i0} = 1.$$

$$\theta = \pi/2. \quad z = e^{i\pi/2} = i.$$

$$\theta = \pi. \quad z = e^{-i\pi} = -1.$$

$$\theta = 3\pi/2 \text{ ou } \theta = -\pi/2. \quad z = e^{i3\pi/2} = e^{-i\pi/2} = -i.$$

6.2.1 FÓRMULA DE MOIVRE

Sejam $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) = r_2 e^{i\theta_2}$ dois números complexos. Então o produto de ambos já foi calculado em (6.5):

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)].$$

Generalizando agora este resultado para n números complexos, $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, obtém-se

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)} = r_1 r_2 \dots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)].$$

Agora, se $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$, onde se escreve $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$. Resulta então,

$$z^n = r^n (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = r^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)], \quad (6.6)$$

a qual é a fórmula para a n -ésima potência ($n > 0$) de z . Cancelando os termos r^n em ambos os lados de (6.6), resulta a Fórmula de Moivre:

$$\boxed{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)}. \quad (6.7)$$

6.2.2 RAÍZES DE NÚMEROS COMPLEXOS

A Fórmula de Moivre (6.7) permite que se obtenha uma expressão para as raízes de um número complexo. Para tanto, considera-se a seguinte equação polinomial:

$$z^n - w = 0, \quad (6.8)$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $w \in \mathbb{C}$. Buscar a solução de (6.8) é equivalente a buscar a raiz n de w . Esta solução poderia ser escrita simplesmente como $z = \sqrt[n]{w}$, mas esta forma dá a entender que existe somente uma solução de (6.8), o que não é verdade. O número de soluções (ou raízes) de um polinômio de grau n , como a função no lado esquerdo de (6.8), é bem determinado, de acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra abaixo.

Teorema 6.1 (Teorema Fundamental da Álgebra). *Toda equação polinomial de grau n , cujos coeficientes são reais ou complexos, possui exatamente n raízes reais ou complexas.*

Portanto, deve-se buscar n soluções para (6.8), o que é equivalente a procurar as n raízes de w , as quais serão denominadas z_0, z_1, \dots, z_{n-1} . Concentrando-nos inicialmente em z_0 , tal que

$$z_0^n = w,$$

pode-se usar para ambos as suas formas polares dadas por (6.2a),

$$z_0 = |z_0|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \text{ e } w = |w|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha).$$

Então, de acordo com (6.7),

$$|z_0|^n (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = |z_0|^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)] = |w|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha), \quad (6.9)$$

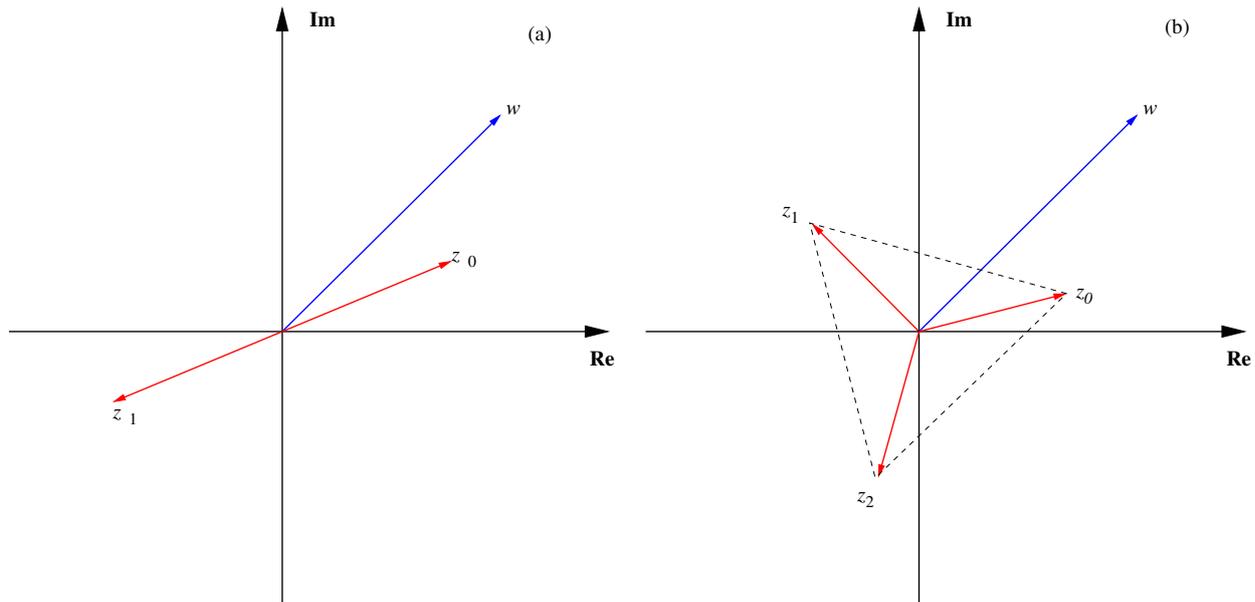


Figura 6.3: (a) Raízes quadradas z_0 e z_1 de $w = 1 + i$. (b) Raízes cúbicas w_0 , w_1 e w_2 de $z = 1 + i$.

possibilitando-nos a identificar

$$|z_0|^n = |w| \implies |z_0| = \sqrt[n]{|w|},$$

$$n\theta = \alpha \implies \theta = \frac{\alpha}{n}.$$

Portanto, a raiz principal de (6.8) é dada por

$$z_0 = \sqrt[n]{|w|} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{n}\right) \right] = \sqrt[n]{|w|} e^{i\alpha/n}. \quad (6.10a)$$

Contudo, como já foi mencionado, existem outras $n - 1$ raízes distintas de w . Estas outras raízes podem ser determinadas levando-se em conta as identidades

$$\cos(\beta \pm 2k\pi) = \cos \beta \text{ e } \operatorname{sen}(\beta \pm 2k\pi) = \operatorname{sen} \beta, \text{ para } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Assim, retornando-se a (6.9), pode-se escrever a relação entre as fases como

$$n\theta - 2k\pi = \alpha \implies \theta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}.$$

Constata-se facilmente que se α for substituído por $\alpha + 2k\pi$ em (6.10a), haverá sempre um número total de n arcos tais que

$$0 \leq \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \leq 2\pi, \text{ para } k = 0, 1, \dots, n - 1,$$

os quais são geometricamente distintos sobre o plano complexo. Se fossem considerados os valores $k = n, n + 1, \dots$, isto simplesmente repetiria os arcos anteriormente encontrados.

Portanto, as n raízes de (6.8), incluindo z_0 , são:

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \left[\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \right] = \sqrt[n]{|w|} e^{i(\alpha + 2k\pi)/n}, \quad (k = 0, 1, \dots, n - 1). \quad (6.10b)$$

Exemplo 6.1 (Raízes quadradas). Dado o número $w = 1 + i$, encontre as suas raízes quadradas.

Solução: há exatamente 2 raízes quadradas para w . Inicialmente, escreve-se w na forma polar:

$$w = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) \implies |w| = \sqrt{2} \text{ e } \alpha = \frac{\pi}{4},$$

sendo que $\pi/4 \sim 45^\circ$. De acordo com (6.10b), $n = 2$, $k = 0, 1$, e as raízes são:

$$z_0 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{8} \right),$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{9\pi}{8} + i \operatorname{sen} \frac{9\pi}{8} \right),$$

sendo que $\pi/8 \sim 22,5^\circ$ e $9\pi/8 \sim 202,5^\circ$, de tal forma que as raízes z_0 e z_1 são antiparalelas no plano complexo. Estas raízes encontram-se representadas no diagrama da figura 6.3(a).

Exemplo 6.2 (Raízes cúbicas). Dado o número $w = 1 + i$, encontre as suas raízes cúbicas.

Solução: há exatamente 3 raízes cúbicas para w . Dado w na forma polar:

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) \implies |z| = \sqrt{2} \text{ e } \theta = \frac{\pi}{4},$$

sendo que $\pi/4 \sim 45^\circ$. Agora, de acordo com (6.10b), $n = 3$, $k = 0, 1, 2$, e as raízes são:

$$z_0 = \sqrt[3]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{12} \right) \right],$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2} \left[\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right],$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} \left[\cos \left(\frac{17\pi}{12} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{17\pi}{12} \right) \right],$$

sendo que $\pi/12 \sim 15^\circ$, $3\pi/4 \sim 135^\circ$ e $17\pi/12 \sim 255^\circ$, de tal forma que z_0 , z_1 e z_2 estão nos vértices de um triângulo equilátero. Estas raízes encontram-se representadas no diagrama da figura 6.3(b).

6.3 FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA

Seja $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto de números complexos $z = x + iy$. Uma *função* $f(z)$, definida em \mathbb{D} é uma operação que atribui a cada $z \in \mathbb{D}$ um outro número complexo $w \in \mathbb{I}$, onde $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{C}$. O número w é denominado o *valor* de $f(z)$ em z , isto é,

$$w = f(z).$$

O conjunto \mathbb{D} é denominado o *domínio de definição de $f(z)$* e o conjunto \mathbb{I} é denominado a *imagem de $f(z)$* .

Deve ser enfatizado que tanto o domínio de definição quanto a operação são necessários para que a função seja bem definida. Quando o domínio não é especificado, deve-se supor que o maior conjunto possível é tomado. Assim, se é mencionada simplesmente a função $f(z) = 1/z$, o domínio é subentendido como o conjunto de todos os pontos não nulos no plano complexo.

Existem dois tipos básicos de funções complexas:

Funções unívocas. Uma função é denominada *unívoca* em \mathbb{D} se a cada valor de z corresponde um único valor de w .

Funções plurívocas. Uma função é denominada *plurívoca* em \mathbb{D} se a um determinado valor de z corresponder mais de um valor de w . Uma função plurívoca pode ser considerada como uma coleção de funções unívocas, onde cada membro desta coleção é chamado de *ramo da função plurívoca*. É usual tomar-se um membro em particular da coleção como o *ramo principal da função plurívoca* e o valor da função correspondente a este ramo é denominado *valor principal*.

Como exemplos de funções unívocas ou plurívocas, pode-se tomar:

1. $w = z^2$ – função unívoca ou simplesmente função.
2. $w = \sqrt{z}$ – função plurívoca, pois a cada valor de z correspondem dois valores de w , de acordo com (6.10b). Assim:

$$\text{se } z = re^{i\theta}, \text{ então } \sqrt{z} = w_k = \sqrt{r}e^{i(\theta+2k\pi)/2}, \text{ onde } k = 0, 1,$$

$$\text{Para } k = 0: w_0 = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \longrightarrow \text{ramo principal.}$$

$$\text{Para } k = 1; w_1 = \sqrt{r}e^{i\theta/2}e^{i\pi} = -\sqrt{r}e^{i\theta/2} \longrightarrow \text{segundo ramo.}$$

6.3.1 TRANSFORMAÇÕES OU MAPEAMENTOS

Nota-se agora que w , como o valor de $f(z)$, também é uma variável complexa e que, portanto, pode ser escrita na forma

$$w = u + iv,$$

sendo $\{u, v\} \subset \mathbb{R}$, ao passo que $f(z)$ também pode ser separada em partes real e imaginária,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

onde $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são ambas funções reais. Igualando as partes real e imaginária das expressões acima, obtém-se

$$\operatorname{Re} w = u = u(x, y), \quad \operatorname{Im} w = v = v(x, y).$$

Se $w = f(z)$ é uma função unívoca de z , então pode-se imaginar o *plano complexo de z* e, a cada ponto neste plano, corresponde um ponto no *plano complexo de w* . Se $f(z)$ for plurívoca, então um ponto no plano complexo de z é mapeado em mais de um ponto no plano complexo de w . Pontos no plano z são *mapeados* em pontos no plano w , enquanto que curvas no plano z são *mapeadas* em curvas no plano w . A figura 6.4 ilustra o processo de mapeamento.

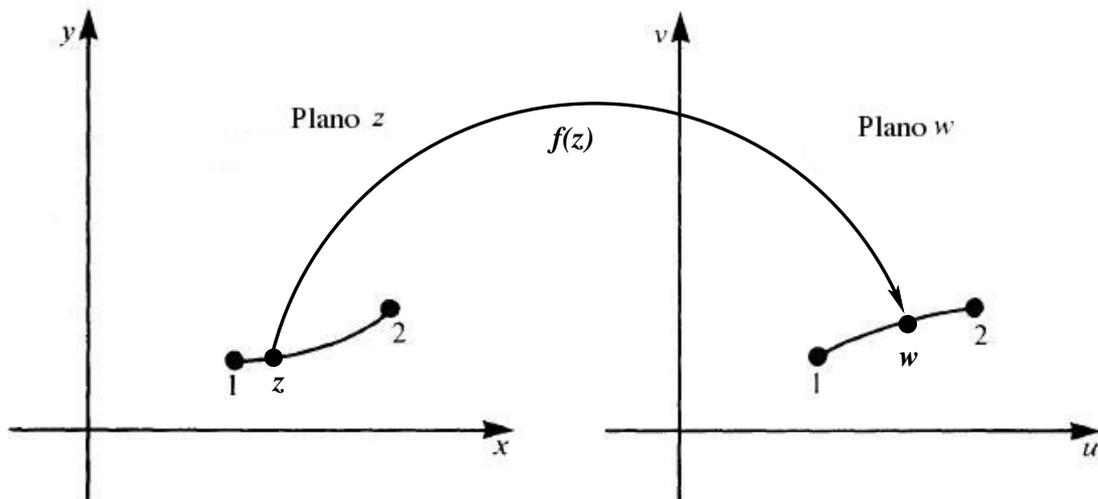


Figura 6.4: A função $w = f(z)$ mapeia pontos no plano z em pontos no plano w .

6.3.2 PONTOS DE RAMIFICAÇÃO, LINHAS DE RAMIFICAÇÃO E SUPERFÍCIES DE RIEMANN

Comparando agora o comportamento de uma função unívoca, $f_1(z) = z^2$, e de uma função plurívoca, $f_2(z) = \sqrt{z}$, percebe-se uma diferença importante entre ambas. Suponha que seja permitido que $z = re^{i\theta}$ execute uma revolução completa em torno do ponto $z = 0$, no sentido anti-horário e mantendo $r = \text{cte.}$, partindo de um determinado ponto no seu plano complexo. Esta operação consiste em substituir

$$\theta \longrightarrow \theta + 2\pi \tag{6.11}$$

na fórmula polar de z . Observando agora o comportamento de $f_1(z)$ e $f_2(z)$ frente a transformação (6.11), observa-se que

$$\begin{aligned} f_1(z) &\rightarrow r^2 e^{i2\theta} e^{i4\pi} \rightarrow f_1(z) \\ f_2(z) &\rightarrow r^{1/2} e^{i\theta/2} e^{i\pi} \rightarrow -f_2(z). \end{aligned}$$

Pode-se constatar que $f_1(z)$ permanece inalterada frente a transformação (6.11), porém $f_2(z)$ muda de sinal. Como o plano complexo possui por definição uma variação total de fase igual a 2π , a transformação (6.11) levou $f_2(z)$ a um valor distinto daquele que apresentava no início. De fato, $f_2(z)$ somente retornará ao valor inicial através de uma nova rotação completa. Ou seja,

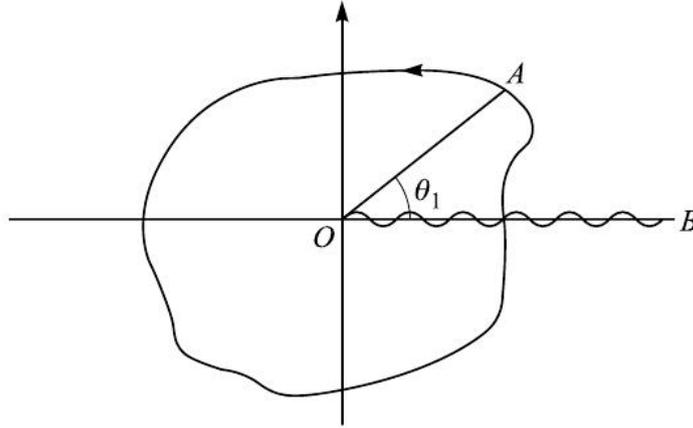


Figura 6.5: Linha de ramificação para a função $w = \sqrt{z}$.

$f_2(z) = \sqrt{z}$ não apresenta simetria frente a uma rotação de 2π radianos, mas sim frente a uma rotação $\theta \rightarrow \theta + 4\pi$, em cuja situação

$$f_2(z) \rightarrow r^{1/2} e^{i\theta/2} e^{i2\pi} \rightarrow f_2(z).$$

Pode-se descrever o que se sucede com a função $f_2(z) = \sqrt{z}$ afirmando-se que quando $0 \leq \theta < 2\pi$, o mapeamento do plano z para o plano w permanece sobre um dos ramos da função plurívoca $f_2(z)$, enquanto que no intervalo $2\pi \leq \theta < 4\pi$, o mapeamento leva ao outro ramo da função. Claramente, sobre cada ramo a função $f_2(z)$ é unívoca e, para assim mantê-la, estabelece-se uma barreira artificial ligando a origem ao infinito ao longo de alguma reta sobre o plano complexo de z . A função permanecerá unívoca desde que esta barreira não seja cruzada.

Para a função \sqrt{z} , esta linha é usualmente traçada ao longo do eixo real positivo e é denominada **linha de ramificação**, enquanto que o ponto O , de onde parte a linha de ramificação, é denominado **ponto de ramificação**. A figura 6.5 mostra esta linha de ramificação como uma linha sinuosa sobre o eixo real positivo. É importante enfatizar aqui que uma volta em torno de um outro ponto qualquer, distinto da origem, de tal forma que esta não esteja dentro da área delimitada pelo caminho fechado, não leva a um outro ramo da função \sqrt{z} . Ou seja, o ponto O é o único ponto de ramificação desta função.

George Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) sugeriu uma outra interpretação para a linha de ramificação definida acima. Imagina-se o plano z composto por duas folhas sobrepostas uma à outra. Corta-se agora as duas folhas ao longo da linha OB vista na figura 6.5 e junta-se a borda inferior da folha de baixo à borda superior da folha de cima. Da mesma forma, juntam-se as outras duas bordas. Partindo-se então do primeiro quadrante da folha de cima, realiza-se uma volta completa sobre o plano z em torno de O . Ao se cruzar a linha de ramificação, passa-se para o primeiro quadrante da folha de baixo; ao se realizar mais um volta completa em torno da origem, retorna-se à folha de cima ao se cruzar pela segunda vez a linha de ramificação. Desta maneira, a função \sqrt{z} permanece unívoca sobre um domínio no qual $0 \leq \theta < 4\pi$.

A coleção de duas folhas para a garantia da unicidade da função \sqrt{z} é denominada de **superfície de Riemann**. Cada **folha de Riemann** corresponde a um ramo da função e, sobre cada folha, a função é unívoca. O conceito de superfície de Riemann possui a vantagem de possibilitar a obtenção dos vários valores de uma função plurívoca de uma maneira contínua. A figura 6.6 ilustra as duas folhas de Riemann da função \sqrt{z} .

6.3.3 EXEMPLOS DE FUNÇÕES UNÍVOCAS OU PLURÍVOCAS

Além das funções $f_1(z) = z^2$ e $f_2(z) = \sqrt{z}$ já abordadas, outras funções de uma variável complexa que com frequência surgem são as seguintes.

Função exponencial. Definida por

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Funções trigonométricas. Define-se as funções trigonométricas em termos das funções exponenciais.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ \operatorname{cos} z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \end{aligned} \right\} \cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1.$$

Funções trigonométricas hiperbólicas. De maneira análoga, define-se

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{senh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\ \operatorname{cosh} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \end{aligned} \right\} \operatorname{cosh}^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1.$$

É possível mostrar as seguintes relações entre as funções trigonométricas circulares e as hiperbólicas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} iz &= i \operatorname{senh} z & \operatorname{senh} iz &= i \operatorname{sen} z \\ \operatorname{cos} iz &= \operatorname{cosh} z & \operatorname{cosh} iz &= \operatorname{cos} z. \end{aligned}$$

Função logarítmica. Esta é uma outra função plurívoca, definida por

$$w = \ln z = \ln \left[r e^{i(\theta + 2k\pi)} \right] = \ln r + i(\theta + 2k\pi), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Como se pode notar, esta função possui infinitos ramos, sendo $w = \ln r + i\theta$, para $0 \leq \theta < 2\pi$, o ramo principal. A superfície de Riemann para esta função está representada na figura 6.7.

6.4 O CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA

Nesta seção serão definidos os conceitos de limites, continuidade e de derivação de uma função de uma variável complexa.

6.4.1 LIMITE DE UMA FUNÇÃO COMPLEXA

Dados os números $\{z, z_0, w_0\} \subset \mathbb{C}$, diz-se que o número w_0 é o limite de $f(z)$ à medida que z se aproxima de z_0 , o que é escrito como

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0,$$

se:

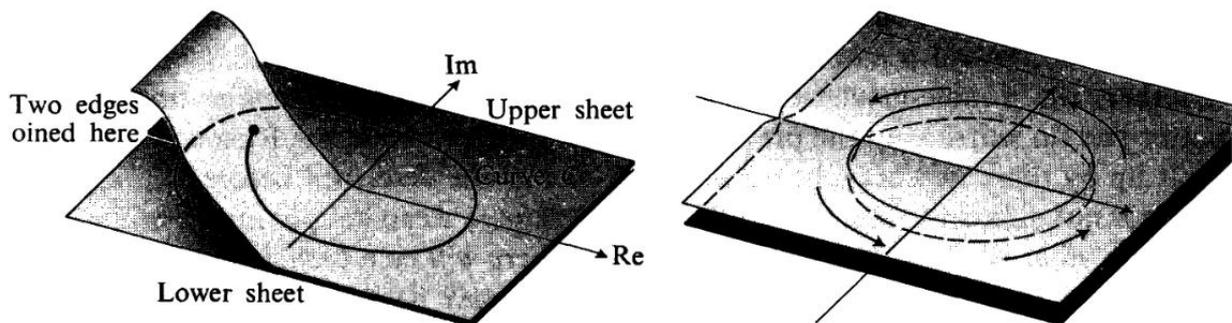


Figura 6.6: Folhas de Riemann da função \sqrt{z} .

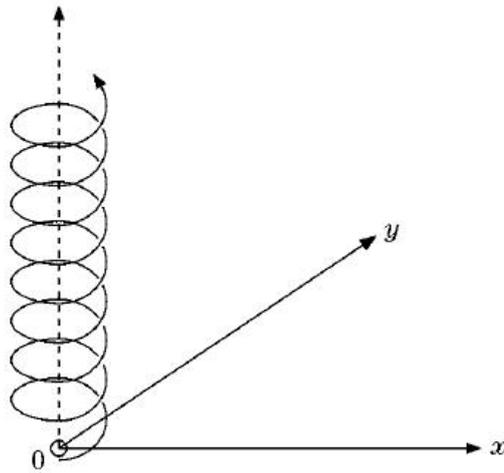


Figura 6.7: Superfície de Riemann da função $\ln z$.

1. A função $f(z)$ está definida e é unívoca em uma vizinhança de $z = z_0$, com a possível exceção do próprio ponto z_0 .
2. Dado um número real positivo qualquer ϵ , arbitrariamente pequeno, existe um outro número real positivo δ tal que

$$|f(z) - w_0| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

É importante observar o seguinte:

- O limite w_0 deve ser sempre o mesmo para um dado z_0 , independente da maneira como é realizado o limite $z \rightarrow z_0$.
- Se $f(z)$ é uma função plurívoca, o limite para $z \rightarrow z_0$ depende do particular ramo em que se encontra a vizinhança de z_0 .

A figura 6.8 ilustra as vizinhanças dos pontos $z = x + iy$ e $w_0 = u + iv$ nos respectivos planos complexos.

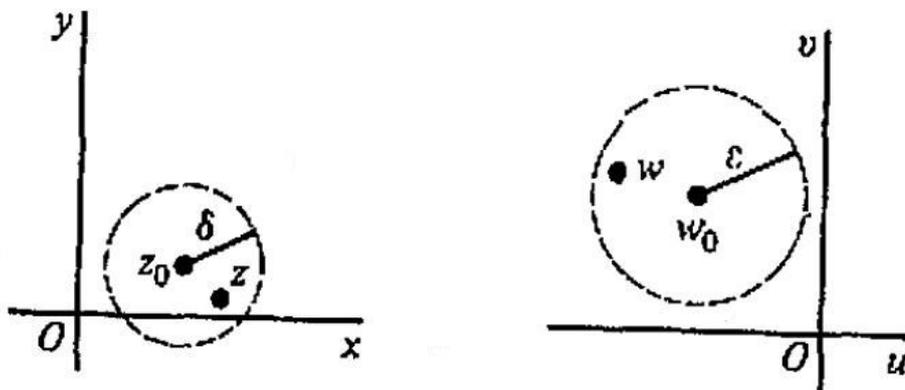


Figura 6.8: Vizinhanças dos pontos z_0 e w_0 nos respectivos planos complexos.

Exemplo 6.3 (Cálculos de limites). Encontre os seguintes limites:

(a) Se $f(z) = z^2$, prove que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = z_0^2$.

(b) Encontre $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ se

$$f(x) = \begin{cases} z^2, & z \neq z_0 \\ 0, & z = z_0. \end{cases}$$

Solução.

(a) Deve-se mostrar que para qualquer $\epsilon > 0$ é sempre possível encontrar-se um $\delta > 0$ (dependendo, em geral, de ϵ) tal que $|z^2 - z_0^2| < \epsilon$ sempre que $0 < |z - z_0| < \delta$.

Para tanto, considera-se $\delta < 1$. Neste caso, $0 < |z - z_0| < \delta$ implica que

$$\begin{aligned} |z - z_0||z + z_0| &< \delta |z + z_0| = \delta |z - z_0 + 2z_0|, \\ |z^2 - z_0^2| &< \delta (|z - z_0| + 2|z_0|) < \delta (1 + 2|z_0|). \end{aligned}$$

Para um $\epsilon \leq 1$ escolhe-se então $\delta = \epsilon / (1 + 2|z_0|)$, ou seja, $\delta < \epsilon \forall z_0 \in \mathbb{C}$, de tal maneira que

$$|z^2 - z_0^2| < \epsilon,$$

provando-se o limite.

(b) Não há diferença entre este problema e o problema da parte (a), uma vez que em ambos os casos o ponto $z = z_0$ foi excluído. Portanto, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = z_0^2$. Nota-se que o valor do limite não necessariamente é igual ao valor de $f(z_0)$.

Teorema 6.2 (Propriedades dos limites). Se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_1$ e $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = w_2$, então as seguintes propriedades de limites são válidas:

- $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = w_1 + w_2$.
- $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)g(z)] = \left[\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \right] \left[\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \right] = w_1 w_2$.
- $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)} = \frac{w_1}{w_2}$, desde que $w_2 \neq 0$.

6.4.2 CONTINUIDADE

Seja $f(z)$ definida e unívoca em uma vizinhança de $z = z_0$, assim como em $z = z_0$. A função $f(z)$ é dita contínua em $z = z_0$ se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Observa-se que isso implica em três condições que devem ser satisfeitas:

1. O limite deve existir.
2. $f(z_0)$ deve existir, isto é, $f(z)$ deve ser definida em $z = z_0$.
3. O limite deve ser igual a $f(z_0)$.

Pontos no plano z onde $f(z)$ deixa de ser contínua são denominados **descontinuidades de $f(z)$** .

Se o limite $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe mas não é igual a $f(z_0)$, então z_0 é denominado uma **descontinuidade removível**, pois é sempre possível redefinir-se $f(z)$ para se obter uma função contínua.

Teorema 6.3 (Teoremas de continuidade). Os seguintes teoremas de continuidade são válidos.

- Se $f(z)$ e $g(z)$ são contínuas em $z = z_0$, então também são contínuas:

$$f(z) + g(z), f(z)g(z) \text{ e } \frac{f(z)}{g(z)}, \text{ desde que } g(z_0) \neq 0.$$

- Se $w = f(z)$ é contínua em $z = z_0$ e $z = g(\xi)$ é contínua em $\xi = \xi_0$ e se $\xi_0 = f(z_0)$, então a função $w = g[f(z)]$ é contínua em $z = z_0$.

Uma função contínua de uma função contínua também é contínua.

- Se $f(z)$ é contínua em uma região fechada do plano complexo, então ela é limitada nessa região; isto é, existe uma constante real positiva M tal que $|f(z)| < M$ para todos os pontos z dentro dessa região.
- Se $f(z)$ é contínua em uma região, então as partes real e imaginária de $f(z)$ também são contínuas nessa região.

6.4.3 DERIVADAS DE FUNÇÕES COMPLEXAS

Dada uma função $f(z)$, contínua e unívoca de uma variável complexa z , em uma dada região $R \subseteq \mathbb{C}$, a derivada

$$f'(z) \equiv \frac{df}{dz}$$

em algum ponto fixo $z_0 \in R$ é definida como

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \quad (6.12)$$

desde que este limite exista de forma **independente da maneira como** $\Delta z \rightarrow 0$. Aqui, $\Delta z = z - z_0$, sendo $z \in R$ algum ponto na vizinhança de z_0 .

Teorema 6.4. *Se uma função $f(z)$ possui derivada em $z = z_0$, então ela é necessariamente contínua em $z = z_0$.*

Demonstração. Supondo que $f'(z_0)$ exista, então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \lim_{z \rightarrow z_0} \Delta z = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z_0 + \Delta z) = f(z_0).$$

□

Se $f'(z)$ existe em z_0 e em todos os pontos em uma dada vizinhança de z_0 , então $f(z)$ é dita **analítica em** z_0 . A função $f(z)$ é analítica na região R se ela é analítica em todos os pontos $z \in R$. Contudo, nem toda a função contínua é diferenciável em $z = z_0$.

Exemplo 6.4. Dada a a função $f(z) = z^*$, mostre que embora esta seja contínua em qualquer $z_0 \in \mathbb{C}$, sua derivada dz^*/dz não existe em z_0 .

Solução. Pela definição (6.12),

$$\begin{aligned} \frac{dz^*}{dz} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^* - z^*}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{(x + iy + \Delta x + i\Delta y)^* - (x + iy)^*}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{x - iy + \Delta x - i\Delta y - (x - iy)}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}. \end{aligned}$$

Se $\Delta y = 0$, o limite resulta em $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x/\Delta x = 1$. Por outro lado, se $\Delta x = 0$, o limite resulta em $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} (-\Delta y)/\Delta y = -1$. Portanto, como o valor do limite depende da maneira como $\Delta z \rightarrow 0$, a derivada de $f(z) = z^*$ não existe em nenhum ponto e, portanto, a função não é analítica em nenhum ponto.

Exemplo 6.5. Dada a função $g(z) = |z|^2$, mostre que esta somente é diferenciável em $z = 0$.

Solução. Pela definição (6.12),

$$\begin{aligned} g'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|z + \Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)(z^* + \Delta z^*) - zz^*}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z^* \Delta z + z \Delta z^* + \Delta z \Delta z^*}{\Delta z} = z^* + z \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z^*}{\Delta z} + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta z^*. \end{aligned}$$

Pode-se considerar 2 possibilidades:

1. $z = 0$. Neste caso,

$$g'(z)|_{z=0} = 0,$$

e a derivada existe.

2. $z \neq 0$. Neste caso, se $g'(z)$ existe, então a derivada deve existir independente da maneira como se toma o limite. Assim:

- Se $\Delta z = \Delta x$, então $\Delta z^* = \Delta z$ e o limite fica

$$g'(z) = z^* + z.$$

- Se $\Delta z = i\Delta y$, então $\Delta z^* = -\Delta z$ e o limite fica

$$g'(z) = z^* - z.$$

Portanto, a função $g(z)$ não é analítica, pois somente possui derivada em $z = 0$.

Teorema 6.5 (Regras de derivação). *As regras de derivação para somas, produtos e quocientes de funções são, em geral, as mesmas que as regras para funções reais. Isto é, se $f'(z_0)$ e $g'(z_0)$ existem, então*

- $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$.
- $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}$, se $g(z_0) \neq 0$.

6.4.4 AS CONDIÇÕES DE CAUCHY-RIEMANN

Para testar se uma função $f(z)$ é analítica, Cauchy e Riemann criaram um teste simples mas extremamente importante para testar a analiticidade de $f(z)$. Para deduzir as condições de Cauchy-Riemann, retorna-se à definição (6.12),

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \tag{6.13}$$

Escrevendo $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, obtém-se

$$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta x + i\Delta y} + i \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Existe um número infinito de maneiras para Δz tender a zero sobre o plano complexo. Consideram-se duas possibilidades (ver figura 6.9): ao longo de x ou ao longo de y . Supondo-se que se tome primeiro a rota ao longo de x , mantendo y constante, isto é, $\Delta y = 0$. Neste caso,

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Agora, toma-se a rota ao longo de y , mantendo x constante ($\Delta x = 0$). Neste caso,

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

A condição necessária para que $f(z)$ seja analítica é que o limite deve resultar sempre no mesmo valor, independente do caminho adotado sobre o plano complexo. Portanto, uma condição necessária para que $f(z)$ seja analítica é

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y},$$

de onde resultam as **condições de Cauchy-Riemann**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{6.14}$$

Estas relações fornecem também duas expressões úteis para a derivada de $f(z)$:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{6.15}$$

Podemos estabelecer então o seguinte teorema.

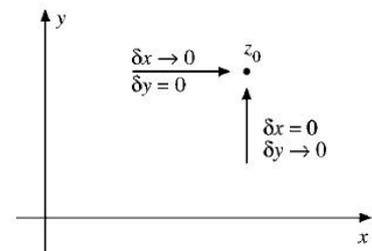


Figura 6.9: Caminhos alternativos para z_0 .

Teorema 6.6 (Condição necessária). Se a derivada $f'(z)$ de um função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ existe em um ponto $z = x + iy$, então as derivadas parciais de primeira ordem de $u(x, y)$ e $v(x, y)$ com respeito a x e a y devem existir neste ponto e satisfazer as relações de Cauchy-Riemann (6.14). Além disso, $f'(z)$ pode ser determinada pelas expressões (6.15).

Exemplo 6.6 (Condições de Cauchy-Riemann). Seja a função $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$. Neste caso, $u(x, y) = x^2 - y^2$ e $v(x, y) = 2xy$. Para estas funções,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Portanto, as relações de Cauchy-Riemann são satisfeitas e $f'(z)$ pode ser obtida por (6.15),

$$f'(z) = 2x + i2y = 2z.$$

Exemplo 6.7 (Condições de Cauchy-Riemann). Seja agora a função $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$. Neste caso, $u(x, y) = x^2 + y^2$ e $v(x, y) = 0$. Portanto, embora as derivadas parciais existam,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

estas não satisfazem as relações (6.14) e, portanto, a função $f(z)$ não possui derivada.

As condições de Cauchy-Riemann fornecem uma condição *necessária* para que a função seja diferenciável em algum ponto $z = z_0$. Contudo, não há garantia até este momento de que estas condições sejam *suficientes* para garantir a existência desta derivada. Um teorema mais geral, apresentado a seguir, estabelece as condições necessária e suficiente para a existência da derivada de $f(z)$.

Teorema 6.7 (Condição necessária e suficiente). Dada a função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, se $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são contínuas com derivadas parciais de primeira ordem e que satisfazem as condições de Cauchy-Riemann (6.14) em todos os pontos em uma região $R \subseteq \mathbb{C}$, então $f(z)$ é analítica em R .

Demonstração. Para provar este teorema, é necessário empregar o seguinte teorema do cálculo de funções reais de 2 variáveis: se $h(x, y)$, $\partial h/\partial x$ e $\partial h/\partial y$ são contínuas em uma região R em torno do ponto (x_0, y_0) , então existe uma função $H(\Delta x, \Delta y)$ tal que $H(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ à medida que $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ e

$$h(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - h(x_0, y_0) = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} \Delta x + \frac{\partial h}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \Delta y + H(\Delta x, \Delta y) \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Retornando então à definição de derivada (6.13)

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

sendo z_0 qualquer ponto que pertence a R e $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Pode-se escrever então

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = [u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)] + i[v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)],$$

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \Delta y + H(\Delta x, \Delta y) \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} + i \left[\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \Delta y + G(\Delta x, \Delta y) \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right],$$

onde $H(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ e $G(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$.

Empregando agora as condições de Cauchy-Riemann (6.14), obtém-se

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} + i \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} \right] (\Delta x + i\Delta y)$$

$$+ [H(\Delta x, \Delta y) + iG(\Delta x, \Delta y)] \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

portanto,

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} + i \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} + [H(\Delta x, \Delta y) + iG(\Delta x, \Delta y)] \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Assim, no limite $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$,

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x + i\Delta y} \rightsquigarrow \left| \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x + i\Delta y} \right| = 1.$$

Ou seja,

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} + i \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)},$$

o que mostra que o limite e, portanto, $f'(z)$ existem em todos os pontos em R . As condições de Cauchy-Riemann são, portanto necessárias e suficientes para garantir a existência de $f'(z)$ em R . \square

6.4.5 FUNÇÕES ANALÍTICAS

Uma função $f(z)$ é analítica em um ponto z_0 se a sua derivada $f'(z)$ existe não somente em z_0 mas em todos os pontos z dentro de uma vizinhança de z_0 . As seguintes definições são feitas, com respeito a funções analíticas:

- Uma função é dita analítica em um domínio $R \subseteq \mathbb{C}$ se ela é analítica em todos os pontos $z \in R$. Uma função analítica também é denominada **regular** ou **holomórfica**.
- Se a função $f(z)$ é analítica sobre todo o plano z complexo, ela é denominada **inteira**.
- Uma função $f(z)$ é denominada **singular em** $z = z_0$ se ela não é diferenciável neste ponto. O ponto z_0 é denominado **ponto singular** ou **singularidade** de $f(z)$.

6.4.6 FUNÇÕES HARMÔNICAS

Se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em alguma região R do plano complexo, então em todos os pontos desta região as condições de Cauchy-Riemann (6.14) são satisfeitas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

e, portanto,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \text{ e } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x},$$

desde que as derivadas segundas existam. Igualando a ambas as expressões acima, obtém-se que $u(x, y)$ e $v(x, y)$ satisfazem a Equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{6.16a}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \tag{6.16b}$$

sobre toda a região R .

Toda a função que satisfaz as equações de Laplace (6.16) é denominada de **função harmônica**. Como ambas as funções u e v satisfazem a (6.16), estas são denominadas **funções harmônicas conjugadas**.

6.4.7 PONTOS SINGULARES

Um ponto onde $f(z)$ deixa de ser analítica é denominado ponto singular ou singularidade de $f(z)$. As condições de Cauchy-Riemann não são obedecidas em um ponto singular.

Existem várias tipos de pontos singulares distintos:

- 1. Pontos singulares isolados.** O ponto $z = z_0$ é denominado ponto singular isolado de $f(z)$ se for possível encontrar-se uma quantidade $\delta > 0$ tal que o círculo $|z - z_0| = \delta$ circunda apenas o ponto singular z_0 . Se não for possível encontrar-se um $\delta > 0$, o ponto z_0 é denominado ponto singular não isolado.
- 2. Polos.** O ponto singular $z = z_0$ é denominado **polo de ordem n** de $f(z)$ se for possível encontrar-se um número inteiro positivo n tal que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0. \quad (6.17)$$

Exemplos:

- $f(z) = 1/(z - 2)$ possui um **polo simples** ou de ordem 1 em $z = 2$.
- $f(z) = 1/(z - 2)^2$ possui um **polo duplo** ou de ordem 2 em $z = 2$.
- $f(z) = 1/(z - 2)^3$ possui um polo de ordem 3 em $z = 2$.

- 3. Ponto de ramificação.** Uma função possui um ponto de ramificação em $z = z_0$ se, após circular-se em torno de z_0 , retornando ao ponto de partida sobre o plano z , a função não retorna ao seu valor inicial sobre o plano w . Os pontos de ramificação são singularidades das funções plurívocas. Por exemplo, a função $f(z) = \sqrt{z}$ possui um ponto de ramificação em $z = 0$.
- 4. Singularidades removíveis.** O ponto singular $z = z_0$ é denominado uma singularidade removível se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe. Por exemplo, a função $f(z) = \sin z/z$ possui um ponto singular em $z = 0$, mas $\lim_{z \rightarrow 0} \sin z/z = 1$. Neste caso, pode-se redefinir a função $f(z)$ para esta esteja definida em z_0 .
- 5. Singularidades essenciais.** Uma função possui uma singularidade essencial em z_0 se esta não possui polos, em qualquer ordem, que sejam eliminados pela multiplicação por $(z - z_0)^n$, para qualquer valor finito de n . Por exemplo, a função $f(z) = e^{1/(z-2)}$ possui uma singularidade essencial em $z = 2$.
- 6. Singularidades no infinito.** Uma função $f(z)$ possui uma singularidade em $z \rightarrow \infty$ se esta for do mesmo tipo que a singularidade de $f(1/w)$, para $w \rightarrow 0$. Por exemplo, $f(z) = z^2$ possui um polo de ordem 2 no infinito, uma vez que $f(1/w) = 1/w^2$ possui um polo duplo em $w = 0$.

6.5 INTEGRAÇÃO NO PLANO COMPLEXO

Integração complexa é uma ferramenta muito importante na física-matemática. Por exemplo, com frequência surgem integrais de funções reais que não podem ser calculadas pelos métodos usuais de integração, mas que podem ser resolvidas estendendo-se a definição do integrando para o conjunto dos números complexos e realizando-se a integração neste plano. Na análise matemática, o método de integração complexa possibilita demonstrações de algumas propriedades básicas de funções analíticas, as quais seriam muito difíceis de ser realizadas sem o recurso da integração complexa.

O resultado mais importante na teoria da integração complexa é o teorema integral de Cauchy, a partir do qual as fórmulas integrais de Cauchy são derivadas. A outra propriedade de fundamental importância para a física-matemática é o teorema dos resíduos, que possibilita o cálculo de integrais que não poderiam ser realizadas de outra maneira. Estes resultados serão abordados nas seções posteriores. Nesta seção, será introduzido o conceito de integral de caminho sobre o plano complexo e apresentadas as propriedades matemáticas fundamentais das integrais complexas.

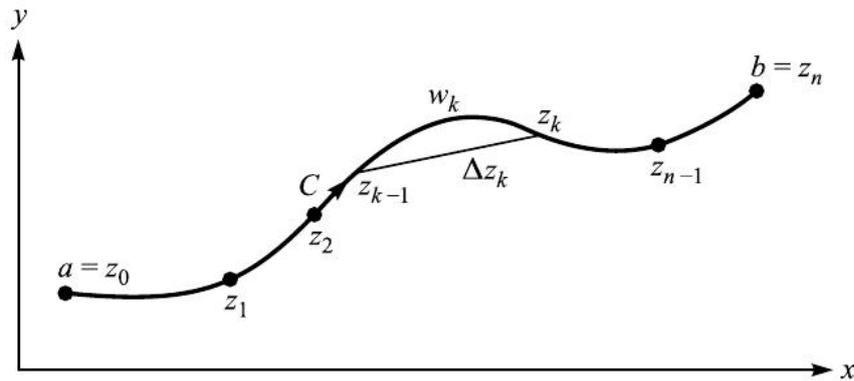


Figura 6.10: Caminho C ao longo do qual a integração complexa é realizada.

6.5.1 INTEGRAIS DE CAMINHO NO PLANO COMPLEXO

Uma integral de caminho, também denominada **integral de linha**, possui uma relação com a derivada no plano complexo exatamente igual à que existe para funções reais. Se a função $F(z)$ é dada pela integral indefinida $F(z) = \int f(z) dz$, então a derivada de $F(z)$ é dada por $F'(z) = f(z)$. Em outras palavras uma integral indefinida no plano complexo é a operação inversa da derivação no mesmo plano.

Por outro lado, o plano complexo é definido a partir de duas variáveis independentes reais. Neste caso, poder-se-ia pensar que uma integral (definida) no plano complexo seria equivalente a uma integral de superfície de uma função real de duas variáveis. Contudo, na análise das funções complexas, a função $f(z)$ é integrada *ao longo de um caminho no plano complexo*. Para tanto, pode-se parametrizar o caminho ao longo do plano z fazendo-se uso de um parâmetro real t :

$$z(t) = x(t) + iy(t) \text{ para } a \leq t \leq b,$$

o qual define um caminho sobre o plano complexo à medida que t varia de a a b . Diz-se que este curva é **suave** se existe um vetor tangente à mesma ao longo de todos os pontos; isto implica que dx/dt e dy/dt existem são contínuas e não são nulas simultaneamente para $a \leq t \leq b$.

Sendo C uma curva suave sobre o plano z complexo, como mostra a figura 6.10, assume-se que a mesma possui um comprimento finito. Dada agora a função $f(z)$, contínua sobre todos os pontos ao longo de C , subdivide-se C em n partes por meio dos pontos $\{z_0, z_1, z_2, \dots, z_n\}$, arbitrariamente escolhidos, mas com $z_0 = a$ e $z_n = b$. Para cada arco de C que conecta os pontos z_{k-1} e z_k ($k = 1, 2, \dots, n$), escolhe-se um ponto w_k ($z_{k-1} \leq w_k \leq z_k$) e forma-se a soma

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(w_k) \Delta z_k, \text{ onde } \Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$

Fazendo-se agora com que o número de subdivisões n aumente indefinidamente, de tal forma que o maior dos $|\Delta z_k|$ tenda a zero, a soma S_n aproxima-se de um limite. Se este limite existe e possui o mesmo valor, independente das escolhas dos $\{z_k\}$ e dos $\{w_k\}$ ao longo de C , então este limite é denominado a **integral de caminho (ou de linha) de $f(z)$ ao longo de C** e é denotado por:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{|\Delta z|_{\max} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(w_k) \Delta z_k \equiv \int_C f(z) dz = \int_a^b f(z) dz. \tag{6.18}$$

Quando o caminho é fechado, isto é, quando $b = a$ (ou $z_n = z_0$), a integral de linha é denominada **integral de contorno de $f(z)$** , a qual é denotada por

$$S = \oint_C f(z) dz.$$

Teorema 6.8 (Teorema de existência). *Se o caminho C é suave por partes e $f(z)$ é contínua ao longo de C , então $\int_C f(z) dz$ sempre existe.*

6.5.2 PROPRIEDADES MATEMÁTICAS DAS INTEGRAIS DE LINHA

A integral de linha de $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ao longo de um caminho C pode sempre ser expressa em termos de integrais reais de caminho como

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u + iv)(dx + idy) = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy),$$

onde a curva C pode ser aberta ou fechada, mas o sentido de integração deve sempre ser especificado, por exemplo através do uso de um parâmetro t . Invertendo-se o sentido de variação de t , inverte-se o sinal da integral.

Integrais complexas são, portanto, redutíveis a integrais reais de caminho e possuem as seguintes propriedades:

- (1) $\int_C [f(z) + g(z)] dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz.$
- (2) $\int_C kf(z) dz = k \int_C f(z) dz,$ sendo $k \in \mathbb{C}$ uma constante.
- (3) $\int_a^b f(z) dz = - \int_b^a f(z) dz,$ sendo $\{a, b\} \in \mathbb{C}.$
- (4) $\int_a^b f(z) dz = \int_a^m f(z) dz + \int_m^b f(z) dz,$ sendo $m \in \mathbb{C}.$
- (5) $\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML,$ onde $M = \max |f(z)|$ ao longo de C e L é o comprimento de $C.$
- (6) $\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz|.$

A propriedade (5), em particular, é bastante útil e será bastante utilizada, porque ao se trabalhar com integrais de linha complexas, com frequência é necessário estabelecer-se limites nos seus valores absolutos.

Demonstração. (Propriedade 5). Retornando à definição (6.18),

$$\int_C f(z) dz = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ |\Delta z|_{\max} \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(w_k) \Delta z_k.$$

Mas,

$$\left| \sum_{k=1}^n f(w_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(w_k)| |\Delta z_k| \leq M \sum_{k=1}^n |\Delta z_k| \leq ML,$$

onde se fez uso do fato de que $|f(z)| \leq M$ para todos os pontos z ao longo de C e que $\sum |\Delta z_k|$ representa a soma de todas as cordas juntando os pontos z_{k-1} e z_k ao longo de C e que esta soma não pode ser maior que o comprimento L de C . Tomando-se agora o limite para $n \rightarrow \infty$ em ambos os lados, resulta a propriedade (5). A propriedade (6) também segue desta demonstração. \square

Exemplo 6.8. Calcule a integral $\int_C (z^*)^2 dz$, sendo C a linha reta ligando os pontos $z = 0$ e $z = 1 + 2i$.

Solução. Uma vez que

$$(z^*)^2 = (x - iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy,$$

resulta

$$\int_C (z^*)^2 dz = \int_C [(x^2 - y^2) dx + 2xy dy] + i \int_C [-2xy dx + (x^2 - y^2) dy].$$

Para parametrizar a curva C , pode-se escolher $x(t)$ e $y(t)$ dados por

$$x(t) = t, \quad y(t) = 2t, \quad \text{para } (0 \leq t \leq 1),$$

ou, simplesmente, pode-se escrever $y = 2x$. Portanto,

$$\int_C (z^*)^2 dz = \int_0^1 5x^2 dx + i \int_0^1 (-10x^2) dx = \frac{5}{3} - \frac{10}{3}i.$$

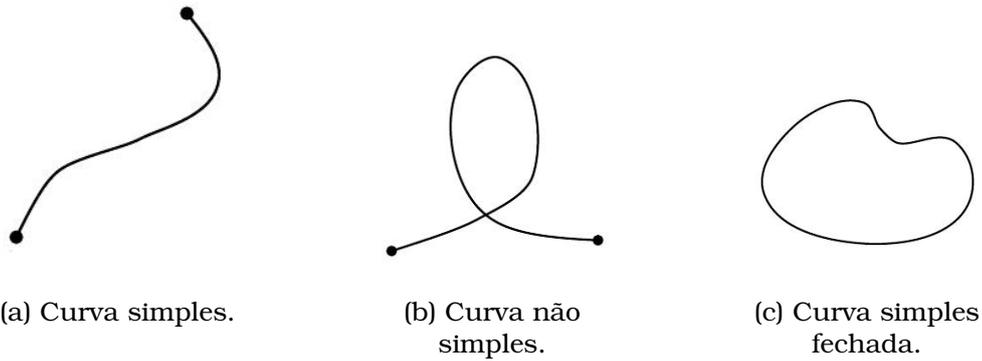


Figura 6.11: Exemplos de curvas simples ou não simples.

Exemplo 6.9. Calcule a integral de caminho

$$\oint \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}},$$

sendo C uma circunferência de raio r centrada em z_0 e n é um número inteiro. Uma ilustração deste contorno pode ser vista na figura 6.8 à esquerda.

Solução. Por conveniência, escolhe-se $z - z_0 = re^{i\theta}$, onde θ é o parâmetro cuja variação ($0 \leq \theta < 2\pi$) determina o contorno C . Então, $dz = ire^{i\theta}d\theta$ e a integral fica:

$$\oint \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}d\theta}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}} = \frac{i}{r^n} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta}d\theta = \frac{i}{r^n} \int_0^{2\pi} (\cos n\theta - i \sin n\theta) d\theta = \begin{cases} 2\pi i, & n = 0 \\ 0, & |n| \geq 1. \end{cases}$$

Este é um resultado importante, que será utilizado diversas vezes nas seções posteriores.

6.5.3 TIPOS DE CURVAS E DOMÍNIOS NO PLANO COMPLEXO

Nesta seção serão brevemente definidos os tipos de curvas e domínios no plano complexo que serão considerados nas seções posteriores.

6.5.3.1 TIPOS DE CURVAS NO PLANO COMPLEXO

Uma curva C é dita **simples** (também denominada **arco de Jordan**) se esta não se intersecciona em nenhum ponto, isto é, $z(t_1) \neq z(t_2)$ se $t_1 \neq t_2$, para $a \leq t \leq b$. A exceção $z(b) = z(a)$ é permitida para um contorno fechado, em cuja situação o contorno é dito **contorno simples** ou **curva simples fechada** ou ainda **curva ou contorno de Jordan**. A figura 6.11 mostra exemplos de curvas simples e de curvas não simples.

6.5.3.2 DOMÍNIOS SIMPLEMENTE OU MULTIPLAMENTE CONEXOS

Um **domínio** ou **região simplesmente conexa** D é uma região no plano complexo tal que toda curva simples fechada Γ dentro de D delimita somente pontos que pertencem a D . Uma outra definição: uma região D é dita simplesmente conexa se qualquer curva simples fechada Γ contida dentro de D pode ser reduzida a um ponto de tal maneira que nenhum ponto contido em Γ abandone D .

Uma região que não é simplesmente conexa é dita **multiplamente conexa**. De acordo com as definições, deve então existir pelo menos uma curva simples fechada Γ contida em D que cerca pontos que não pertencem a D . Ou, alternativamente, uma região multiplamente conexa é aquela que não pode ser reduzida a um ponto sem que abandone (mesmo que momentaneamente) a região D . A figura 6.12 apresenta exemplos de regiões simplesmente e multiplamente conexas.

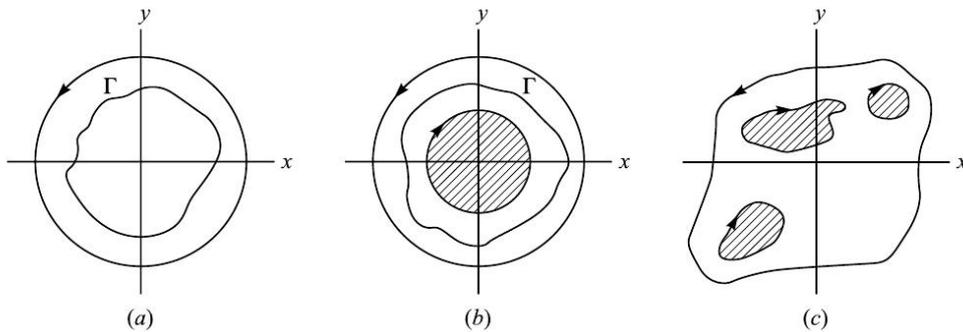


Figura 6.12: Exemplos de regiões: (a) simplesmente conexa e (b) e (c) multiplamente conexas.

6.5.3.3 CONVENÇÃO PARA O PERCURSO DE UM CONTORNO FECHADO

Considera-se uma região D do plano complexo, composta por pontos no interior e ao longo de um contorno simples fechado Γ . O contorno é percorrido no **sentido positivo** se todos os pontos de D se situarem à esquerda de um observador que se desloca ao longo de Γ . Este sentido positivo consiste no percurso *anti-horário* indicado pelas setas nos contornos Γ , representados nas figuras 6.12, e no percurso *horário* nos contornos interiores a Γ .

6.6 O TEOREMA DE CAUCHY-GOURSAT

O teorema de Cauchy-Goursat é um dos mais importantes resultados da análise matemática das funções complexas. Este teorema possui diversas consequências teóricas e práticas a respeito das propriedades analíticas das funções de variável complexa e serve de base para outros teoremas importantes como o teorema dos resíduos.

Para se realizar uma das demonstrações existentes do teorema de Cauchy, faz-se uso do teorema de Green, válido para integrais de linha e de superfície de funções de duas variáveis reais.

6.6.1 O TEOREMA DE GREEN NO PLANO

Teorema 6.9. *Sejam $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ duas funções reais tais que suas derivadas são contínuas sobre toda uma região R , delimitada por um contorno fechado simples C . Neste caso, as funções P e Q satisfazem a seguinte identidade,*

$$\oint_R [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (6.19)$$

Observação. A demonstração do teorema (6.19) baseia-se no teorema de Stokes e não será apresentada aqui.

6.6.2 O TEOREMA DE CAUCHY-GOURSAT

Serão apresentadas aqui duas versões do mencionado teorema, a primeira para um domínio simplesmente conexo e a segunda para uma região multiplamente conexa. A demonstração apresentada para a primeira versão foi obtida originalmente por Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) no início do século XIX e supõe que as derivadas da função $f(z)$ são contínuas sobre o domínio D . Posteriormente, Édouard Jean-Baptiste Goursat (1858 – 1936) mostrou que a condição de continuidade de $f'(z)$ não é necessária para a validade do teorema. Por esta razão, o teorema leva o nome de ambos os matemáticos franceses.

Teorema 6.10 (Teorema de Cauchy-Goursat). *Se uma função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em todos os pontos de um domínio simplesmente conexo D , então para todo contorno simples fechado C no interior de D ,*

$$\oint_C f(z) dz = 0. \quad (6.20)$$

Demonstração. Escreve-se o lado direito de (6.20) da seguinte maneira:

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C (u + iv)(dx + idy) = \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy).$$

Aplicando-se o teorema de Green (6.19) a cada integral de contorno acima, obtém-se

$$\oint_C f(z) dz = - \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy.$$

Como a função $f(z)$ é suposta analítica, então as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ satisfazem as condições de Cauchy-Riemann (6.14). Portanto,

$$\oint_C f(z) dz = - \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy = 0,$$

o que demonstra o teorema. □

Quando o domínio D é multiplamente conexo, a seguinte versão do teorema de Cauchy-Goursat se aplica.

Teorema 6.11 (Teorema de Cauchy-Goursat em regiões multiplamente conexas). *Seja C um contorno simples fechado e seja $\{C_j\}$ ($j = 1, \dots, n$) um conjunto finito de contornos fechados simples interiores a C , tais que não existam duas regiões R_j e $R_{j'}$, interiores a C_j e $C_{j'}$, que compartilhem pontos no plano complexo em comum entre si. Seja R a região do plano complexo que consiste em todos os pontos no interior e ao longo de C , exceto por aqueles pontos no interior de cada contorno C_j . Finalmente, seja B o contorno completo que delimita R e que consiste no contorno C mais os contornos C_j , sendo todos estes contornos percorridos no sentido que mantém os pontos de R à direita de B . Se a função $f(z)$ é analítica em R , então*

$$\oint_B f(z) dz = 0. \tag{6.21}$$

Demonstração. A situação descrita no teorema está ilustrada pela figura 6.13a. O contorno mostrado na figura é composto por C , juntamente com os contornos C_1, \dots, C_n e os segmentos de reta $L_1^1, L_1^2, \dots, L_1^n$ e $L_2^1, L_2^2, \dots, L_2^n$. Desta maneira a região R passa de multiplamente conexa a simplesmente conexa. Aproximando-se agora os pares de segmentos de reta L_1^1 e L_2^1, L_1^2 e L_2^2, \dots, L_1^n e L_2^n , de tal forma que a distância entre os mesmos se torne infinitesimalmente pequena, as integrais de caminho de $f(z)$ em cada par de segmentos se anulam mutuamente, isto é,

$$\int_{L_1^1} f(z) dz = - \int_{L_2^1} f(z) dz, \quad \int_{L_1^2} f(z) dz = - \int_{L_2^2} f(z) dz, \quad \dots \quad \int_{L_1^n} f(z) dz = - \int_{L_2^n} f(z) dz,$$

de tal forma que o contorno restante é exatamente o contorno B descrito no teorema. Como a região R é agora simplesmente conexa e a função $f(z)$ é analítica em R , de (6.20) resulta

$$\oint_B f(z) dz = 0. \tag{6.21}$$

□

O teorema de Cauchy-Goursat (6.20) possui consequências importantes, algumas das quais serão apresentadas nesta e nas seções posteriores.

Teorema 6.12 (Deformação do contorno de integração). *Seja $f(z)$ uma função analítica sobre uma região R delimitada pelo contorno simples fechado C e pelo conjunto de contornos $\{C_j\}$ ($j = 1, \dots, n$), interiores a C e que envolvem n buracos que podem conter singularidades isoladas ou não isoladas. Então,*

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{j=1}^n \oint_{C_j} f(z) dz, \tag{6.22}$$

sendo que tanto a integral ao longo de C quanto as integrais nos contornos C_j são realizadas no sentido anti-horário.²

²O que fica evidenciado pelo símbolo \circlearrowleft .

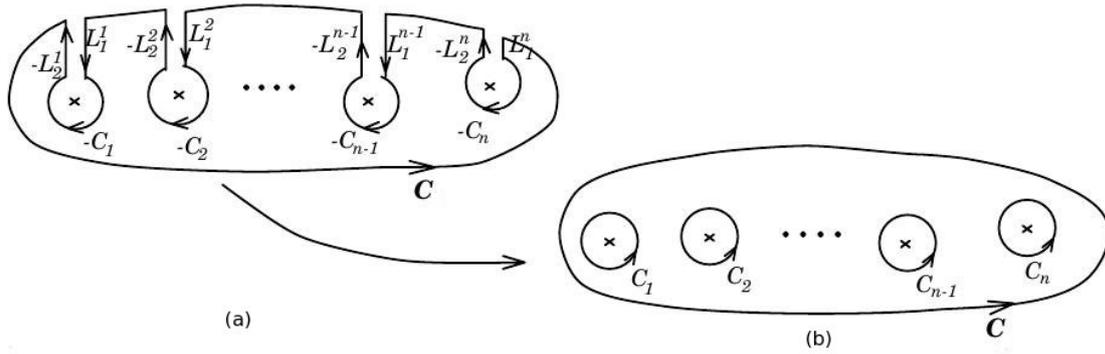


Figura 6.13: Contorno B que transforma uma região multiplamente conexa em uma região simplesmente conexa.

Demonstração. Esta situação também está ilustrada na figura 6.13. Ao se considerar o contorno B na figura 6.13a, o teorema de Cauchy (6.21) afirma que

$$\oint_B f(z) dz = \left[\int_C + \sum_{j=1}^n \left(\int_{-C_j} + \int_{L_1^j} + \int_{-L_2^j} \right) \right] f(z) dz = 0,$$

onde

$$\int_{-L_2^j} f(z) dz = - \int_{L_2^j} f(z) dz \implies \left(\int_{L_1^j} + \int_{-L_2^j} \right) f(z) dz = \left(\int_{L_1^j} - \int_{L_2^j} \right) f(z) dz.$$

Ao se reduzir a distância de cada par de segmentos de reta L_1^j e L_2^j assintoticamente a zero, as integrais de linha percorrem o mesmo caminho sobre o plano complexo, resultando então que

$$\left(\int_{L_1^j} - \int_{L_2^j} \right) f(z) dz \xrightarrow{L_2^j \rightarrow L_1^j} 0.$$

Neste caso, os caminhos C, C_1, \dots, C_n se tornam contornos fechados simples, resultando que

$$\oint_C f(z) dz + \sum_{j=1}^n \oint_{-C_j} f(z) dz = 0,$$

onde se deve notar o símbolo \oint . Como os contornos C_j são percorridos no sentido horário, de acordo com a figura (6.13)a, resulta que

$$\oint_{-C_j} = - \oint_{C_j},$$

onde na segunda integral o contorno é agora percorrido no sentido anti-horário, e a situação se torna semelhante à ilustrada pela figura (6.13)b. Portanto,

$$\oint_C f(z) dz - \sum_{j=1}^n \oint_{C_j} f(z) dz = 0,$$

de onde resulta o teorema. □

Nas situações em que a identidade (6.22) é válida, é comum afirmar-se que o contorno C foi **deformado** nos contornos C_1, C_2, \dots, C_n .

Teorema 6.13 (Independência do caminho). Se a função $f(z)$ é analítica em uma região simplesmente conexa R , então dados dois pontos z_0 e z quaisquer, contidos em R , a integral

$$\int_{z_0}^z f(z) dz$$

independe do caminho ligando os pontos z_0 e z , desde que este caminho esteja totalmente contido em R .

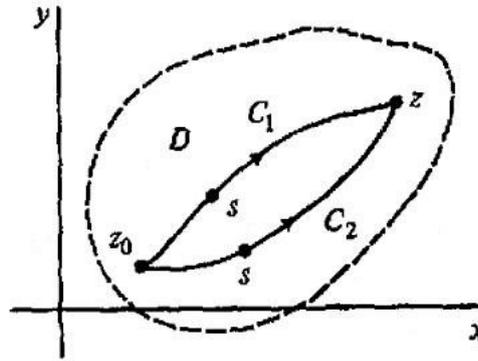


Figura 6.14: Independência nos caminhos C_1 e C_2 .

Demonstração. A situação está ilustrada na figura 6.14. Sendo C_1 e C_2 dois caminhos quaisquer, contidos em R e que ligam os pontos z_0 e z , então, de acordo com o teorema de Cauchy (6.20),

$$\int_{-C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz = 0, \quad \text{mas} \quad \int_{-C_1} f(z) dz = - \int_{C_1} f(z) dz.$$

Portanto

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz,$$

o que demonstra o teorema. □

Teorema 6.14 (Teorema de analiticidade). *Seja $f(z)$ uma função contínua em uma região simplesmente conexa R e sejam z_0 e z dois pontos contidos em R , os quais são conectados por um caminho C , também contido em R . Então, se $\int_{z_0}^z f(s) ds$ independe de C ,*

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(s) ds \text{ é analítica em } R \text{ e } F'(z) = f(z).$$

Demonstração. Sendo $z + \Delta z$ qualquer ponto contido em R e distinto de z , mas que esteja em uma vizinhança de z . Então

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(s) ds - \int_{z_0}^z f(s) ds.$$

Pela propriedade (4) da seção 6.5.2, resulta que

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_z^{z+\Delta z} f(s) ds.$$

Dividindo ambos os lados por Δz , pode-se escrever

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(s) ds - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)] ds.$$

Como a função $f(z)$ é contínua em R , então para um número positivo ϵ , deve existir um outro número positivo δ tal que

$$|f(s) - f(z)| < \epsilon$$

sempre que $|s - z| < \delta$. Desta forma, se $z + \Delta z$ é próximo o suficiente de z de tal forma que $|\Delta z| < \delta$, então

$$\left| \int_z^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)] ds \right| < \epsilon |\Delta z|$$

e, portanto,

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \frac{1}{|\Delta z|} \epsilon |\Delta z| = \epsilon.$$

No limite em que $\Delta z \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow 0$, resultando que

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} \equiv F'(z) = f(z).$$

Portanto, a derivada de $F(z)$ existe em todos os pontos z pertencentes a R . Como consequência, $F(z)$ é analítica em R e sua derivada é igual a $f(z)$, demonstrando o teorema. \square

Teorema 6.15 (Teorema de Morera). *Se uma função $f(z)$ é contínua em uma região simplesmente conexa R e $\oint_C f(z) dz = 0$ para todo contorno simples fechado C no interior de R , então $f(z)$ é analítica em R .*

Observação. O teorema de Morera é a recíproca do teorema de Cauchy.

Exemplo 6.10 (Cálculo de integrais no plano complexo).

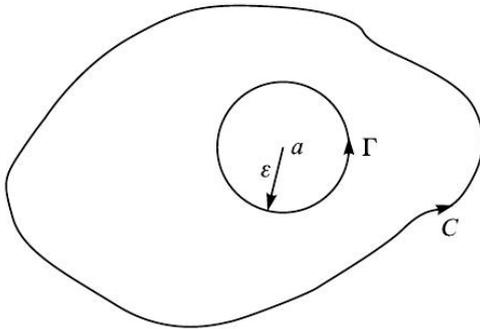


Figura 6.15: Exemplo de cálculo de integrais sobre o plano complexo.

Calcule $\oint_C dz/(z - a)$, onde C é um contorno fechado simples qualquer, quando $z = a$ está (a) fora de C e (b) dentro de C .

Solução.

(a) Se $z = a$ está fora de C , então $f(z) = 1/(z - a)$ é analítica em todos os pontos internos e ao longo de C . Portanto, pelo teorema de Cauchy (6.21),

$$\oint_C \frac{dz}{z - a} = 0.$$

(b) Se $z = a$ está dentro de C e Γ é uma circunferência de raio ϵ centrada em $z = a$, de tal forma que Γ está totalmente contido em C (figura 6.15), então pelo teorema (6.22),

$$\oint_C \frac{dz}{z - a} = \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z - a}.$$

Agora, o contorno Γ é dado por todos os pontos z tais $|z - a| = \epsilon$. Pode-se descrever o contorno na figura 6.15 através do parâmetro θ tal que

$$z - a = \epsilon e^{i\theta}, \text{ quando } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Então $dz = i\epsilon e^{i\theta} d\theta$ e

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z - a} = \int_0^{2\pi} \frac{i\epsilon e^{i\theta} d\theta}{\epsilon e^{i\theta}} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

6.7 FÓRMULAS INTEGRAIS DE CAUCHY

Uma das consequências mais importantes do teorema integral de Cauchy são as fórmulas integrais que também levam o seu nome. Pode-se introduzir estas fórmulas através do seguinte teorema.

Teorema 6.16 (Fórmula integral de Cauchy). *Seja $f(z)$ uma função analítica em uma região simplesmente conexa R e z_0 é um ponto qualquer no interior de R , a qual é delimitada pelo contorno simples C , então*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad (6.23)$$

sendo a integração em (6.23) realizada ao longo de C no sentido positivo (anti-horário).

Demonstração. Para provar o teorema (6.23), toma-se uma circunferência Γ , centrada em z_0 e com raio r , como ilustrado na figura 6.16. Então, de acordo com o teorema (6.22),

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

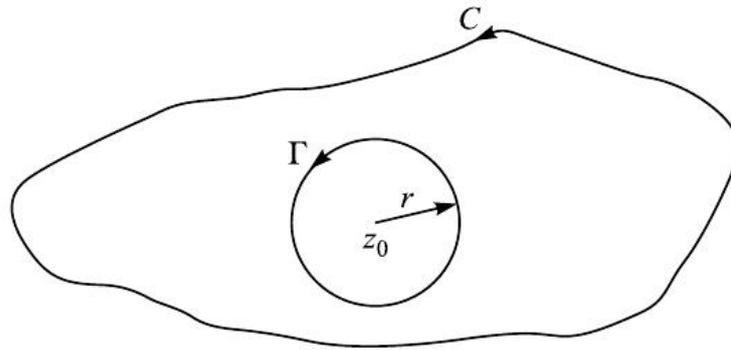


Figura 6.16: Fórmula integral de Cauchy.

Agora, a circunferência Γ é descrita por $|z - z_0| = r$, ou seja, usando o parâmetro θ , $z - z_0 = re^{i\theta}$, sendo $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ e $dz = ire^{i\theta}d\theta$. Então

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Tomando-se agora o limite $r \rightarrow 0$ em ambos os lados e fazendo uso da continuidade de $f(z)$, resulta

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \lim_{r \rightarrow 0} i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = i \int_0^{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = i \int_0^{2\pi} f(z_0) d\theta = 2\pi i f(z_0).$$

Ou seja,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

□

Uma forma conveniente para a fórmula integral (6.23) é escrevê-la como

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{z' - z} dz', \tag{6.24}$$

para enfatizar o fato que z pode ser um ponto qualquer em C .

Exemplo 6.11. Calcule a integral $\oint_C e^z dz / (z^2 + 1)$, sendo C a circunferência de raio unitário e com centro em: (a) $z = i$ e (b) $z = -i$.

Solução.

(a) Escrevendo-se a integral na forma

$$\oint_C \left(\frac{e^z}{z + i} \right) \frac{dz}{z - i},$$

percebe-se que $f(z) = e^z / (z + i)$ é analítica dentro e sobre a circunferência de raio unitário centrada em $z_0 = i$. Portanto, pela fórmula integral de Cauchy (6.23), temos

$$\oint_C \left(\frac{e^z}{z + i} \right) \frac{dz}{z - i} = 2\pi i f(i) = 2\pi i \frac{e^i}{2i} = \pi e^i = \pi (\cos 1 + i \sen 1).$$

(b) Para a circunferência centrada em $z_0 = -i$, define-se $f(z) = e^z / (z - i)$, a qual é novamente analítica dentro e sobre C . Então, usando novamente (6.23) resulta

$$\oint_C \left(\frac{e^z}{z - i} \right) \frac{dz}{z + i} = 2\pi i f(-i) = 2\pi i \frac{e^{-i}}{-2i} = -\pi e^{-i} = -\pi (\cos 1 - i \sen 1).$$

A fórmula integral de Cauchy pode ser generalizada para derivadas de ordem mais alta de $f(z)$. Isto é descrito pelo teorema a seguir.

Teorema 6.17 (Fórmula integral de Cauchy para derivadas de ordens mais altas). Seja $f(z)$ uma função analítica em uma região simplesmente conexa R e z_0 é um ponto qualquer no interior de R , a qual é delimitada pelo contorno simples C , então

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (6.25)$$

e as derivadas de $f(z)$ em z_0 existem em todas as ordens.

Demonstração. Uma prova simples, porém incompleta, do teorema (6.25) pode ser feita por intermédio da indução matemática. Derivando-se ambos os lados de (6.24) em relação a z , obtém-se

$$f'(z) = \frac{1!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{(s - z)^2} ds.$$

Derivando-se novamente,

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{(s - z)^3} ds.$$

E assim sucessivamente, resultando, para a derivada de ordem n , na fórmula (6.25). A demonstração completa desta fórmula integral pode ser obtida na bibliografia citada. \square

A fórmula (6.25), obtida para uma região simplesmente conexa, pode ser estendida para o caso onde o contorno simples C é substituído pelo contorno B da figura 6.13, composto por um contorno exterior C e por um conjunto $\{C_i\}$ de contornos interiores. Para tanto, basta assumir que em (6.25) o ponto z_0 pertence ao domínio definido por B e que $f(z)$ é analítica neste domínio. Desta forma, a fórmula integral de Cauchy pode ser estendida a regiões multiplamente conexas.

Exemplo 6.12. Calcule

$$\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz,$$

sendo C um contorno simples que não passa por $z = -1$. Considere 2 casos: (a) C não envolve $z = -1$ e (b) C envolve $z = -1$.

Solução.

(a) Neste caso, a função $f(z) = e^{2z}/(z+1)^4$ é analítica dentro e sobre C . Portanto, pelo teorema de Cauchy,

$$\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz = 0.$$

(b) Chamando agora $f(z) = e^{2z}$, esta função é analítica dentro e sobre C . Portanto, de acordo com o teorema (6.25),

$$\oint_C \frac{e^{2z} dz}{(z+1)^4} = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(-1). \text{ Como } f^{(3)}(-1) = 8e^{-2}, \text{ resulta } \oint_C \frac{e^{2z} dz}{(z+1)^4} = \frac{8\pi}{3} e^{-2}.$$

6.8 REPRESENTAÇÃO EM SÉRIES DE FUNÇÕES ANALÍTICAS

Será apresentado agora um ponto muito importante: a representação em séries de funções analíticas. Inicialmente será discutida a noção de convergência de uma série complexa. Grande parte das definições e teoremas válidos para séries de termos reais podem ser aplicadas às séries complexas com uma pequena ou nenhuma modificação.

6.8.1 SÉRIES COMPLEXAS

Nesta seção, serão consideradas séries complexas em geral, cujos termos são funções complexas,

$$f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots \quad (6.26)$$

A soma dos n primeiros termos desta série,

$$S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \cdots + f_n(z) = \sum_{i=1}^n f_i(z),$$

é denominada a n -ésima soma parcial da série (6.26). A soma dos termos restantes, partindo do $(n+1)$ -ésimo termo, é denominada de **resto da série**.

6.8.1.1 CONVERGÊNCIA DA SÉRIE

Associa-se agora à série (6.26) a sequência de suas somas parciais S_1, S_2, \dots, S_n . Se esta sequência de somas parciais é convergente, então a série converge; se a sequência é divergente, então a série também diverge. De uma maneira mais formal, a série (6.26) é dita convergente à soma $S(z)$ em uma região R do plano complexo se para qualquer $\epsilon > 0$ existe um inteiro N , dependente de ϵ e do valor de z sob consideração, tal que

$$|S_n(z) - S(z)| < \epsilon \text{ para todo } n > N.$$

Neste caso, escreve-se

$$S(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z). \quad (6.27)$$

A diferença $S_n(z) - S(z)$ é o resto $R_n(z)$. Assim, a definição de convergência da série (6.26) demanda que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(z)| = 0.$$

Teorema 6.18 (Teoremas de convergência). *Os seguintes teoremas de convergência são válidos:*

1. Uma condição necessária, mas não suficiente, para que $S_n(z)$ convirja no limite $n \rightarrow \infty$ é

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = 0.$$

2. A multiplicação de cada termo de uma série por uma constante não nula não afeta a convergência, assim como a remoção ou adição de um número finito de termos.
3. Uma condição necessária e suficiente para que a série de termos complexos

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

seja convergente é que as séries das respectivas partes reais e imaginárias dos termos $f_n(z)$ sejam convergentes. Além disso, se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} f_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} f_n$$

convergem às respectivas funções $R(z)$ e $I(z)$, então a série complexa converge para $S(z) = R(z) + iI(z)$.

6.8.1.2 CONVERGÊNCIA ABSOLUTA

Se os valores absolutos dos termos em (6.26),

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)| = |f_1(z)| + |f_2(z)| + |f_3(z)| + \cdots + |f_n(z)| + \cdots,$$

formam uma série convergente, então a série (6.26) é dita **absolutamente convergente**.

Se a série (6.26) converge, mas não é absolutamente convergente, então esta é dita **condicionalmente convergente**. A partir da definição de convergência, pode-se demonstrar os teoremas a seguir.

Teorema 6.19 (Teoremas de convergência absoluta). *Os seguintes teoremas são válidos.*

1. Se $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ também converge (*condição suficiente*).
2. A soma, diferença ou o produto de séries absolutamente convergentes é convergente.

6.8.1.3 CONVERGÊNCIA UNIFORME

Seja

$$R_n(z) = f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots = S(z) - S_n(z)$$

o **resto da série** $S(z)$, dada por (6.27), sobre uma região R . A série $S(z)$ é dita **uniformemente convergente** em R se, dado um número real positivo ϵ , é possível encontrar um número inteiro positivo N , tal que para todo $z \in R$,

$$|R_n(z)| = |S(z) - S_n(z)| < \epsilon, \text{ para todo } n > N.$$

6.8.2 TESTES DE CONVERGÊNCIA

Os testes de convergência determinam uma condição necessária e suficiente para a convergência de uma determinada série. Há vários testes, dentre os quais os principais serão citados abaixo sem as demonstrações, as quais podem ser obtidas na bibliografia recomendada.

6.8.2.1 TESTES DE CONVERGÊNCIA ABSOLUTA

Para testar a convergência absoluta de uma série, os seguintes testes existem:

Teste da comparação. Se $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ converge absolutamente em R e $|f_n(z)| \leq |g_n(z)|, \forall z \in R$, então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ também converge absolutamente.

Teste da razão. Dentre todos os testes de convergência, o mais útil é o teste da razão, o qual se aplica a séries complexas, além de séries reais. Dada a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, esta converge absolutamente na região R se

$$0 < |r(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right| < 1 \quad (6.28)$$

e diverge se $|r(z)| > 1$. Quando $|r(z)| = 1$, este teste não fornece informação conclusiva a respeito da convergência da série.

Teste da raiz. Dada a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, esta converge absolutamente na região R se

$$0 < |r(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sqrt[n]{|f_n(z)|} \right| < 1$$

e diverge se $|r(z)| > 1$. Quando $|r(z)| = 1$, este teste não fornece informação conclusiva a respeito da convergência da série.

Exemplo 6.13 (Teste da razão). Mostre que a série complexa

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n} + ie^{-n})$$

converge.

Solução. Pode-se aplicar o teste da razão separadamente para as partes real e imaginária:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{-n-1}}{2^{-n}} \right| = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{-n-1}}{e^{-n}} \right| = \frac{1}{e} < 1.$$

Portanto, a série converge absolutamente.

6.8.2.2 TESTE DE CONVERGÊNCIA UNIFORME

O seguinte teste verifica a convergência uniforme de uma série.

Teste de Weierstrass. Se $|f_n(z)| \leq M_n$, sendo M_n independente de z em uma região R e $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente em R .

6.8.3 SÉRIES DE POTÊNCIAS E SÉRIES DE TAYLOR

Séries de potências constituem-se em uma das mais importantes ferramentas da análise matemática em geral e da teoria de funções complexas em particular. Isto porque séries de potências com raios de convergência não nulos podem sempre representar funções analíticas. Como exemplo, a série

$$S_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (6.29)$$

claramente define uma função analítica, desde que a série convirja.

Nesta seção, o interesse estará restrito às séries que apresentam convergência absoluta. Neste caso, o teste da razão (6.28) demanda que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z| < 1 \implies \frac{1}{|z|} > \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

O resultado acima mostra que a série irá convergir absolutamente para todos os pontos z cujos módulos satisfazem a condição $|z| < R$, sendo R o **raio de convergência da série**, definido por

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|. \quad (6.30)$$

A série (6.29) está centrada na origem do plano complexo; assim, o raio de convergência R em (6.30) define uma circunferência centrada na origem. De forma similar, a série

$$S_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (6.31)$$

converge para todos os pontos z dentro da circunferência de raio R centrada em z_0 .

A série de potências mais importante na análise matemática é a série de Taylor. Na análise complexa é possível realizar-se uma expansão de Taylor para toda e qualquer função analítica. Esta propriedade é devida ao homônimo *teorema de Taylor*,³ exposto a seguir.

Teorema 6.20 (Teorema de Taylor). *Seja $f(z)$ uma função analítica sobre a região R , delimitada pela circunferência C centrada em a e de raio R_0 . Se z é um ponto interior a C , então $f(z)$ pode ser desenvolvida em uma série de potências centrada em $z = a$,*

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + \frac{f''(a)}{2!}(z - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n, \quad (6.32)$$

a qual converge para $f(z)$ quando $|z - z_0| < R_0$. Esta série é denominada **Série de Taylor**.

Demonstração. Seja z qualquer ponto interior à circunferência C_0 . Portanto, se $|z - a| = r$, então $r < R_0$. Seja agora uma outra circunferência C_1 , centrada em a e de raio r_1 , tal que $r < r_1 < R_0$. Uma vez que z está dentro de C_1 e $f(z)$ é analítica no interior e sobre C_1 , a fórmula integral de Cauchy (6.24) é válida, a qual é escrita da seguinte maneira:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w) dw}{w - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w - a)} \left[\frac{1}{1 - (z - a)/(w - a)} \right] dw.$$

Nota-se que, na integral acima, como w está sempre ao longo do contorno C_1 e z é um ponto interior a C_1 , então

$$\left| \frac{z - a}{w - a} \right| < 1, \quad \forall w.$$

Agora, a partir da fórmula de progressão geométrica

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{n+1}}{1 - q},$$

válida para $q \neq 1$, obtém-se

$$\frac{1}{1 - q} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1 - q}.$$

³Devido ao matemático inglês Brook Taylor (1685 - 1731).

Identificando-se então $q = (z - a) / (w - a)$, e inserindo a progressão geométrica resultante na fórmula integral acima, resulta

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w) dw}{(w-a)} + \frac{(z-a)}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w) dw}{(w-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w) dw}{(w-a)^3} \\ + \dots + \frac{(z-a)^n}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w) dw}{(w-a)^{n+1}} + \frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w) dw}{(w-a)^{n+1}(w-z)}.$$

Contudo, nesta situação as fórmulas integrais de Cauchy (6.25) garantem que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w) dw}{(w-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!};$$

portanto, pode-se escrever a expressão para $f(z)$ como

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + R_n(z),$$

sendo

$$R_n(z) = \frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w) dw}{(w-a)^{n+1}(w-z)}$$

o resto do desenvolvimento de $f(z)$ na forma de um polinômio de grau n . Porém, uma vez que $|z-a| = r$ e $|w-a| = r_1$ em C_1 , nota-se que

$$|w-z| = |(w-a) - (z-a)| \geq |w-a| - |z-a| = r_1 - r > 0.$$

Em consequência, se $M > 0$ é o módulo do maior valor de $f(z)$ ao longo de C_1 , pode-se estabelecer um limite superior para $|R_n(z)|$, dado por

$$|R_n(z)| = \left| \frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w) dw}{(w-a)^{n+1}(w-z)} \right| \leq \frac{r^{n+1}M}{r_1^n(r_1-r)} = \frac{Mr}{r_1-r} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n.$$

Portanto, como $r/r_1 < 1$, se $n \rightarrow \infty$, o resto da série resultante tenderá a zero,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = 0,$$

e a série converge uniformemente para $f(z)$, o que demonstra o teorema de Taylor. \square

No caso particular onde $a = 0$, a série de Taylor (6.32) para $f(z)$ é denominada **série de Maclaurin**.⁴

Com as fórmulas integrais de Cauchy (6.25) e a série de Taylor (6.32), ficam estabelecidas duas propriedades fundamentais das funções analíticas:

1. Elas possuem derivadas de todas as ordens.
2. Elas sempre podem ser representadas por uma série de Taylor.

O mesmo não pode ser dito sobre as funções reais; existem funções reais que possuem derivadas de todas as ordens, mas que não podem ser representadas por uma série de Taylor.

As principais propriedades de séries de potências podem ser resumidas nos seguintes teoremas.

Teorema 6.21. *Os seguintes teoremas sobre séries de potências são válidos:*

1. Uma série de potências converge uniformemente e absolutamente em qualquer região interior ao seu raio de convergência.
2. Uma série de potências pode ser diferenciada termo a termo em qualquer ponto interno ao seu raio de convergência.
3. Uma série de potências pode ser integrada termo a termo ao longo de qualquer curva C , desde que C esteja contida dentro do seu círculo de convergência.
4. Uma série de potências representa uma função analítica em cada ponto de seu círculo de convergência.

⁴Colin Maclaurin (1698 – 1746), matemático escocês.

6.8.4 SÉRIES DE TAYLOR DE FUNÇÕES ELEMENTARES

Séries de Taylor de funções analíticas são similares às series de funções reais. Em geral, basta trocar a variável independente real pela variável complexa z para que as séries reais sejam *continuadas*⁵ para o plano complexo. A lista a seguir mostra as séries de Taylor de algumas funções elementares; no caso de funções plurívocas, a série apresentada representa o ramo principal.

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - \dots, \quad |z| < 1 \quad (6.33a)$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots, \quad |z| < \infty \quad (6.33b)$$

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots, \quad |z| < \infty \quad (6.33c)$$

$$\operatorname{cos} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots, \quad |z| < \infty \quad (6.33d)$$

$$\operatorname{senh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots, \quad |z| < \infty \quad (6.33e)$$

$$\operatorname{cosh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots, \quad |z| < \infty \quad (6.33f)$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots, \quad |z| < 1. \quad (6.33g)$$

6.8.5 SÉRIES DE LAURENT

Em muitas aplicações, é comum deparar-se com funções que não são analíticas sobre todo o plano complexo.⁶ Tipicamente, estas funções não são analíticas em um ou vários pontos ou até em uma região do plano. Por consequência, séries de Taylor não podem ser empregadas nas vizinhanças destes pontos. Contudo, em muitos casos, uma representação em série contendo potências tanto positivas quanto negativas pode ainda ser obtida, a qual é válida nesta vizinhança. Esta série é denominada **série de Laurent** e é válida para aquelas funções que são analíticas dentro e sobre um anel caracterizado pelos raios R_1 e R_2 ($R_1 < R_2$); isto é, a função é analítica nos pontos

$$R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2,$$

sendo $z = a$ um dos pontos singulares da função. Esta situação está representada na figura 6.17a. A série de Laurent foi obtida pela primeira vez pelo matemático francês Pierre Alphonse Laurent (1813 - 1854).

Teorema 6.22 (Série de Laurent). *Seja $f(z)$ uma função analítica ao longo dos contornos circulares concêntricos C_1 e C_2 , de raios R_1 e R_2 ($R_1 < R_2$), respectivamente, ambos centrados em $z = z_0$, bem como na região anelar delimitada por C_1 e C_2 . Então em cada ponto z nesta região, a função $f(z)$ pode ser representada pela série*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \quad (6.34a)$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (6.34b)$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz, \quad (6.34c)$$

⁵Ver seção 6.10.

⁶Isto é, não são inteiras.

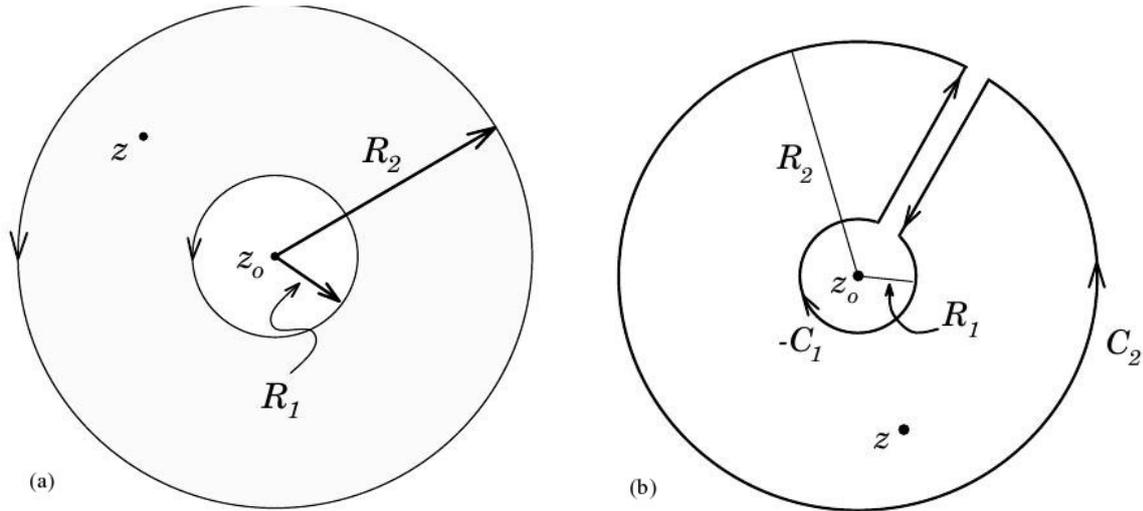


Figura 6.17: (a) Anel $R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2$ que representa a região de analiticidade da função. (b) Contornos de integração interior (C_1) e exterior (C_2), utilizados para a derivação da série de Laurent.

sendo cada contorno de integração realizado no sentido anti-horário.

Demonstração. Realiza-se a integração ao longo do contorno mostrado na figura 6.17b. Como $f(z)$ é analítica ao longo e no interior do contorno e z é um ponto que pertence a esta região, a fórmula integral de Cauchy (6.23) pode ser utilizada, resultando em

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(w) dw}{w - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w) dw}{w - z}.$$

Na primeira integral, escreve-se

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0} \frac{1}{1 - \frac{(z - z_0)}{(w - z_0)}} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^j,$$

sendo que a última identidade é válida porque $|z - z_0| < |w - z_0| = R_2$, para todo w ao longo de C_2 . Já na segunda integral, escreve-se

$$-\frac{1}{w - z} = \frac{1}{z - z_0 - (w - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{(w - z_0)}{(z - z_0)}} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^j,$$

sendo que agora a última identidade é válida porque $|w - z_0| = R_1 < |z - z_0|$. Então, pode-se escrever $f(z)$ como

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(w) dw}{(w - z_0)^{j+1}} \right] (z - z_0)^j + \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w) dw}{(w - z_0)^{-j}} \right] \frac{1}{(z - z_0)^{j+1}} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(w) dw}{(w - z_0)^{j+1}} \right] (z - z_0)^j + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w) dw}{(w - z_0)^{-j+1}} \right] \frac{1}{(z - z_0)^j}, \end{aligned}$$

de onde resulta (6.34). □

Em (6.34a,b), a série com os coeficientes $\{a_n\}$ é denominada a **parte analítica**, ao passo que em (6.34a,c) a série com os coeficientes $\{b_n\}$ é denominada a **parte principal** da série de Laurent. Se a parte principal for nula, a série de Laurent se reduz à série de Taylor (6.32).

Uma vez que as funções $f(z)/(z - z_0)^{n+1}$ e $f(z)/(z - z_0)^{-n+1}$ são analíticas sobre toda a região R na figura 6.17b, qualquer contorno simples fechado C contido dentro deste anel pode ser usado como caminho de integração, desde que percorrido no sentido positivo, no lugar dos contornos circulares C_1 e C_2 . Assim, a série de Laurent (6.34) pode ser generalizada como

$$f(z) = \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (R_1 < |z - z_0| < R_2), \quad (6.35a)$$

sendo

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (6.35b)$$

6.8.6 TEOREMAS DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE

A seguir serão apresentados, sem demonstração, dois teoremas de existência e unicidade das séries de Laurent. Demonstrações destes teoremas podem ser encontradas na bibliografia citada.

Teorema 6.23 (Teorema de existência). A série de Laurent (6.35a,b) de uma função $f(z)$, analítica na região anelar $R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2$, converge uniformemente para $f(z)$ para $\rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2$, sendo $R_1 < \rho_1$ e $R_2 > \rho_2$.

Teorema 6.24 (Teorema de unicidade). Dada uma função analítica $f(z)$, se esta pode ser representada pela série uniformemente convergente

$$f(z) = \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

na região anelar $R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2$, então $b_n = c_n$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, sendo o coeficiente c_n dado por (6.35b).

6.8.7 ALGUMAS TÉCNICAS DE CONSTRUÇÃO DE SÉRIES DE TAYLOR E LAURENT

Nos exemplos a seguir, serão ilustradas algumas das técnicas mais comuns para a construção das séries de Taylor e Laurent. Em muitas situações, não ocorre a necessidade de se calcular explicitamente os coeficientes $\{c_n\}$ da série, pois o teorema de unicidade acima garante que qualquer série que represente uma função $f(z)$ é, de fato, a única série de Laurent para a mesma. Usualmente, para se obter a série de Laurent de uma dada função $f(z)$, basta fazer uso de expansões de Taylor de funções conhecidas e realizar substituições de forma apropriada.

Exemplo 6.14 (Uso de séries geométricas). Seja

$$f(z) = \frac{1}{z - a}.$$

Sabendo-se que

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}, \quad (|z| < 1),$$

pode-se escrever, para $|z| < |a|$:

$$f(z) = \frac{1}{z - a} = -\frac{1}{a} \frac{1}{1 - z/a} = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n, \quad (|z| < |a|).$$

Esta é a série de Taylor de $f(z)$ em torno de $z = 0$. Seu raio de convergência é $R = |a|$, porque a uma distância R da origem existe o ponto $z = a$, onde $f(z)$ não é analítica. Este é o único ponto onde $f(z)$ não é analítica.

Portanto, $f(z)$ deve possuir uma série de Laurent em torno de $z = 0$ válida para $|z| > |a|$. Escrevendo-se

$$f(z) = \frac{1}{z - a} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - a/z},$$

se $|z| > |a|$, $|a/z| < 1$ e é possível desenvolver:

$$\frac{1}{1 - a/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n.$$

Portanto,

$$f(z) = \frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}, \quad (|z| > |a|).$$

Esta é a série de Laurent desejada.

A função $f(z)$ pode ser expandida por este método em torno de qualquer ponto $z = b$:

$$f(z) = \frac{1}{z-a} = \frac{1}{(z-b) - (a-b)} \xrightarrow{w=z-b} \frac{1}{w - (a-b)}, \quad (b \neq a).$$

Então,

$$f(z) = -\frac{1}{a-b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{(a-b)^n} = -\frac{1}{a-b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-b)^n}{(a-b)^n}, \quad (|z-b| < |a-b|)$$

ou

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-b)^n}{(z-b)^{n+1}}, \quad (|z-b| > |a-b|).$$

Exemplo 6.15 (Decomposição em frações racionais). Seja

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - (2+i)z + 2i}.$$

Esta função não é analítica nos pontos $z = i$ e $z = 2$; portanto, ela deve possuir uma série de Taylor em torno de $z = 0$, válida para $|z| < 1$ e duas séries de Laurent em torno de $z = 0$, válidas para $1 < |z| < 2$ e $|z| > 2$, respectivamente. Para se obter estas três séries, usa-se a identidade:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - (2+i)z + 2i} = \frac{1}{(z-i)(z-2)} = \frac{1}{2-i} \left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-i} \right).$$

Para $|z| < 1$. Neste caso, pode-se usar diretamente a série geométrica:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{1-z/2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad (|z| < 2) \\ \frac{1}{z-i} &= i \frac{1}{1+iz} = i \sum_{n=0}^{\infty} (-iz)^n, \quad (|z| < 1). \end{aligned}$$

Subtraindo as séries, pode-se colocar em evidência fatores proporcionais à mesma potência de z ,

$$\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-i} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - i \sum_{n=0}^{\infty} (-iz)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2^{n+1}} + (-1)^n i^{n+1} \right] z^n,$$

de onde se obtém a série de Taylor de $f(z)$, válida para $|z| < 1$.

Para $1 < |z| < 2$. Neste caso, escreve-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{1-z/2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad (|z| < 2) \\ \frac{1}{z-i} &= \frac{1}{z} \frac{1}{1-i/z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{z}\right)^n, \quad (|z| > 1). \end{aligned}$$

Subtraindo-se ambas as séries, obtém-se a série de Laurent para $1 < |z| < 2$.

Para $|z| > 2$. Neste caso, escreve-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z} \frac{1}{1-2/z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n, \quad (|z| > 2) \\ \frac{1}{z-i} &= \frac{1}{z} \frac{1}{1-i/z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{z}\right)^n, \quad (|z| > 1). \end{aligned}$$

Subtraindo-se ambas as séries, obtém-se a série de Laurent para $|z| > 2$, a qual é composta somente pela parte principal.

Exemplo 6.16 (Uso de séries de Taylor conhecidas). Fazendo-se uso das séries de Taylor para as funções e^z e $\operatorname{sen} z$, expressões (6.33b) e (6.33c), respectivamente, as seguintes séries de Laurent podem ser obtidas:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}(z^2)}{z^4} &= \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n-2}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z^2} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^6}{5!} - \frac{z^{10}}{7!} + \dots, \quad |z| > 0 \\ \frac{e^z}{z^2} &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{n!} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \dots, \quad |z| > 0 \\ e^{1/z} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots, \quad |z| > 0.\end{aligned}$$

Exemplo 6.17 (Obtenção da série de Laurent por diferenciação). Seja, por exemplo,

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}.$$

Para esta função, não se pode aplicar diretamente a expressão para a série geométrica. Contudo, sabendo-se que para $z \neq 0$

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right),$$

agora pode-se usar a série geométrica, resultando

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right) = \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Esta série pode ser diferenciada termo a termo dentro de seu círculo de convergência ($|z| < 1$), de onde se obtém:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots.$$

Exemplo 6.18 (Obtenção da série de Laurent por integração). Seja, por exemplo,

$$f(z) = \ln(1+z) = \ln|1+z| + i \arg(1+z),$$

onde se assume que o plano z fica restrito ao ramo principal da função logarítmica.

Sabendo-se que

$$\frac{d}{dz} \ln(1+z) = \frac{1}{1+z}, \text{ então } \ln(1+z) = \int_0^z \frac{dw}{1+w},$$

pode-se desenvolver

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad (|z| < 1),$$

e integrar termo a termo:

$$\ln(1+z) = \int_0^z \frac{dw}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^z w^n dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots.$$

6.8.8 SÉRIES DE LAURENT DE FUNÇÕES ELEMENTARES

Sem demonstração, apresenta-se a seguir algumas séries de Laurent de funções elementares desenvolvidas em torno de $z_0 = 0$:

$$\cotan z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} - \frac{2z^5}{945} - \dots - \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1} - \dots \quad (|z| < \pi) \quad (6.36a)$$

$$\cotanh z = \frac{1}{z} + \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} + \frac{2z^5}{945} - \dots + \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1} + \dots \quad (|z| < \pi) \quad (6.36b)$$

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \frac{7z^3}{360} + \frac{31z^5}{15120} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} 2(2^{2n-1} - 1) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1} + \dots \quad (|z| < \pi) \quad (6.36c)$$

$$\operatorname{cosech} z = \frac{1}{z} - \frac{z}{6} + \frac{7z^3}{360} - \frac{31z^5}{15120} + \dots - \frac{2(2^{2n-1} - 1) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1} + \dots \quad (|z| < \pi), \quad (6.36d)$$

sendo $\{B_n\}$ os números de Bernoulli,⁷ dados por

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_{2n-1} = 0, B_n = -n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n+1-k)!} \quad (n \geq 2).$$

6.8.9 CLASSIFICAÇÃO DE SINGULARIDADES

Na seção 6.8.7 observou-se que sempre que a função $f(z)$ possui alguma singularidade em um dado ponto z_0 , a sua série de Laurent desenvolvida em torno deste ponto possui uma parte principal não nula, a qual pode conter um número finito ou infinito de termos. O número de termos contidos na parte principal serve como um critério adicional, alternativo aos critérios definidos na seção 6.4.7, de classificação do tipo de singularidade que $f(z)$ possui em z_0 .

6.8.9.1 POLOS

Se a série de Laurent da função $f(z)$ possuir um número finito de termos na sua parte principal, então esta singularidade é um polo, cuja ordem é dada pela potência mais alta na parte principal.

Exemplo 6.19 (Polos). A função

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = \frac{e^2}{(z-1)^3} + \frac{2e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{z-1} + \frac{4}{3}e^2 + \frac{2}{3}e^2(z-1) + \dots \quad (6.37)$$

possui um polo de ordem 3 em $z = 1$.

6.8.9.2 SINGULARIDADES ESSENCIAIS

Se a série de Laurent da função $f(z)$ possuir um número infinito de termos na sua parte principal, então a função possui uma singularidade essencial.

Exemplo 6.20 (Singularidades essenciais). A função

$$f(z) = e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

possui uma singularidade essencial em $z = 0$.

6.8.9.3 SINGULARIDADES REMOVÍVEIS

Neste caso, a série de Laurent de $f(z)$ possui apenas parte analítica.

Exemplo 6.21 (Singularidades removíveis). A função

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$$

possui uma singularidade removível em $z = 0$.

⁷Ver mais detalhes na seção 5.1.2.1.

6.9 INTEGRAÇÃO NO PLANO COMPLEXO PELO MÉTODO DOS RESÍDUOS

Nesta seção, o teorema de Cauchy será estendido a casos onde o integrando não é analítico; por exemplo, se o integrando possui pontos singulares isolados. Cada singularidade isolada contribui com um termo ao resultado da integral, sendo este termo proporcional ao **resíduo da singularidade**. Esta propriedade, discutida pelo *teorema dos resíduos*, é muito útil para o cálculo de integrais definidas, não somente no plano complexo, mas também puramente reais. Em muitas situações, o teorema dos resíduos consiste no único método conhecido de solução da integral. O mesmo teorema também é útil na solução de certas equações diferenciais ordinárias ou parciais.

6.9.1 RESÍDUOS

Seja $f(z)$ unívoca e analítica no interior e sobre um contorno fechado simples C , exceto em um ponto $z = z_0$, o qual por hipótese é interno a C . Se o ponto z_0 é uma singularidade isolada de $f(z)$, então existe, de acordo com o teorema 6.22, um número real $R_1 > 0$ tal que para $0 < |z - z_0| < R_1$ a função $f(z)$ pode ser desenvolvida em termos de uma série de Laurent (6.35),

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots, \quad (6.38)$$

onde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Em particular, para $n = -1$ obtém-se que

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz. \quad (6.39)$$

O número complexo c_{-1} , o qual é o coeficiente de $1/(z - z_0)$ na expansão (6.38), é denominado o **resíduo de $f(z)$ no ponto singular isolado z_0** .

Este resultado também pode ser obtido de uma maneira mais formal integrando-se (6.38) em ambos os lados ao longo de C :

$$\oint_C dz f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \oint_C dz (z - z_0)^n + \oint_C dz \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \oint_C dz \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots.$$

De acordo com o teorema de Cauchy (teorema (6.10)) ou com o exemplo (6.9),

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}} = 2\pi i \delta_{n0},$$

resultando em

$$\oint_C dz f(z) = 2\pi i c_{-1},$$

de onde resulta o resíduo (6.39).

É comum usar-se também a notação

$$\text{Res } f(z_0) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = c_{-1}.$$

A fórmula (6.39) consiste em um método poderoso para calcular certas integrais ao longo de contornos simples fechados. Para tanto, basta conhecer o valor do coeficiente c_{-1} da série de Laurent associada à função que está sendo integrada.

Exemplo 6.22. Calcule a integral

$$\oint_C \frac{e^{-z} dz}{(z - 1)^2}, \text{ sendo } C \text{ definido por } |z| = 2.$$

Solução. O único ponto singular do integrando é $z = 1$, um polo simples interior à circunferência $|z| = 2$. Desenvolvendo e^{-z} em uma série de Taylor em torno do ponto $z = 1$, resulta a série de Laurent

$$\frac{e^{-z}}{(z-1)^2} = \frac{e^{-1}}{(z-1)^2} - \frac{e^{-1}}{z-1} + e^{-1} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (z-1)^{n-2}, \quad (|z-1| > 0),$$

cujo resíduo em $z = 1$ é $c_{-1} = -e^{-1}$. Portanto,

$$\oint_C \frac{e^{-z} dz}{(z-1)^2} = -\frac{2\pi i}{e}.$$

Exemplo 6.23. Calcule a integral

$$\oint_C \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) dz$$

ao longo do mesmo contorno do exemplo anterior.

Solução. O ponto singular do integrando agora é $z = 0$, a qual é uma singularidade essencial. Empregando a série de MacLaurin para e^z , pode-se escrever

$$\exp\left(\frac{1}{z^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^{2n}} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2! z^4} + \dots, \quad (|z| > 0).$$

Portanto, o resíduo em $z = 0$ é $c_{-1} = 0$ e, assim,

$$\oint_C \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) dz = 0.$$

Observação. Se $f(z)$ for uma função analítica em $z = z_0$, o resíduo $\text{Res } f(z) = c_{-1}$ é, obviamente zero. Contudo, se z_0 for um ponto singular isolado, o resíduo neste ponto pode ou não ser nulo.

6.9.2 TEOREMA DOS RESÍDUOS

Se uma função $f(z)$ possui um número finito de pontos singulares no interior de algum contorno simples fechado C , a integral de $f(z)$ ao longo deste contorno será dada pela soma dos respectivos resíduos da função. Este resultado é garantido pelo *teorema dos resíduos de Cauchy*, descrito a seguir.

Teorema 6.25 (Teorema dos resíduos). *Seja $f(z)$ uma função analítica no interior e ao longo de um contorno simples fechado C , exceto em um número finito de pontos singulares isolados z_1, \dots, z_n localizados no interior de C . Se $b_j = \text{Res } f(z_j)$ ($j = 1, \dots, n$) são os respectivos resíduos de $f(z)$ nestes pontos singulares, então*

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n b_j = 2\pi i (b_1 + b_2 + \dots + b_n). \quad (6.40)$$

Demonstração. Considera-se o contorno exterior C representado na figura 6.18. Deformando-se este contorno com os segmentos de reta e as circunferências $\{C_j\}$ ilustradas na figura, o contorno $B = C + \sum_j (-C_j)$ passa a ser simplesmente conexo. Então, de acordo com o teorema de deformação do contorno (teorema 6.12), resulta

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{j=1}^n \oint_{C_j} f(z) dz.$$

Como $f(z)$ possui uma expansão de Laurent (6.38) em torno de cada ponto singular z_j , resulta a expressão (6.40). \square

6.9.3 CÁLCULO DE RESÍDUOS

Alguns métodos básicos de obtenção dos resíduos de uma função $f(z)$ serão agora discutidos.

6.9.3.1 PRIMEIRO MÉTODO: DIRETO DA DEFINIÇÃO

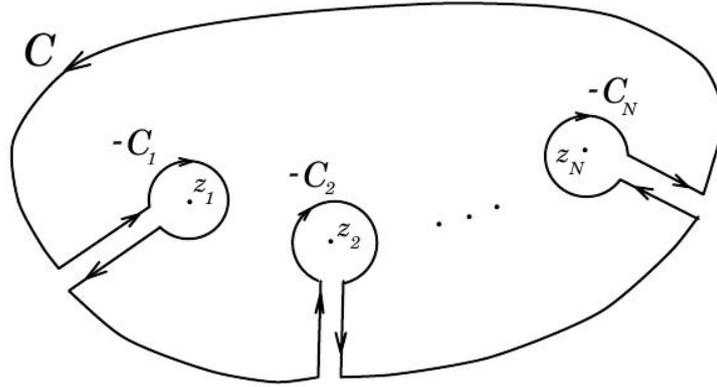


Figura 6.18: Contorno C utilizado na demonstração do teorema dos resíduos. Os pontos $\{z_j\}$ ($j = 1, \dots, n$) são pontos singulares do integrando.

Calcula-se o resíduo de $f(z)$ no ponto z_0 direto da definição (6.39),

$$\text{Res } f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz,$$

sendo C o contorno que envolve somente o ponto singular z_0 . Este método é pouco utilizado, mas pode ser útil se $f(z)$ tem a primitiva ($F'(z) = f(z)$) conhecida e possui um ponto de ramificação em $z = z_0$.

Exemplo 6.24. Calcule resíduo de $f(z) = 1/z$ em $z = 0$.
Solução. Esta função possui a primitiva conhecida, $F(z) = \ln z$, sendo que o ponto $z = 0$ é um ponto de ramificação, com a linha de ramificação ao longo do eixo real positivo. No ramo principal, $F(z) = \ln r + i\theta$, onde $z = re^{i\theta}$. Para evitar a linha de ramificação, o contorno C deve ser inicialmente desconexo (aberto), sendo o mesmo fechado por um processo de limite, conforme mostra a figura 6.19. Assim,

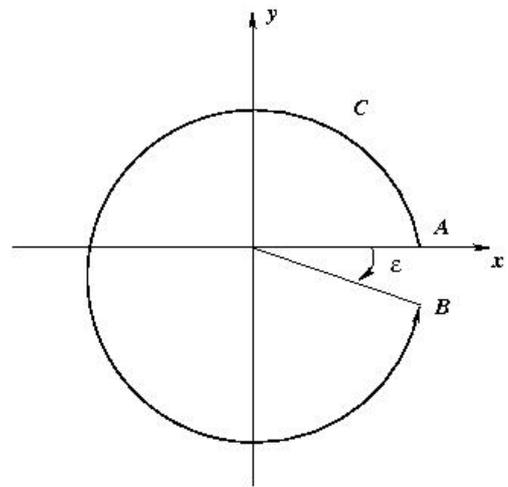


Figura 6.19: Contorno de integração para o exemplo 6.24.

$$\text{Res } f(z_0 = 0) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{B \rightarrow A} \int_A^B \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{B \rightarrow A} (\ln B - \ln A) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i(2\pi - \epsilon) = 1.$$

6.9.3.2 SEGUNDO MÉTODO: POLOS DE ORDEM m EM $z = z_0$

Se $f(z)$ é analítica no interior e ao longo de um contorno fechado simples C , exceto por um polo de ordem m em $z = z_0$, então

$$\text{Res } f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)].$$

Demonstração. Se $f(z)$ possui um polo de ordem m em $z = z_0$, então da definição de polo (6.17) e pela propriedade das séries de Laurent (6.37), segue ser possível escrever $f(z) = g(z)/(z - z_0)^m$, sendo $g(z)$ uma função analítica em R . Então

$$\text{Res } f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} dz.$$

Pela fórmula integral de Cauchy (6.25), resulta

$$\text{Res } f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)].$$

□

Exemplo 6.25. Calcule os resíduos de:

$$(a) f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}.$$

Solução. Os polos são: $z = 1$ (polo simples) e $z = -1$ (polo duplo). Então,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(1) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{1}{4}, \\ \operatorname{Res} f(-1) &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left[(z+1)^2 \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \right] = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$(b) f(z) = \frac{\tan z}{z^2}.$$

Solução. Há somente um polo simples em $z = 0$, pois

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \frac{\tan z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\cos z} = 1.$$

Portanto, $\operatorname{Res} f(0) = 1$.

$$(c) f(z) = \cot z.$$

Solução. Os polos são $z = n\pi$, os quais são de primeira ordem. Então,

$$\operatorname{Res} f(n\pi) = \lim_{z \rightarrow n\pi} (z - n\pi) \cot z = \lim_{z \rightarrow n\pi} \cos z \lim_{z \rightarrow n\pi} \frac{z - n\pi}{\operatorname{sen} z} = (-1)^n (-1)^n = 1.$$

6.9.3.3 TERCEIRO MÉTODO: RESÍDUO DE UMA FUNÇÃO RACIONAL

Este método se aplica quando a função $f(z)$ possui um polo simples em z_0 e pode ser escrita na forma racional

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

sendo $p(z)$ e $q(z)$ funções analíticas, com $q(z_0) = 0$ e $p(z_0) \neq 0$. Neste caso,

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}, \text{ desde que } q'(z_0) \neq 0.$$

Demonstração. Como z_0 por hipótese é um polo simples, pode-se escrever

$$\begin{aligned} (z - z_0) f(z) &= (z - z_0) \frac{p(z_0) + p'(z_0)(z - z_0) + p''(z_0)(z - z_0)^2/2! + \dots}{\underbrace{q(z_0) + q'(z_0)(z - z_0) + q''(z_0)(z - z_0)^2/2! + \dots}_{=0}} \\ &= \frac{p(z_0) + p'(z_0)(z - z_0) + p''(z_0)(z - z_0)^2/2! + \dots}{q'(z_0) + q''(z_0)(z - z_0)/2! + \dots}. \end{aligned}$$

Então,

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

□

Exemplo 6.26. Calcule o resíduo em $z = 0$ para

$$f(z) = \frac{e^z}{\operatorname{sen} z}.$$

Solução. O resíduo é dado por:

$$\operatorname{Res} f(0) = \left. \frac{e^z}{\cos z} \right|_{z=0} = 1.$$

6.9.3.4 QUARTO MÉTODO: PELO DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE DE LAURENT

Quando $z = z_0$ é uma singularidade essencial, este é o único método disponível. Deve-se então primeiramente construir a série de Laurent de $f(z)$ a partir dos métodos discutidos na seção 6.8.7, ou a partir de outro método. Então, o resíduo será diretamente fornecido pelo coeficiente c_{-1} , de acordo com a definição (6.39).

Exemplo 6.27. Calcule o resíduo de:

(a) $f(z) = e^{1/z}$ em $z = 0$.

Solução. De acordo com o exemplo 6.16,

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots, \quad (c_{-1} = 1),$$

então $\text{Res } f(0) = 1$.

(b) $f(z) = e^{-1/z^2}$ em $z = 0$.

Solução. Aqui pode-se usar novamente o exemplo 6.16, resultando

$$e^{-1/z^2} = 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z^4} - \frac{1}{3!z^6} + \cdots, \quad (c_{-1} = 0),$$

então $\text{Res } f(0) = 0$.

6.9.4 CÁLCULO DE INTEGRAIS DEFINIDAS OU IMPRÓPRIAS

O teorema dos resíduos pode ser usado para calcular uma grande variedade de integrais, tanto definidas quanto impróprias, reais ou complexas. É necessário, contudo, escolher-se o contorno integração de uma forma adequada. Alguns dos procedimentos mais freqüentes são ilustrados nas seções seguintes. As integrais ilustradas podem aparecer em problema físicos, particularmente na solução de problemas de contorno em equações diferenciais parciais.

6.9.4.1 INTEGRAIS DO TIPO I: FUNÇÕES RACIONAIS

Aqui serão consideradas integrais do tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N(x)}{D(x)} dx,$$

onde $N(x)$ e $D(x)$ são dois polinômios reais que satisfazem as seguintes condições:

1. $D(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, isto é, $D(x)$ não possui raízes no eixo real. Isto implica que o grau do polinômio é necessariamente par.
2. O grau de $D(x)$ é maior que o grau de $N(x)$ por um fator de 2, no mínimo.

A última hipótese é necessária para garantir a convergência da integral.

Considera-se então a seguinte integral de contorno

$$\oint_C \frac{N(z)}{D(z)} dz = \int_{-R}^R \frac{N(x)}{D(x)} dx + \int_{C_R} \frac{N(z)}{D(z)} dz,$$

onde $R > 0$. As funções $N(z)$ e $D(z)$ são as *continuações analíticas*⁸ dos polinômios reais para o plano complexo, obtidas pela substituição $x \rightarrow z$. A curva simples C_R consiste em um semi-círculo de raio R localizado ou no semi-plano complexo superior ou no inferior e que fecha o contorno C com a reta $[-R, R]$ no eixo real, conforme é ilustrado na figura 6.20. Desta forma, o contorno fechado C pode envolver parte das ou todas as N raízes de $D(z)$ no semi-plano superior ($\{z_j\}$, onde $j = 1, \dots, N$) quando C_R está nesta região (figura 6.20a) ou os seus complexos conjugados ($\{\bar{z}_j\}$, $j = 1, \dots, N$) quando C_R está no semi-plano inferior (figura 6.20b). Ao se fazer $R \rightarrow \infty$, o contorno C engloba todas as N raízes de $D(z)$ em um dos semi-planos.

Portanto, pelo teorema dos resíduos (6.40),

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C \frac{N(z)}{D(z)} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{N(x)}{D(x)} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{N(z)}{D(z)} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res} \frac{N(z)}{D(z)} \Big|_{z=z_j},$$

⁸Ver seção 6.10.

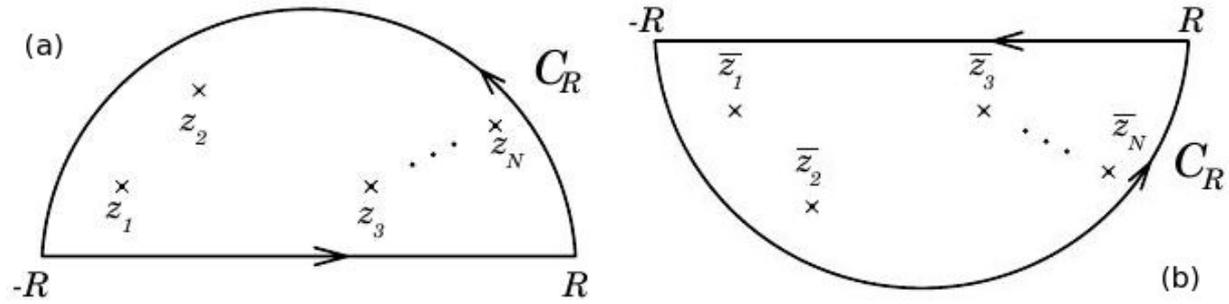


Figura 6.20: (a) Contorno C_R no semi-plano superior. (b) Contorno C_R no semi-plano inferior.

sendo $\{z_j\}$ as raízes de $D(z)$ englobadas por C . Portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N(x)}{D(x)} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{N(x)}{D(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^N \operatorname{Res} \frac{N(z)}{D(z)} \Big|_{z=z_j} - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{N(z)}{D(z)} dz.$$

Mostra-se agora, por intermédio de um teorema, que a integral ao longo de C_R se anula quando $R \rightarrow \infty$, bastando para isso que $|N(z)/D(z)| \rightarrow 1/|z^2|$ quando $|z| \rightarrow \infty$.

Teorema 6.26. *Seja $F(z)$ uma função analítica ao longo do semi-círculo C_R , de raio R , tal que $|F(z)| \leq M/R^k$, sendo $z = Re^{i\theta}$ e onde $k > 1$ e M são constantes, então*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(z) dz = 0.$$

Demonstração. Pela propriedade (5) das integrais de linha (seção 6.5.2), sendo $A = \max(|F(z)|)$ ao longo de C_R e L a extensão de C_R , então

$$\left| \int_{C_R} F(z) dz \right| \leq \frac{M}{R^k} \pi R = \frac{\pi M}{R^{k-1}}.$$

Assim,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_R} F(z) dz \right| = 0. \quad \square$$

O corolário a seguir particulariza o teorema 6.26 para polinômios.

Corolário. *Seja $F(z)$ uma função racional,*

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0},$$

com $m \geq n + 2$, então

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{N(z)}{D(z)} dz = 0.$$

Demonstração. De acordo com o teorema 6.26, ao longo de C_R ,

$$\left| \int_{C_R} \frac{N(z)}{D(z)} dz \right| \leq \frac{|a_n| R^n + |a_{n-1}| R^{n-1} + \dots + |a_0|}{||b_m| R^m - |b_{m-1}| R^{m-1} - \dots - |b_0||} \pi R.$$

Então

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_R} \frac{N(z)}{D(z)} dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi |a_n| R^{n+1}}{|b_m| R^m} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi |a_n|}{|b_m|} \frac{1}{R^{m-n+1}} = 0. \quad \square$$

Assim, de acordo com o teorema 6.26, resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N(x)}{D(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^N \operatorname{Res} \frac{N(z)}{D(z)} \Big|_{z=z_j}. \quad (6.41)$$

Exemplo 6.28. Calcule a integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2}, \text{ (sendo } a > 0 \text{)}.$$

Solução. Como $F(z) = 1/(z^2 + a^2)$ satisfaz a condição estipulada no teorema 6.26, então

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{dz}{z^2 + a^2} = 0.$$

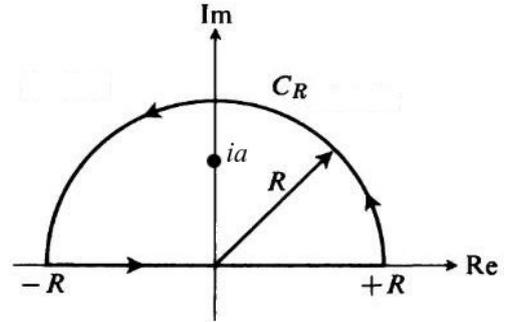


Figura 6.21: Contorno de integração para integrais do tipo I.

Por outro lado, as raízes de $D(z)$ são $z = \pm ia$. Pode-se escolher C_R dentro do semi-plano superior ou inferior. Escolhendo-se C_R conforme a figura ao lado, temos de (6.41),

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^2 + a^2} \right) \Big|_{z=ia}.$$

Pelo método de cálculo de resíduos para funções que possuem polos no plano complexo, apresentado na seção 6.9.3.2,

$$I = 2\pi i \lim_{z \rightarrow ia} \frac{z - ia}{z^2 + a^2} = 2\pi i \frac{1}{2ia} = \frac{\pi}{a}.$$

Se o contorno escolhido fosse no semi-plano inferior, o resultado seria o mesmo.

Exemplo 6.29. Calcule a integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx.$$

Solução. A função $F(z) = z^2/(z^4 + 1)$ novamente satisfaz a condição estipulada no teorema 6.26. Agora as 4 raízes de $D(z)$ são determinadas pela equação $z^4 = -1 = e^{i\pi}$, resultando em (ver eq. 6.10) $z_1 = e^{i\pi/4}$, $z_2 = e^{i3\pi/4}$, $z_3 = e^{i5\pi/4}$ e $z_4 = e^{i7\pi/4}$. Traçando novamente C_R no semi-plano superior, somente será necessário considerar as raízes z_1 e z_2 . Então,

$$I = 2\pi i \left[\operatorname{Res} \frac{z^2}{z^4 + 1} \Big|_{z=z_1} + \operatorname{Res} \frac{z^2}{z^4 + 1} \Big|_{z=z_2} \right].$$

Pelo método apresentado na seção 6.9.3.3, resulta

$$I = 2\pi i \left(\frac{z_1^2}{4z_1^3} + \frac{z_2^2}{4z_2^3} \right) = 2\pi i \left(\frac{e^{-i\pi/4}}{4} + \frac{e^{-i3\pi/4}}{4} \right) = \pi \frac{e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}}{2} = \pi \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

6.9.4.2 INTEGRAIS DO TIPO II: FUNÇÕES RACIONAIS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Agora serão consideradas integrais do tipo

$$\int_0^{2\pi} F(\operatorname{sen} \theta, \operatorname{cos} \theta) d\theta,$$

onde $F(\operatorname{sen} \theta, \operatorname{cos} \theta)$ é uma função racional de $\operatorname{sen} \theta$ e $\operatorname{cos} \theta$.

Realizando a substituição

$$z = e^{i\theta}, \quad dz = ie^{i\theta} d\theta$$

e usando $\operatorname{cos} \theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2 = (z + 1/z)/2$ e $\operatorname{sen} \theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i = (z - 1/z)/2i$, resulta

$$\int_0^{2\pi} F(\operatorname{sen} \theta, \operatorname{cos} \theta) d\theta = \oint_{C_0} \frac{dz}{iz} F \left(\frac{z - 1/z}{2i}, \frac{z + 1/z}{2} \right),$$

sendo C_0 a circunferência de raio unitário centrada na origem. Como $F(x, y)$ é uma função racional, a integral complexa acima pode ser obtida a partir do teorema dos resíduos, os quais serão determinados novamente pelas raízes de um polinômio. Portanto, se o polinômio resultante no

denominador possui N raízes dentro do círculo de raio unitário, determinadas pelo conjunto $\{z_j\}$ ($j = 1, \dots, N$),

$$\int_0^{2\pi} F(\sin \theta, \cos \theta) d\theta = 2\pi i \sum_{j=1}^N \operatorname{Res} \left[\frac{1}{iz} F \left(\frac{z - 1/z}{2i}, \frac{z + 1/z}{2} \right) \right] \Big|_{z=z_j}. \quad (6.42)$$

Exemplo 6.30. Calcule a integral

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta.$$

Solução. Realizando a transformação $z = e^{i\theta}$, resulta

$$\cos 3\theta = \frac{e^{i3\theta} + e^{-i3\theta}}{2} = \frac{z^3 + z^{-3}}{2}$$

e

$$I = \frac{1}{2} \oint_{C_0} \frac{dz}{iz} \frac{z^6 + 1}{z^2(5z - 2z^2 - 2)} = -\frac{1}{2i} \oint_{C_0} dz \frac{z^6 + 1}{z^3(2z - 1)(z - 2)}.$$

O integrando possui os seguintes polos:

- $z = 0$: polo de ordem 3.
- $z = 1/2$: polo de ordem 1.
- $z = 2$: polo de ordem 1 (fora do círculo $|z| = 1$).

Os resíduos são os seguintes:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} F(0) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} \left[z^3 \frac{z^6 + 1}{z^3(2z - 1)(z - 2)} \right] = \frac{21}{8} \\ \operatorname{Res} F\left(\frac{1}{2}\right) &= \lim_{z \rightarrow 1/2} \left[\left(z - \frac{1}{2}\right) \frac{z^6 + 1}{z^3(2z - 1)(z - 2)} \right] = -\frac{65}{24}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$I = -\frac{1}{2i} 2\pi i \left(\frac{21}{8} - \frac{65}{24} \right) = \frac{\pi}{12}.$$

6.9.4.3 INTEGRAIS DO TIPO III: INTEGRAIS DE FOURIER

Tratam-se de integrais do tipo

$$I_{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{\pm ikx} dx \quad (k > 0),$$

onde $F(x)$ é uma função racional que satisfaz as condições do teorema 6.26. As partes real e imaginária do integrando determinam as integrais

$$I_c = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cos kx dx \quad \text{e} \quad I_s = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \sin kx dx.$$

Novamente, é feita a hipótese de ausência de singularidades de $F(x)$ no eixo real. Quando é necessário calcular integrais dos tipos I_c ou I_s , inicialmente substitui-se a integral em questão por I_+ (ou I_- , dependendo das singularidades de $F(x)$) e novamente calcula-se a integral ao longo do semi-círculo ilustrado na figura 6.20a. Isto é, calcula-se

$$\oint_C F(z) e^{ikz} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{-R}^R F(x) e^{ikx} dx + \int_{C_R} F(z) e^{ikz} dz \right].$$

As condições que $F(z)$ deve satisfazer para que a integração ao longo de C_R se anule para $R \rightarrow \infty$ são dadas pelo Lema de Jordan.

Lema 6.1 (Lema de Jordan). *Seja $F(z)$ uma função analítica ao longo do semi-círculo C_R , de raio R , tal que $|F(z)| \leq M/R^\alpha$, sendo $z = Re^{i\theta}$ e onde $\alpha > 0$ e M são constantes, então*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(z) e^{ikz} dz = 0.$$

Demonstração. Sendo $z = Re^{i\theta}$, então

$$\int_{C_R} F(z) e^{ikz} dz = \int_0^\pi F(Re^{i\theta}) \exp(ikRe^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta.$$

Pelas propriedades (5) e (6) da seção 6.5.2,

$$\left| \int_0^\pi F(Re^{i\theta}) \exp(ikRe^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^\pi |F(Re^{i\theta}) \exp(ikRe^{i\theta}) iRe^{i\theta}| d\theta,$$

mas

$$\exp(ikRe^{i\theta}) = e^{ikR(\cos\theta + i\sin\theta)} \leq e^{-kR\sin\theta},$$

portanto,

$$\left| \int_0^\pi F(Re^{i\theta}) \exp(ikRe^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^\pi |F(Re^{i\theta})| e^{-kR\sin\theta} R d\theta \leq \frac{M}{R^{\alpha-1}} \int_0^\pi e^{-kR\sin\theta} d\theta.$$

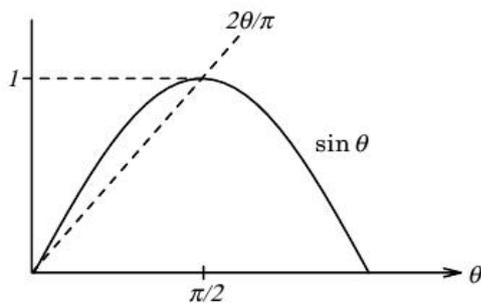


Figura 6.22: Demonstração gráfica da desigualdade $\sin\theta \geq 2\theta/\pi$ em $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Como $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$, pode-se alterar o intervalo de integração para $[0, \pi/2]$. Além disso, como mostra a figura 6.22, $\sin\theta \geq 2\theta/\pi$ neste intervalo. Assim,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi F(Re^{i\theta}) \exp(ikRe^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta \right| &\leq \frac{2M}{R^{\alpha-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-2kR\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi M}{kR^\alpha} (1 - e^{-kR}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(z) e^{ikz} dz = 0,$$

o que completa a demonstração do lema.

Devido ao Lema de Jordan, o teorema dos resíduos garante que

$$I_+ = I_c + iI_s = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{ikx} dx = 2\pi i \sum_j \text{Res} [F(z_j) e^{ikz_j}], \quad (6.43a)$$

sendo $\{z_j\}$ os pontos singulares de $F(z)$ na região delimitada pelo contorno C ilustrado na figura 6.20.

Caso os pontos singulares de $F(z)$ sejam tais que se faz necessário considerar-se C_R percorrendo o semi-círculo no semi-plano inferior ilustrado na figura 6.20b, deve-se calcular então I_- . As conclusões são similares às de I_+ , salvo que os resíduos são computados no semi-plano inferior e

$$I_- = I_c - iI_s = -2\pi i \sum_j \text{Res} [F(z_j) e^{-ikz_j}]. \quad (6.43b)$$

Exemplo 6.31. Calcule a integral

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx.$$

Solução. Pode-se escrever

$$I = \frac{1}{2} \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^2} dx.$$

Identifica-se $F(z) = 1/(1+z^2)$, e esta satisfaz as condições do Lema de Jordan, pois ao longo de C_R ,

$$|F(z)| = \frac{1}{|1+z^2|} \leq \frac{1}{R^2-1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^2}.$$

Os resíduos de $F(z)$ estão em $z = \pm i$, sendo estes polos simples. Assim, de (6.43a),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2} \right) \Big|_{z=i} = \pi e^{-\alpha}.$$

Portanto,

$$I = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}.$$

6.9.4.4 INTEGRAIS DO TIPO IV: INTEGRANDO COM POLOS NO EIXO REAL

Seja $F(z)$ uma função **meromórfica**, ou seja, uma função que possui apenas polos em um domínio finito no plano complexo. Supõe-se que $F(z)$ possua, no mínimo, um polo ao longo do eixo real. Supõe-se também que $|F(z)| \rightarrow 0$ para $|z| \rightarrow \infty$. Deseja-se calcular agora integrais do tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx.$$

Devido a presença do polo no eixo real, para que o teorema dos resíduos permaneça válido, o contorno de integração não pode passar pela referida singularidade; torna-se necessário, portanto, que o contorno seja deformado nas vizinhanças do polo real. A partir desta situação surge a definição da **parte principal de Cauchy** da integral.

PARTE PRINCIPAL DE CAUCHY

Seja $F(z) = f(z)/(z-x_0)$ uma função meromórfica que possui, no mínimo, um polo simples no eixo real em $z = x_0$. Ao se considerar a integral $\int_a^b F(x) dx$, com $a < x_0 < b$ tais que $z = x_0$ é o único polo de $F(z)$ neste intervalo, a convergência desta integral depende da existência do seguinte limite:

$$I_{PP} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{x_0-\epsilon} \frac{f(x)}{x-x_0} dx + \int_{x_0+\epsilon}^b \frac{f(x)}{x-x_0} dx \right).$$

Diz-se que $\int_a^b F(x) dx$ é convergente se e somente se I_{PP} existe e é finito, caso contrário a integral é divergente. O limite I_{PP} pode existir, em algumas situações, mesmo se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \rightarrow \pm\infty$. Isto ocorre, por exemplo, se $f(x)$ é simétrica em uma vizinhança de x_0 .

Caso I_{PP} exista e seja finita, esta define a parte principal de Cauchy da integral $\int_a^b F(x) dx$, a qual é representada pelos símbolos f_a^b ou \mathcal{P}_a^b :

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x-x_0} dx \equiv \mathcal{P}_a^b \frac{f(x)}{x-x_0} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{x_0-\epsilon} \frac{f(x)}{x-x_0} dx + \int_{x_0+\epsilon}^b \frac{f(x)}{x-x_0} dx \right). \quad (6.44a)$$

A **parte principal de Cauchy no infinito** existe se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx \equiv \mathcal{P}_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{x_0-\epsilon} \frac{f(x)}{x-x_0} dx + \int_{x_0+\epsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx \right) \quad (6.44b)$$

existe e é finito.

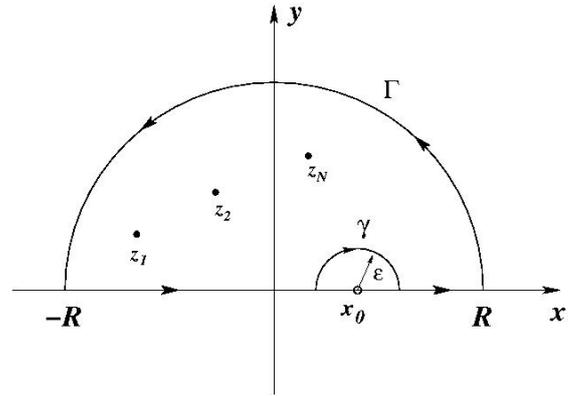
CÁLCULO DE INTEGRAIS DO TIPO IV

Para calcular integrais do tipo IV pelo teorema dos resíduos, considera-se o contorno

$$C = \Gamma + \gamma + (-R, x_0 - \epsilon) + (x_0 + \epsilon, R)$$

apresentado na figura 6.23, o qual é composto por um semi-círculo exterior Γ , dois segmentos de reta ao longo do eixo real nos intervalos $(-R, x_0 - \epsilon)$ e $(x_0 + \epsilon, R)$, e do semi-círculo interior γ .

Na figura 6.23, a curva Γ foi traçada no semi-plano superior para englobar os polos $\{z_j\}$ ($j = 1, \dots, N$) de $f(z)$. Caso estes polos se encontrem no semi-plano inferior, a curva Γ pode ser traçada nesta região. Supõe-se também que ϵ (> 0) seja pequeno o suficiente para que nenhum dos polos $\{z_j\}$ se encontre na região interior da curva γ .



Assim, pelo teorema dos resíduos,

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - x_0} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res} \left(\frac{f(z)}{z - x_0} \right) \Big|_{z=z_j}.$$

Dividindo o contorno C nas suas curvas constituintes,

Figura 6.23: Contorno de integração para integrais do tipo IV.

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - x_0} dz + \int_{-R}^R \frac{f(x)}{x - x_0} dx + \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - x_0} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res} \left(\frac{f(z)}{z - x_0} \right) \Big|_{z=z_j},$$

Toma-se agora o limite $R \rightarrow \infty$, supondo que $F(z)$ ao longo de Γ satisfaça as condições prescritas pelo teorema 6.26. Neste caso, $\int_{\Gamma} F(z) dz = 0$. A integral ao longo de γ pode ser calculada, tomando-se para ela o limite $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - x_0} dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{f(x_0 + \epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} i\epsilon e^{i\theta} d\theta = -i\pi f(x_0),$$

sendo neste caso suposto que $f(x_0)$ exista e seja finita. Este valor da integral em γ é muitas vezes denominado de **semiresíduo de $f(x)$ em x_0** .

Portanto, obtém-se o seguinte resultado para a parte principal,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx = \pi i f(x_0) + 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res} \left(\frac{f(z)}{z - x_0} \right) \Big|_{z=z_j}. \tag{6.45a}$$

Caso a função $F(x)$ possua mais de um polo no eixo real, o resultado (6.45a) pode ser facilmente generalizado. Sendo novamente $\{z_j\}$ ($j = 1, \dots, N$) o conjunto de polos de $F(z)$ fora do eixo real e $\{x_\ell\}$ ($\ell = 1, \dots, M$) o conjunto de polos ao longo do eixo real, a forma generalizada de (6.45a) é

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = \pi i \sum_{\ell=1}^M \text{Res} F(x_\ell) + 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res} F(z_j). \tag{6.45b}$$

Exemplo 6.32. Calcule a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx.$$

Solução. É conveniente calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx.$$

A função e^{iz}/z satisfaz as condições estabelecidas pelo Lema de Jordan, ou seja, $|z^{-1}| \leq M/R^\alpha$ ($\alpha > 0$) ao longo de Γ . Portanto, $\int_{\Gamma} (e^{iz}/z) dz = 0$ e a equação (6.45a) pode ser aplicada, de onde resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = i\pi.$$

Uma vez que $e^{ix} = \cos x + i \text{sen } x$, obtém-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \pi.$$

Observação. Nota-se que, neste caso, $f = \int$, pois $x = 0$ é uma singularidade removível. É interessante também que o mesmo resultado fornece

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0,$$

o que é esperado, uma vez que o integrando neste caso é ímpar.

Exemplo 6.33. Calcule a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(a^2 - x^2)} dx, \quad (a > 0).$$

Solução. Novamente toma-se

$$F(z) = \frac{e^{iz}}{z(a^2 - z^2)},$$

sendo que $F(z)$ satisfaz as condições do Lema de Jordan e os seus polos são $z = 0$ e $z = \pm a$, todos ao longo do eixo real. Neste caso, de acordo com (6.45b),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{x(a^2 - x^2)} = i\pi [\operatorname{Res} F(0) + \operatorname{Res} F(a) + \operatorname{Res} F(-a)].$$

Calculando os resíduos,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} F(0) &= z \frac{e^{iz}}{z(a^2 - z^2)} \Big|_{z=0} = \frac{1}{a^2}, \\ \operatorname{Res} F(a) &= (z - a) \frac{e^{iz}}{z(a^2 - z^2)} \Big|_{z=a} = -\frac{e^{ia}}{2a^2} \\ \operatorname{Res} F(-a) &= (z + a) \frac{e^{iz}}{z(a^2 - z^2)} \Big|_{z=-a} = -\frac{e^{-ia}}{2a^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{x(a^2 - x^2)} = i \frac{\pi}{a^2} (1 - \cos a)$$

e o resultado desejado fica

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x dx}{x(a^2 - x^2)} = \frac{\pi}{a^2} (1 - \cos a).$$

Observação. Novamente observa-se também que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x(a^2 - x^2)} = 0.$$

6.9.4.5 INTEGRAIS DO TIPO V: INTEGRAÇÃO AO LONGO DE LINHAS DE RAMIFICAÇÃO

Neste caso, o contorno de integração deve ser construído de forma a evitar tanto os pontos de singularidades essenciais e polos no eixo real quanto a linha de ramificação.

Para ilustrar este tipo de integração, serão consideradas integrais do tipo

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda-1} G(x) dx, \quad (\text{sendo } 0 < \lambda < 1)$$

e a função $G(z)$ é racional, analítica em $z = 0$ e não possui polos ao longo do eixo real positivo. Supõe-se ainda que

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow 0 \\ |z| \rightarrow \infty}} |z^{\lambda-1} G(z)| = 0.$$

A função $f(z) = z^{\lambda-1}$ é plurívoca, com um ponto de ramificação em $z = 0$, o que pode ser comprovado por uma rotação do fador z em torno da origem,

$$f(z) = z^{\lambda-1} \xrightarrow{\theta \rightarrow \theta + 2\pi} e^{i2\pi(\lambda-1)} z^{\lambda-1}.$$

Como $\lambda - 1$ não é inteiro, o valor de $f(z)$ em $\theta + 2\pi$ difere do valor em θ . A outra singularidade de $f(z)$ está no infinito, significando que a linha de ramificação deve unir estes dois pontos singulares. Usualmente, esta linha é traçada ao longo do eixo real positivo. O número de folhas de Riemann para $f(z)$ depende da natureza do número λ . Se este número é racional, então há um número finito de folhas de Riemann; contudo, se λ é irracional, então existem infinitas folhas de Riemann. Devido a este fato, o contorno de integração C a ser adotado deve evitar o cruzamento da linha de ramificação para evitar a necessidade de se considerar os outros ramos da função $z^{\lambda-1}$.

O contorno de integração usualmente empregado para resolver uma integral do tipo V é apresentado na figura 6.24, a qual mostra também a linha de ramificação no intervalo $[0, \infty)$. Este tipo de contorno é denominado *buraco de fechadura*⁹ e consiste em um arco de circunferência exterior C_R , de raio R e centrado na origem, com uma variação angular $\delta_R \leq \theta \leq 2\pi - \delta_R$. O número $0 < \delta_R \ll 1$ pode ser tão pequeno quanto se queira, mas nunca é nulo, justamente para evitar que C_R toque a linha de ramificação. O contorno C contém também o arco de circunferência interior C_r , de raio r e centrado na origem, com a variação angular $\delta_r \leq \theta \leq 2\pi - \delta_r$, sendo $0 < \delta_r \ll 1$ também tão pequeno quanto se queira. Finalmente, os arcos C_r e C_R são ligados pelos segmentos de reta $[r, R]$ e $[R, r]$,¹⁰ os quais distam da linha de ramificação por uma distância $0 < \epsilon \ll 1$. Obviamente, $\epsilon = r \sin \delta_r$.

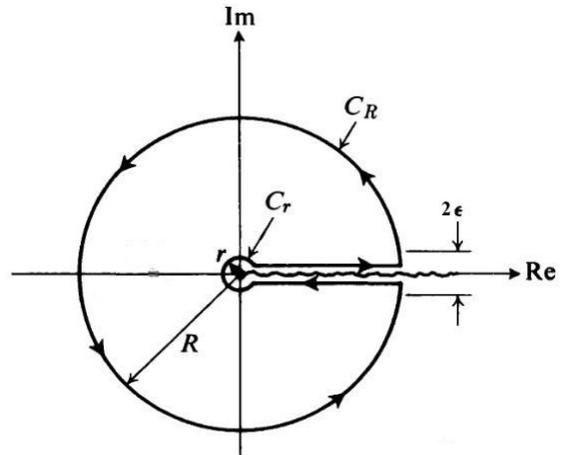


Figura 6.24: Contorno de integração para integrais do tipo V.

Como a função $z^{\lambda-1}$ é descontínua ao longo da linha de ramificação, o valor das integrais ao longo dos segmentos de reta não se cancelam. Na reta superior, $\arg(z) \simeq 0$ e, portanto,

$$f(z) = z^{\lambda-1} = (x + i\epsilon)^{\lambda-1}.$$

Na reta inferior, $\arg(z) \simeq 2\pi$ e, portanto,

$$f(z) = e^{i2\pi(\lambda-1)} z^{\lambda-1} = e^{i2\pi(\lambda-1)} (x - i\epsilon)^{\lambda-1}.$$

Supondo agora que a função $R(z)$ possua N singulares isoladas (polos e/ou singularidades essenciais) nos pontos $\{z_j\}$ ($j = 1, \dots, N$), o teorema dos resíduos (6.40) aplicado ao contorno simples fechado $C = C_R + C_r + [r, R] + [R, r]$ garante que

$$\begin{aligned} \oint_C z^{\lambda-1} G(z) dz &= \int_{C_R} z^{\lambda-1} G(z) dz + \int_{C_r} z^{\lambda-1} G(z) dz + \int_r^R (x + i\epsilon)^{\lambda-1} G(x + i\epsilon) dx \\ &+ \int_R^r e^{2\pi i(\lambda-1)} (x - i\epsilon)^{\lambda-1} G(x - i\epsilon) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res} [z^{\lambda-1} G(z)]|_{z_j}. \end{aligned}$$

A integral em C_R se anula no limite $R \rightarrow \infty$, desde que as condições do seguinte teorema sejam satisfeitas.

Teorema 6.27. *Seja uma função $F(z)$ analítica ao longo do arco de circunferência C_R , de raio R centrado na origem, tal que $|F(z)| \leq M/R^\alpha$ ao longo de C_R , sendo $\alpha > 1$ e $M > 0$ constantes, então*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(z) dz = 0.$$

Demonstração. Sendo a curva C_R parametrizada pelo ângulo θ , o qual varia no intervalo $[\theta_1, \theta_2]$, então

$$\left| \int_{C_R} F(z) dz \right| \leq \int_{\theta_1}^{\theta_2} |F(z)| R d\theta \leq \frac{M}{R^{\alpha-1}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \frac{M(\theta_2 - \theta_1)}{R^{\alpha-1}}.$$

⁹Do inglês *keyhole*.

¹⁰Rigorosamente, os segmentos de reta percorrem o intervalo $[r \cos \delta_r, R \cos \delta_R]$, em ambos os sentidos.

Portanto,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_R} F(z) dz \right| = 0,$$

de onde segue o teorema. \square

Por outro lado, a integral ao longo de C_r pode ser calculada parametrizando-se $z = re^{i\theta}$ e tomando-se o limite $r \rightarrow 0$:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} z^{\lambda-1} G(z) dz = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ir^\lambda \int_{\delta_r}^{2\pi-\delta_r} e^{i\lambda\theta} G(re^{i\theta}) d\theta \right] = \left[\frac{G(0)}{\lambda} (e^{i2\pi\lambda} e^{-i\lambda\delta_r} - e^{i\lambda\delta_r}) \right] \lim_{r \rightarrow 0} r^\lambda.$$

Como $G(z)$ por hipótese é analítica em $z = 0$ e $\lambda > 0$, resulta que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} z^{\lambda-1} G(z) dz = 0.$$

Lembrando também que $r \rightarrow 0$ implica em $\epsilon \rightarrow 0$, restam as seguintes integrais,

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1} G(x) dx + e^{2\pi i(\lambda-1)} \int_\infty^0 x^{\lambda-1} G(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res} [z^{\lambda-1} G(z)]|_{z_j},$$

as quais podem ser escritas

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{\lambda-1} G(x) dx + e^{2\pi i(\lambda-1)} \int_\infty^0 x^{\lambda-1} G(x) dx &= (1 - e^{2\pi i(\lambda-1)}) \int_0^\infty x^{\lambda-1} G(x) dx \\ &= -e^{i\pi\lambda} (e^{i\pi\lambda} - e^{-i\pi\lambda}) \int_0^\infty x^{\lambda-1} G(x) dx = 2i(-1)^{\lambda+1} \text{sen } \pi\lambda \int_0^\infty x^{\lambda-1} G(x) dx. \end{aligned}$$

Portanto, resulta

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1} G(x) dx = (-1)^{-(\lambda+1)} \frac{\pi}{\text{sen } \pi\lambda} \sum_{j=1}^N \text{Res} [z^{\lambda-1} G(z)]|_{z_j}. \quad (6.46)$$

Exemplo 6.34. Calcule a integral

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx, \quad (0 < \lambda < 1).$$

Solução. Como $0 < \lambda < 1$, o integrando ao longo da curva C_R , para $R \gg 1$, pode ser escrito

$$\left| \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} \right| \simeq \frac{1}{R^{2-\lambda}}.$$

Então, de acordo com o teorema 6.27,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} dz = 0$$

e o resultado (6.46) é válido neste caso. O único polo de $G(z) = (1+z)^{-1}$ está em $z = -1$ e o resíduo do integrando neste ponto é

$$\text{Res} \left(\frac{z^{\lambda-1}}{1+z} \right) \Big|_{z=-1} = (-1)^{\lambda-1}.$$

Portanto,

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx = (-1)^{-(\lambda+1)} \frac{\pi}{\text{sen } \pi\lambda} (-1)^{\lambda-1} = \frac{\pi}{\text{sen } \pi\lambda}.$$

6.9.4.6 OUTROS TIPOS DE INTEGRAIS

Existem diversos outros exemplos de integrais que podem ser calculadas usando o teorema dos resíduos por intermédio de uma escolha adequada do contorno de integração. Nesta seção serão apresentados alguns exemplos relevantes para a física.

INTEGRAIS DE FRESNEL. DIFRAÇÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS. As integrais

$$C = \int_0^\infty \cos(tx^2) dx \text{ e } S = \int_0^\infty \text{sen}(tx^2) dx$$

correspondem aos valores assintóticos das funções de Fresnel, as quais descrevem a difração de ondas eletromagnéticas em um único obstáculo pontiagudo (difração de canto).

Para a obtenção dos valores de C e S , considera-se a seguinte integral

$$I = \int_0^\infty e^{itz^2} dz,$$

cujas partes real e imaginária fornecem, respectivamente, C e S . Por conveniência, assume-se que $t > 0$; para este caso, o contorno de integração adequado pode ser visto na figura 6.25. Como a função e^{itz^2} é analítica dentro e ao longo do contorno $C = C_x + C_R + C_L$, pode-se escrever

$$\oint_C e^{itz^2} dz = \left(\int_{C_x} + \int_{C_R} + \int_{C_L} \right) e^{itz^2} dz = 0.$$

A integral em C_R pode ser estimada usando argumento semelhante ao exposto pelo Lema de Jordan. Ao longo deste contorno, $z^2 = R^2(\cos 2\theta + i \text{sen } 2\theta)$. Como demonstrado graficamente na figura 6.22, $\text{sen } 2\theta \geq 4\theta/\pi$ em $0 \leq \theta \leq \pi/4$, portanto

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} e^{itz^2} dz \right| &= \left| \int_0^{\pi/4} e^{itR^2(\cos 2\theta + i \text{sen } 2\theta)} iR e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^{\pi/4} R e^{-tR^2 \text{sen } 2\theta} d\theta \\ &\leq \int_0^{\pi/4} R e^{-tR^2 4\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi}{4tR} (1 - e^{-tR^2}). \end{aligned}$$

Ou seja, $\left| \int_{C_R} e^{itz^2} dz \right| \rightarrow 0$ para $R \rightarrow \infty$.

Por outro lado, ao longo de C_x , $z = x$ e ao longo de C_L , $z = re^{i\pi/4}$ ($0 \leq r \leq R$). Assim,

$$\int_{C_x} e^{itz^2} dz = \int_0^R e^{itx^2} dx \text{ e } \int_{C_L} e^{itz^2} dz = \int_R^0 e^{-tr^2} e^{i\pi/4} dr.$$

Portanto, no limite $R \rightarrow \infty$,

$$\int_0^\infty e^{itx^2} dx = e^{i\pi/4} \int_0^\infty e^{-tr^2} dr.$$

A integral $J = \int_0^\infty e^{-tr^2} dr$ pode ser calculada da seguinte maneira:

$$J^2 = \left(\int_0^\infty e^{-tx^2} dx \right) \left(\int_0^\infty e^{-ty^2} dy \right) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t(x^2+y^2)} dx dy.$$

Usando coordenadas polares, resulta

$$J^2 = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty d\rho \rho e^{-t\rho^2} = \frac{\pi}{4t}.$$

Finalmente, obtém-se

$$\int_0^\infty e^{itx^2} dx = \frac{e^{i\pi/4}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} = \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \text{sen } \frac{\pi}{4} \right) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}}.$$

Portanto, as integrais de Fresnel valem

$$S = C = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2t}}.$$

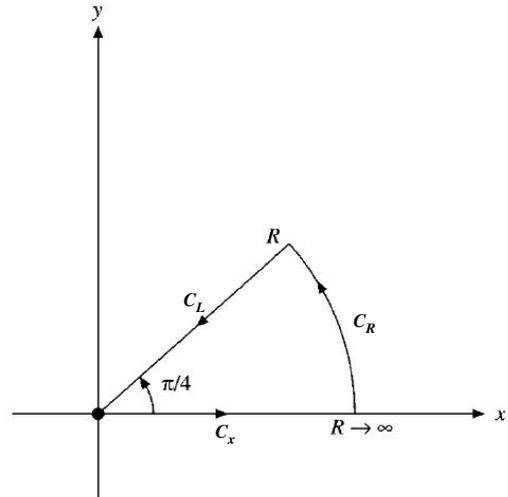


Figura 6.25: Contorno de integração para as integrais de Fresnel.

INTEGRAL DE PLANCK E LEI DE STEFAN-BOLTZMANN. A Lei de Planck determina a intensidade espectral da radiação eletromagnética emitida por um corpo negro em equilíbrio termodinâmico a uma temperatura absoluta T . Esta intensidade é dada por

$$I(\nu, T) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1},$$

sendo $I(\nu, T)$ a potência emitida por unidade de área da superfície emissora por unidade de ângulo sólido por frequência ν . As quantidades h , k_B e c são, respectivamente, as constantes de Planck e Boltzmann e a velocidade da luz no vácuo. A Lei de Stefan-Boltzmann fornece a potência total emitida por unidade de área do corpo negro, ou seja,

$$j = \pi \int_0^\infty d\nu I(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 I_P, \text{ sendo } I_P = \int_0^\infty \frac{u^3 du}{e^u - 1}$$

a integral que se deseja calcular, a qual é obtida por uma simples troca de variáveis de integração.

Para se obter I_P , considera-se a integral

$$f(k) = \int_0^\infty \frac{\text{sen}(kx)}{e^x - 1} dx.$$

Obviamente,

$$I_P = - \left. \frac{d^3 f}{dk^3} \right|_{k=0}.$$

Portanto, pode-se obter I_P conhecendo-se $f(k)$. A integral que define esta função também pode ser escrita como

$$f(k) = \text{Im} \int_0^\infty \frac{e^{ikx}}{e^x - 1} dx.$$

Este cálculo será realizado utilizando-se o contorno $C = C_1 + \dots + C_6$ ilustrado na figura 6.26 e a integral de contorno

$$\oint_C \frac{e^{ikz}}{e^z - 1} dz = 0,$$

a qual é nula pelo teorema dos resíduos (6.40) porque o integrando possui apenas polos simples nos pontos $z = 2n\pi i$, ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

As integrais nos contornos C_1, \dots, C_6 devem ser realizadas separadamente. Nos contornos C_2 e C_4 obtêm-se

$$\left(\int_{C_2} + \int_{C_4} \right) \frac{e^{ikz}}{e^z - 1} dz = (1 - e^{-2\pi k}) \int_\epsilon^R \frac{e^{ikx}}{e^x - 1} dx.$$

Já ao longo dos contornos C_1 e C_5 observa-se que $|z| = \epsilon \ll 1$, o que permite o uso da série de Laurent (6.36d). Para a integral I_1 pode-se escrever $z = \epsilon e^{i\theta}$, resultando

$$\begin{aligned} I_1(\epsilon) &\equiv \int_{C_1} \frac{e^{ikz}}{e^z - 1} dz = \frac{1}{2} \int_{C_1} e^{z/2} e^{ikz} \text{cosech}\left(\frac{z}{2}\right) dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{C_1} e^{z/2} e^{ikz} \left(\frac{2}{z} - \frac{z}{12} + \frac{7z^3}{2880} - \dots \right) dz = -i \int_0^{\pi/2} \exp\left[\left(\frac{1}{2} + ik\right) \epsilon e^{i\theta}\right] d\theta - \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_1 = -i \frac{\pi}{2}.$$

Já para o contorno C_5 pode-se escrever $z = 2\pi i + \epsilon e^{i\theta}$ e

$$I_5(\epsilon) \equiv \int_{C_5} \frac{e^{ikz}}{e^z - 1} dz = \frac{1}{2} \int_{C_5} e^{z/2} e^{ikz} \text{cosech}\left(\frac{z}{2}\right) dz.$$

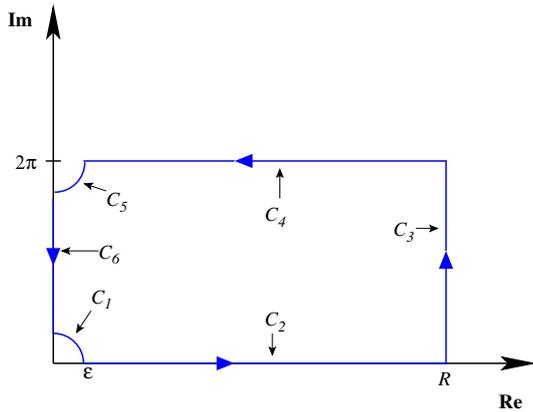


Figura 6.26: Contorno de integração empregado para o cálculo da integral de Planck. Observa-se que $\epsilon \ll 1$ e $R \gg 1$.

Neste caso é necessária a série de Laurent de $\operatorname{cosech} z$ em torno de $z_0 = 2\pi i$, a qual é simplesmente

$$\operatorname{cosech} z = -\frac{1}{z - 2\pi i} + \frac{z - 2\pi i}{6} - \frac{7(z - 2\pi i)^3}{360} + \dots,$$

resultando,

$$I_5(\epsilon) = \frac{1}{2} \int_{C_5} e^{z/2} e^{ikz} \left[-\frac{2}{z - 2\pi i} + \frac{z - 2\pi i}{12} + \dots \right] dz = ie^{-2\pi k} \int_0^{-\pi/2} \exp \left[\left(\frac{1}{2} + ik \right) \epsilon e^{i\theta} \right] d\theta + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Portanto,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_5 = -i \frac{\pi}{2} e^{-2\pi k}.$$

Já a integral I_3 pode ser escrita

$$I_3(R) \equiv \int_{C_3} \frac{e^{ikz}}{e^z - 1} dz = ie^{-(1-ik)R} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ky}}{e^{iy} - e^{-R}} dy.$$

Observa-se agora que no limite $R \rightarrow \infty$ a integral é finita, pois o denominador do integrando pode ser substituído por e^{iy} , o que torna a integração trivial. Portanto, $\lim_{R \rightarrow \infty} I_3 = 0$. Finalmente, a integral I_6 pode ser escrita

$$I_6 \equiv \int_{C_6} \frac{e^{ikz}}{e^z - 1} dz = -i \int_{\epsilon}^{2\pi - \epsilon} \frac{e^{-ky}}{e^{iy} - 1} dy = -i \int_{\epsilon}^{2\pi - \epsilon} \frac{e^{-ky} e^{-iy/2}}{e^{iy/2} - e^{-iy/2}} dy = -\frac{1}{2} \int_{\epsilon}^{2\pi - \epsilon} \frac{e^{-ky} e^{-iy/2}}{\operatorname{sen}(y/2)} dy.$$

Assim, pelo teorema dos resíduos,

$$(1 - e^{-2\pi k}) \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ikx}}{e^x - 1} dx = \frac{1}{2} \int_{\epsilon}^{2\pi - \epsilon} \frac{e^{-ky} e^{-iy/2}}{\operatorname{sen}(y/2)} dy - I_1 - I_5 - I_3(R)$$

e, portanto, $f(k)$ é dada por

$$\begin{aligned} f(k) &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \operatorname{Im} \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ikx}}{e^x - 1} dx = -\frac{1}{2(1 - e^{-2\pi k})} \int_0^{2\pi} e^{-ky} dy + \frac{\pi}{2} \frac{1 + e^{-2\pi k}}{1 - e^{-2\pi k}} \\ &= -\frac{1}{2k} + \frac{\pi}{2} \frac{1 + e^{-2\pi k}}{1 - e^{-2\pi k}} = -\frac{1}{2k} + \frac{\pi}{2} \operatorname{coth}(\pi k) \\ &\stackrel{(6.36b)}{\rightarrow} \frac{\pi^2 k}{6} - \frac{\pi^4 k^3}{90} + \frac{\pi^6 k^5}{945} - \dots + \frac{\pi B_{2n}}{(2n)!} (2\pi k)^{2n-1} + \dots \end{aligned} \quad (6.47)$$

Com este resultado, é possível finalmente obter-se I_P :

$$I_P = \frac{\pi^4}{15},$$

resultando na seguinte expressão para a constante de Stefan-Boltzmann,

$$j = \sigma T^4, \text{ sendo } \sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2}.$$

Como um bônus, o resultado (6.47) pode ser usado para fornecer o valor das integrais

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2n+1} dx}{e^x - 1} = (-1)^n \left. \frac{d^{2n+1} f}{dk^{2n+1}} \right|_{k=0} = (-1)^n 2^{2n} \pi^{2(n+1)} \frac{B_{2(n+1)}}{n+1}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

6.10 CONTINUAÇÃO ANALÍTICA

Com frequência, a representação conhecida de uma dada função é válida somente em uma região limitada do plano complexo, como uma série de Laurent com raio de convergência finito, por exemplo. A região de convergência (ou domínio) desta série se estende até a singularidade mais próxima, distinta do ponto em torno do qual se realiza a expansão, que pode ou não conter uma singularidade. Com frequência também é desejável obter-se uma outra forma matemática que represente a mesma função em uma outra região do plano complexo, ou que seja válida em uma porção maior do mesmo. O processo de estender o intervalo de validade de uma representação ou, de forma mais geral, estender a região de domínio de uma função analítica é denominado **continuação analítica**.

Definição 6.1. Um elemento de função analítica $(f(z), D)$ é uma função analítica $f(z)$ no interior de seu domínio de definição D . Um elemento de função (f_2, D_2) é uma continuação analítica de outro elemento (f_1, D_1) se $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ e se $f_1(z) = f_2(z)$ em $D_1 \cap D_2$.

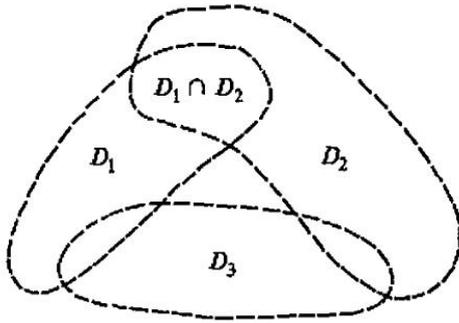


Figura 6.27: Representação de três possíveis continuações analíticas da mesma função $f(z)$.

Em outras palavras, seja $f_1(z)$ uma função analítica da variável z em um domínio D_1 do plano complexo. Supõe-se agora ser possível encontrar uma outra função $f_2(z)$, a qual é analítica em um outro domínio D_2 . Se ocorrer uma intersecção $D_1 \cap D_2$ não nula de ambos os domínios, conforme representado na figura 6.27, e se $f_1(z) = f_2(z)$ em $D_1 \cap D_2$, então se diz que $f_2(z)$ é a continuação analítica de $f_1(z)$ em D_2 , e vice-versa. Da mesma forma, pode existir uma terceira função $f_3(z)$, analítica em D_3 , e se $f_3(z) = f_1(z)$ em $D_3 \cap D_1$ e $f_3(z) = f_2(z)$ em $D_3 \cap D_2$, então $f_3(z)$ pode ser a continuação analítica das anteriores em D_3 . Esta situação também está representada na figura 6.27. Portanto, existe uma função analítica $f(z)$ com o domínio $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, tal que $f(z) = f_1(z)$ em D_1 , $f(z) = f_2(z)$ em D_2 e $f(z) = f_3(z)$ em D_3 . Nota-se que basta a intersecção entre os domínios ser composta simplesmente por um arco que a continuação analítica existe e é única, desde que as três regiões não englobem um ponto singular ou um ponto de ramificação de uma função plurívoca.

Contudo, a situação descrita acima nem sempre ocorre. Somente é garantida a existência da função analítica $f(z)$ no domínio $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ se $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \neq \emptyset$. Caso a intersecção ocorra somente entre pares de domínios e se a região entre os domínios D_1 , D_2 e D_3 contiver pontos singulares, como por exemplo, pontos de ramificação, então $f_3(z) \neq f_1(z)$, porque a região $D_1 \cap D_3$ será parte do domínio de diferentes folhas de Riemann para cada função. O exemplo a seguir mostra uma situação onde isto ocorre.

Exemplo 6.35. Considera-se o seguinte ramo da função $f(z) = \sqrt{z}$:

$$f_1(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}, \quad D_1 : (r > 0, 0 < \theta < \pi).$$

Uma continuação analítica de $f_1(z)$ através do eixo real negativo e para o semi-plano inferior é:

$$f_2(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}, \quad D_2 : \left(r > 0, \frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi\right).$$

Claramente, em $D_1 \cap D_2 : (r > 0, \pi/2 < \theta < \pi)$ (segundo e terceiro quadrantes), $f_1(z) = f_2(z)$. Uma continuação analítica de f_2 através do eixo real positivo e para o semi-plano superior pode ser definida então como

$$f_3(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}, \quad D_3 : \left(r > 0, \pi < \theta < \frac{5\pi}{2}\right).$$

Claramente, agora, em $D_2 \cap D_3 : (r > 0, \pi < \theta < 2\pi)$ (terceiro e quarto quadrantes), $f_3(z) = f_2(z)$, mas em $D_1 \cap D_3 : (r > 0, 0 < \theta < \pi/2)$ (primeiro quadrante), $f_3(z) \neq f_1(z)$; de fato, $f_3(z) = -f_1(z)$. Isto ocorre porque os três domínios circundam o ponto de ramificação na origem.

TEOREMAS DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Os seguintes teoremas, apresentados sem demonstração, mostram quais são as condições necessárias e suficientes para a existência e unicidade das continuações analíticas.

Teorema 6.28. Se uma função $f(z)$ é analítica em todo o domínio D e $f(z) = 0$ em todos os pontos de uma região $R \subset D$ ou de um arco C , interior a D , então $f(z) = 0$ em todos os pontos de D .

Observação. Este teorema é muito importante porque, em primeiro lugar, ele garante que todas as raízes de $f(z)$ são isoladas. Contudo, a sua importância aqui está no fato de que ele garante a unicidade das continuações analíticas. Sejam as funções $f_1(z)$ e $f_2(z)$ mencionadas na definição 6.1. Definindo-se agora a função $g(z) = f_1(z) - f_2(z)$ em $R = D_1 \cap D_2$, obviamente $g(z) = 0$ em R ; de onde se conclui que $g(z) = 0$ em todo o domínio $D_1 \cup D_2$. Segue então o seguinte teorema de unicidade.

Teorema 6.29. *Uma função $f(z)$ que é analítica em todo o domínio D é determinada de forma única sobre D pelos seus valores sobre uma região, ou ao longo de um arco, contidos no interior de D .*

Exemplo. A função inteira $f(z) = e^z$ é a única que pode assumir os valores de $f(x) = e^x$, ao longo do eixo real. Além disso, uma vez que e^{-z} também é inteira e $e^x e^{-x} = 1$ ($\forall x \in \mathbb{R}$), a função $h(x) = e^x e^{-x} - 1$ é nula sobre todo o eixo real e, portanto, a única função que representa a continuação analítica de $h(x)$ fora do eixo real é $h(z) = e^z e^{-z} - 1 = 0$. Segue então que a identidade $e^{-z} = 1/e^z$ é válida sobre todo o plano complexo.

Corolário. *Como corolário a este teorema, qualquer forma polinomial de funções $f_k(x)$ que satisfaça a identidade*

$$P[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)] = 0$$

tem a sua forma mantida,

$$P[f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)] = 0,$$

ao longo de todo o domínio D .

Exemplo. Dadas as funções trigonométricas $\sin x$ e $\cos x$, estas satisfazem a forma polinomial $\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$. Portanto, a identidade $\sin^2 z + \cos^2 z - 1 = 0$ é válida sobre todo o plano complexo.

Teorema 6.30 (Teorema da monodromia). *Se uma função $f_1(z)$, definida no domínio R_1 , é continuada analiticamente a uma região R_n ao longo de dois caminhos diferentes, então as duas continuações analíticas serão idênticas se não houver singularidades contidas entre os dois caminhos.*

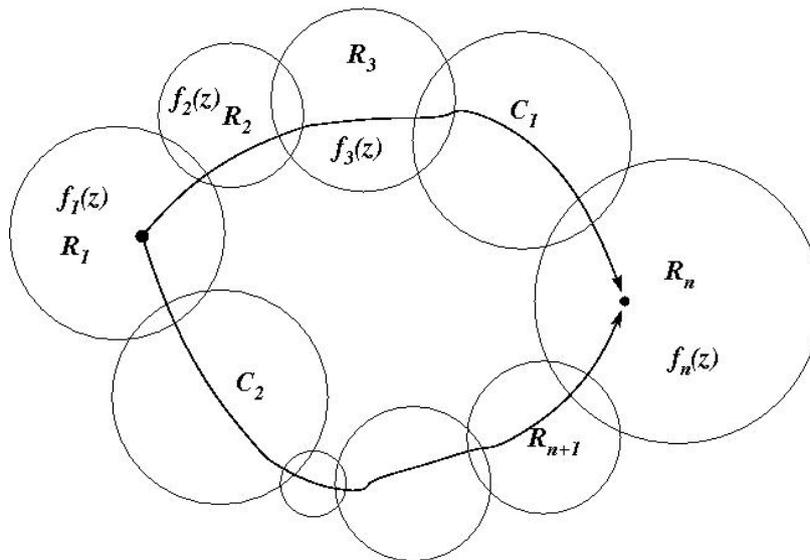


Figura 6.28: Continuação analítica da função $f_1(z)$ para a região R_n por dois caminhos distintos.

A propriedade descrita no teorema acima é ilustrada na figura 6.28, na qual um ponto na região R_1 é ligado a um outro ponto na região R_n por dois caminhos simples (C_1 e C_2) distintos. Os domínios $R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$ podem ser definidos pelos raios de convergência das séries de Taylor que representam a mesma função $f(z)$ em diferentes regiões do plano complexo. Se não houver pontos singulares na região interna aos círculos na figura 6.28, então a continuação analítica de $f(z)$ da região R_1 a R_n pelo caminho C_1 será equivalente à continuação analítica ao longo de C_2 . Portanto,

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & \text{em } R_1 \\ f_2(z), & \text{em } R_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(z), & \text{em } R_n \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

As funções $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots$ acima são denominadas os **elementos da função analítica completa** $f(z)$.

Exemplo 6.36. Considera-se a função $f_1(z)$ definida por

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots$$

Sabe-se que esta série de Taylor converge na região $R_1 : |z| < 1$ para a função $f(z) = 1/(1-z)$, cujo domínio é todo o plano complexo exceto o ponto $z = 1$. Como o domínio de $f(z)$ se intersecciona com o domínio de $f_1(z)$, esta última é a única continuação analítica de $f_1(z)$ possível para $|z| \geq 1$ (exceto $z = 1$). Outras possíveis continuações analíticas de $f(z)$ para a região à esquerda de $z = 1$ (ao longo do eixo real) são:

$$f_2(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{2}\right)^n \quad (\text{Região } R_2 : |z+1| < 2), \quad f_3(z) = \frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i}{1+i}\right)^n \quad (\text{Região } R_3 : |z+i| < 2).$$

A figura 6.29 ilustra estas três regiões.

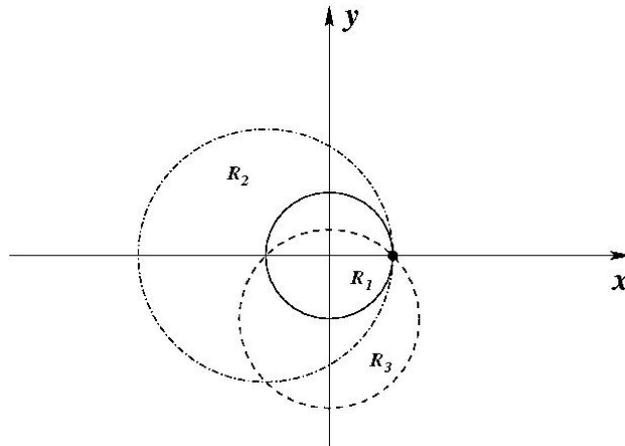


Figura 6.29: Domínios de $f(z) = (1-z)^{-1}$.

REFERÊNCIAS

- ABLOWITZ, Mark J.; FOKAS, Athanassios S. **Complex Variables. Introduction and Applications**. Second. New York: Cambridge, 2003. (Cambridge Texts in Applied Mathematics). 647 pp. ISBN 978-0-521-53429-1. Disponível em: <<http://www.cambridge.org/9780521534291>>.
- CHURCHILL, R. V.; BROWN, J. W.; VERHEY, R. F. **Complex Variables and Applications**. Third. New York: McGraw-Hill, 1976. 332 pp. ISBN 0070108552.
- EISBERG, R. M. **Introdução à Física Moderna**. [S.l.]: Guanabara Dois, 1979. 643 pp.