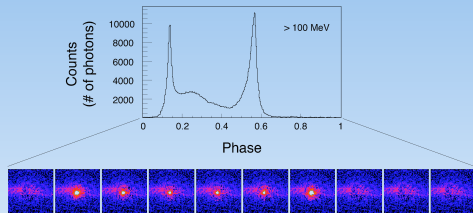
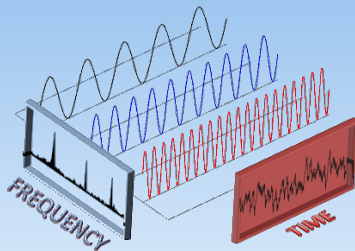


Aula TNI-01: TRANSFORMADAS DE FOURIER



Sumário da aula

1 Funções de uma variável

2 Campos no espaço Euclidiano de 3 dimensões

Outline

1 Funções de uma variável

2 Campos no espaço Euclidiano de 3 dimensões



Transformadas de Fourier: definições e teoremas básicos

TRANSFORMADA DE FOURIER

Seja $f(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ uma função absolutamente integrável em $(-\infty, \infty)$, a sua *transformada de Fourier*, denotada por $F(k) \equiv \mathcal{F}\{f(x)\} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ é definida pela integral

$$\mathcal{F}\{f(x)\} \equiv F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx, \quad (\text{TNI-1a})$$

sendo $k \in \mathbb{R}$.

TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER

Seja $F(k) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ a transformada de Fourier de $f(x)$, obtida por (TNI-1a). Então,

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(k)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk. \quad (\text{TNI-1b})$$

A operação $\mathcal{F}^{-1}\{F(k)\}$ é denominada a *transformação inversa de Fourier*.

INTEGRAÇÃO ABSOLUTA

Seja a função $f(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$. A função $f(x)$ é dita *absolutamente convergente* em $(-\infty, \infty)$ se existir a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

CONDIÇÕES DE DIRICHLET

Seja a função $f(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{R}$. A função $f(x)$ satisfaz as condições de Dirichlet no intervalo $-a < x < a$ se

- 1 $f(x)$ possuir somente um número finito de discontinuidades em $(-a, a)$.
- 2 $f(x)$ não possuir discontinuidades infinitas em $(-a, a)$.
- 3 $f(x)$ possuir um número finito de extremos em $(-a, a)$.

TEOREMA INTEGRAL DE FOURIER

Seja a função $f(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, que satisfaz as condições de Dirichlet em $(-\infty, \infty)$ e que é absolutamente integrável em $(-\infty, \infty)$. Então, se $f(x)$ possuir uma descontinuidade finita em x e sendo $f(x_{\pm}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x \pm \epsilon)$,

$$\frac{1}{2} [f(x_-) + f(x_+)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right] e^{ikx} dk. \quad (\text{TNI-2})$$

Propriedades básicas das transformadas de Fourier

Sejam $f(x), g(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ funções que satisfazem as condições impostas em (TNI-1a), $F(k) \equiv \mathcal{F}\{f(x)\}$ e $G(k) \equiv \mathcal{F}\{g(x)\}$ as suas respectivas transformadas de Fourier. Seja também $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$. Então, as seguintes propriedades são válidas:

$$\mathcal{F}\{af(x) + bg(x)\} = aF(k) + bG(k) \quad (\text{Linearidade}) \quad (\text{TNI-3a})$$

$$\mathcal{F}\{f(x - a)\} = e^{ika} F(k) \quad (\text{Deslocamento}) \quad (\text{TNI-3b})$$

$$\mathcal{F}\{f(ax \pm b)\} = \frac{1}{|a|} e^{\pm ibk/a} F\left(\frac{k}{a}\right), \quad (a \neq 0) \quad (\text{Escalonamento}) \quad (\text{TNI-3c})$$

$$\mathcal{F}\{\overline{f(-x)}\} = \overline{\mathcal{F}\{f(x)\}} \quad (\text{Conjugação}) \quad (\text{TNI-3d})$$

$$\mathcal{F}\{e^{iax} f(x)\} = F(k - a) \quad (\text{Translação}) \quad (\text{TNI-3e})$$

$$\mathcal{F}\{f(x) \cos ax\} = \frac{1}{2} [F(k - a) + F(k + a)] \quad (\text{Modulação}) \quad (\text{TNI-3f})$$

$$\mathcal{F}\{f(x) \sin ax\} = \frac{1}{2i} [F(k - a) - F(k + a)] \quad (\text{TNI-3g})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) G(\xi - x) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) g(k) e^{ikx} dk \quad (\text{Composição}) \quad (\text{TNI-3h})$$

$$\mathcal{F}\{F(x)\} = 2\pi f(-k) \quad (\text{TNI-3i})$$

Tabela de transformadas de Fourier e de transformadas de derivadas

TRANSFORMADAS DE DERIVADAS E INTEGRAIS; DERIVADAS DE TRANSFORMADAS

↪ Nas fórmulas abaixo, $f(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ é suposta contínua e absolutamente convergente, sendo $F(k) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ a sua transformada de Fourier. Supõe-se também que exista $f^{(n)}(x) = d^n f/dx^n$ ($n \geq 1$) e que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f^{(k)}(x) = 0$ ($k = 1, \dots, n-1$).

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = ik\mathcal{F}\{f(x)\} = ikF(k) \quad (\text{TNI-4a})$$

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(x)\} = (ik)^n F(k) \quad (\text{TNI-4b})$$

$$\mathcal{F}\{x^n f(x)\} = i^n \frac{d^n}{dk^n} F(k) \quad (\text{TNI-4c})$$

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^x f(y) dy\right\} = \frac{F(k)}{ik} + \pi F(0) \delta(k) \quad (\text{TNI-4d})$$

TABELA DE TRANSFORMADAS

$f(x)$	$F(k)$	
1	$2\pi\delta(k)$	(TNI-5a)
x^n	$2\pi i^n \delta^{(n)}(k)$	(TNI-5b)
$\delta(x-a)$	e^{-ika}	(TNI-5c)
$\delta^{(n)}(x-a)$	$(ik)^n e^{-ika}$	(TNI-5d)
$e^{-a x }, (a > 0)$	$\frac{2a}{a^2 + k^2}$	(TNI-5e)
$xe^{-a x }, (a > 0)$	$-\frac{4ika}{(a^2 + k^2)^2}$	(TNI-5f)
$(x^2 + a^2)^{-1}, (a > 0)$	$\frac{\pi}{a} e^{-a k }$	(TNI-5g)
$x(x^2 + a^2), (a > 0)$	$\frac{i\pi k}{2a} e^{-a k }$	(TNI-5h)
$e^{-ax^2}, (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-k^2/4a}$	(TNI-5i)

Teoremas fundamentais

Seja a função $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ contínua por partes e absolutamente integrável e $F(k)$ a sua transformada de Fourier. Então:

- 1 $F(k)$ é limitada em $-\infty < k < \infty$.
- 2 $F(k)$ é contínua em $-\infty < k < \infty$.

LEMA DE RIEMANN-LEBESGUE

Se $F(k) = \mathcal{F}\{f(x)\}$, então

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} |F(k)| = 0. \quad (\text{TNI-6})$$

CONVOLUÇÃO DE FUNÇÕES

A convolução das funções absolutamente integráveis $f(x)$ e $g(x)$, denotada por $(f * g)(x)$, é definida por

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi) g(\xi) d\xi, \quad (\text{TNI-7})$$

desde que a integral exista.

TEOREMA DA CONVOLUÇÃO

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ absolutamente integráveis e $F(k)$ e $G(k)$ suas respectivas transformadas de Fourier. Então,

$$\mathcal{F}\{(f * g)(x)\} = F(k) G(k). \quad (\text{TNI-8})$$

Demonstração: pelas definições (TNI-1a) e (TNI-7),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{(f * g)(x)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi) g(\xi) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi g(\xi) e^{-ik\xi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ik(x-\xi)} f(x - \xi)}_{\eta = x - \xi} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi g(\xi) e^{-ik\xi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\eta e^{-ik\eta} f(\eta)}_{F(k)} \\ &= F(k) G(k). \end{aligned}$$

O teorema de Parseval

Sejam $f(x), g(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ funções absolutamente integráveis e $F(k)$ e $G(k)$ suas respectivas transformadas de Fourier. Então,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \overline{G(k)} dk. \quad (\text{TNI-9})$$

Demonstração: de (TNI-1a) e (Física-Matemática, A.6h),

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \overline{G(k)} dk &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iky} dy \right] \left[\overline{\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ikx} dx} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \int_{-\infty}^{\infty} dx \overline{g(x)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-y)}}_{2\pi \delta(x-y)} \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \int_{-\infty}^{\infty} dx \overline{g(x)} \delta(x-y) \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \overline{g(x)}. \end{aligned}$$

A desigualdade de Heisenberg

A L^p -NORMA DE UMA FUNÇÃO

Seja uma função $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Se $|f(x)|^p$ ($p \in \mathbb{R}$) for absolutamente integrável, então o número $\|f\|_p \in \mathbb{R}$, denominado a L^p -norma de $f(x)$, existe e é definido por

$$\|f\|_p = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (\text{TNI-10})$$

A CLASSE $L^p(\mathbb{R})$ DE FUNÇÕES

É composta por todas as funções $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que possuem L^p -norma.

MÉDIAS PONDERADAS

Seja $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ e $F(k) \in L^2(\mathbb{R})$ sua transformada de Fourier. Então, as médias ponderadas $\langle x \rangle$ e $\langle k \rangle$ são definidas por

$$\langle x \rangle = \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} x |f(x)|^2 dx, \quad \langle k \rangle = \frac{1}{\|F\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} k |F(k)|^2 dk.$$

MEDIDAS DA LARGURA DA FUNÇÃO E SUA TRANSFORMADA

Sendo $\{f(x), F(k)\} \subset L^2(\mathbb{R})$ as suas larguras Δx e Δk , respectivamente, são medidas por

$$(\Delta x)^2 = \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 |f(x)|^2 dx,$$

$$(\Delta k)^2 = \frac{1}{\|F\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} (k - \langle k \rangle)^2 |F(k)|^2 dk.$$

A INEGUALDADE DE HEISENBERG

Se $\{f(x), xf(x), kF(k)\} \subset L^2(\mathbb{R})$ e

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \sqrt{x} |f(x)| = 0,$$

então

$$(\Delta x)(\Delta k) \geq \frac{1}{2}, \quad (\text{TNI-11})$$

sendo que $(\Delta x)(\Delta k) = \frac{1}{2}$ se $f(x) = Ce^{-ax^2}$ ($a > 0$).

Outline

1 Funções de uma variável

2 Campos no espaço Euclidiano de 3 dimensões

Transformação de Fourier espaço-temporal

Seja $\mathbb{E}^3$ o espaço vetorial Euclidiano de dimensão 3 e $\mathbf{r} \in \mathbb{E}^3$ um vetor deste espaço. Seja $\mathcal{R}^3$ o espaço vetorial real de dimensão 3 e $\mathbf{k} \in \mathcal{R}^3$ um vetor deste espaço. Finalmente, seja $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais e $\{t, \omega\} \subset \mathbb{R}$ elementos deste corpo.¹

Sejam as estruturas $\langle \mathbb{E}^3, \mathbb{R} \rangle$ e $\langle \mathcal{R}^3, \mathbb{R} \rangle$, com $(\mathbf{r}, t) \in \langle \mathbb{E}^3, \mathbb{R} \rangle$ e $(\mathbf{k}, \omega) \in \langle \mathcal{R}^3, \mathbb{R} \rangle$ elementos das mesmas.

Dados os campos escalares² $a(\mathbf{r}, t) : \langle \mathbb{E}^3, \mathbb{R} \rangle \mapsto \mathbb{R}$ (denotado *campo no espaço de configuração*) e $a(\mathbf{k}, \omega) : \langle \mathcal{R}^3, \mathbb{R} \rangle \mapsto \mathbb{C}$ (denotado *campo no espaço de Fourier*), a *transformação de Fourier espaço-temporal* de $a(\mathbf{r}, t)$ ao seu dual $a(\mathbf{k}, \omega)$ e a transformação inversa são dadas, respectivamente, por

$$a(\mathbf{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3r a(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (\text{TNI-12a})$$

$$a(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3k a(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}.$$

(TNI-12b)

¹Ver **Física-Matemática**, seção 3.7.1.2 e exemplos 4.3 e 4.5.

²Ver Ibid., definição 6.1.

³Ver Ibid., exemplo 4.4 e definição 6.2.

De forma simbólica, escreve-se

$a(\mathbf{k}, \omega) = \mathcal{F}\{a(\mathbf{r}, t)\}$, $a(\mathbf{r}, t) = \mathcal{F}^{-1}\{a(\mathbf{k}, \omega)\}$, chamando $a(\mathbf{k}, \omega)$ a *transformada de Fourier espaço-temporal* de $a(\mathbf{r}, t)$, enquanto que $a(\mathbf{r}, t)$ pode ser denominada a *transformada inversa* de $a(\mathbf{k}, \omega)$.

Sejam os campos vetoriais³ $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) : \langle \mathbb{E}^3, \mathbb{R} \rangle \mapsto \mathcal{R}^3$ e $\mathbf{a}(\mathbf{k}, \omega) : \langle \mathcal{R}^3, \mathbb{R} \rangle \mapsto \mathcal{C}^3$, com

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = (a_1(\mathbf{r}, t), a_2(\mathbf{r}, t), a_3(\mathbf{r}, t))$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{k}, \omega) = (a_1(\mathbf{k}, \omega), a_2(\mathbf{k}, \omega), a_3(\mathbf{k}, \omega)),$$

sendo $a_i(\mathbf{r}, t)$ ($i = 1, 2, 3$) campos escalares no espaço de configuração e $a_i(\mathbf{k}, \omega)$ campos no espaço de Fourier. Então, dadas as relações

$$a_i(\mathbf{k}, \omega) = \mathcal{F}\{a_i(\mathbf{r}, t)\}, \quad a_i(\mathbf{r}, t) = \mathcal{F}^{-1}\{a_i(\mathbf{k}, \omega)\},$$

para ($i = 1, 2, 3$), o campo $\mathbf{a}(\mathbf{k}, \omega) = \mathcal{F}\{\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)\}$ é a transformada de Fourier espaço-temporal de $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{a}(\mathbf{k}, \omega)\}$ e *vice-versa*.

Propriedades da transformação de Fourier espaço-temporal

➤ Sendo $\{\mathbf{r}, \mathbf{r}'\} \subset \mathbb{E}^3$, $\mathbf{k} \in \mathcal{R}^3$, $\{t, t', \alpha, \beta, \omega\} \subset \mathbb{R}$ e os campos $\{a(\mathbf{r}, t), b(\mathbf{r}, t)\} : \langle \mathbb{E}^3, \mathbb{R} \rangle \mapsto \mathbb{R}$ e $\{a(\mathbf{k}, \omega), b(\mathbf{k}, \omega)\} : \langle \mathcal{R}^3, \mathbb{R} \rangle \mapsto \mathbb{C}$, as seguintes propriedades existem:

$$\mathcal{F}\{\alpha a(\mathbf{r}, t) + \beta b(\mathbf{r}, t)\} = \alpha a(\mathbf{k}, \omega) + \beta b(\mathbf{k}, \omega) \quad (\text{Linearidade}) \quad (\text{TNI-13a})$$

$$\mathcal{F}\{a(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')\} = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - \omega t')} a(\mathbf{k}, \omega) \quad (\text{Translação}) \quad (\text{TNI-13b})$$

$$\mathcal{F}\{a(\alpha \mathbf{r}, \beta t)\} = \frac{1}{|\alpha^3 \beta|} a\left(\frac{\mathbf{k}}{\alpha}, \frac{\omega}{\beta}\right) \quad (\text{Escalonamento}) \quad (\text{TNI-13c})$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i} a(\mathbf{r}, t)\right\} = i k_i a(\mathbf{k}, \omega) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{TNI-13d})$$

$$\mathcal{F}\{\nabla a(\mathbf{r}, t)\} = i \mathbf{k} a(\mathbf{k}, \omega) \quad (\text{TNI-13e})$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial}{\partial t} a(\mathbf{r}, t)\right\} = -i \omega a(\mathbf{k}, \omega) \quad (\text{TNI-13f})$$

➤ De forma operacional, pode-se realizar as transformações de Fourier por meio das substituições

$$\nabla \longrightarrow i \mathbf{k}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow -i \omega. \quad (\text{TNI-13g})$$

TRANSFORMADA DE $\delta(\mathbf{r})$

➤ Dada a distribuição delta de Dirac $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$,⁴ a sua transformada de Fourier é dada por (TNI-12a), aplicada somente nas variáveis espaciais:

$$\mathcal{F}\{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\} = \int d^3 r e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'}. \quad (\text{TNI-14})$$

Assim, obtém-se as representações:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k e^{\pm i \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \quad (\text{TNI-15a})$$

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{\pm i \omega (t - t')}. \quad (\text{TNI-15b})$$

⁴Ver Física-Matemática, apêndice A.

O teorema da convolução no espaço-tempo (1)

↪ Considera-se a situação onde o campo $a(\mathbf{r}, t)$ é determinado por uma relação constitutiva com um outro campo $b(\mathbf{r}, t)$, por intermédio de um carço (Kernel) $K(\mathbf{r}, t)$ através da expressão

$$a(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d^3 r' K(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') b(\mathbf{r}', t'). \quad (\text{TNI-16})$$

↪ Os limites de integração são escolhidos de forma a satisfazer os princípios da causalidade e da relatividade restrita nos fenômenos físicos.

↪ Relações constitutivas do tipo (TNI-16) são típicas em meios homogêneos e estacionários, quando a resposta do meio aos campos é linear.

↪ O *teorema da convolução da transformação de Fourier espaço-temporal* mostra qual é a forma da relação constitutiva (TNI-16) no espaço de Fourier.

↪ De acordo com o teorema,

$$a(\mathbf{k}, \omega) = K(\mathbf{k}, \omega) b(\mathbf{k}, \omega), \quad (\text{TNI-17})$$

Demonstração: Aplicando a transformação (TNI-12a) sobre (TNI-16) e empregando (TNI-12b) em $b(\mathbf{r}, t)$,

$$\begin{aligned} a(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3 r e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \int_{-\infty}^t dt' \int d^3 r' K(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int d^3 k' b(\mathbf{k}', \omega') e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' - \omega' t')} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3 r \int_{-\infty}^t dt' \int d^3 r' K(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int d^3 k' b(\mathbf{k}', \omega') e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' - \omega' t')} \times \underbrace{e^{-i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega' t)} e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega' t)}}_{=1}, \end{aligned}$$

O teorema da convolução no espaço-tempo (2)

$$a(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3r \int_{-\infty}^t dt' \int d^3r' K(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int d^3k' b(\mathbf{k}', \omega') e^{-i[\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \omega'(t - t')]} e^{-i[(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r} - (\omega - \omega')t]}.$$

Realizando agora as seguintes trocas de variáveis de integração: $t' \rightarrow \tau = t - t'$ e $\mathbf{r}' \rightarrow \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, a expressão acima pode ser escrita

$$a(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int d^3k' b(\mathbf{k}', \omega') \int_0^{\infty} d\tau \int d^3\rho K(\boldsymbol{\rho}, \tau) e^{-i(\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega' \tau)} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3r e^{-i[(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r} - (\omega - \omega')t]}.$$

Definindo agora a transformada de Fourier do caroço como

$$K(\mathbf{k}, \omega) = \int_0^{\infty} d\tau \int d^3\rho K(\boldsymbol{\rho}, \tau) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega \tau)},$$

sendo que os limites de integração e a condição $K(\boldsymbol{\rho}, \tau) = 0$ para $\rho > c\tau$ são impostos para continuar satisfazendo os princípios acima aludidos.

Empregando finalmente as representações (TNI-15a,b) da delta de Dirac, resulta (TNI-17).