

## OSCILAÇÕES ACOPLADAS

QUANDO UM SISTEMA DE PARTÍCULAS é submetido a um agente externo cuja ação varia de forma harmônica tanto no espaço quanto no tempo, o movimento resultante das partículas é, na maior parte das situações, também um movimento harmônico. Quando a ordem de grandeza típica das forças internas do sistema for maior ou equivalente à ordem de grandeza das forças externas, a oscilação induzida em uma determinada partícula irá influenciar o movimento de suas vizinhas imediatas e, possivelmente, também o agente externo. As oscilações resultantes desta interação coletiva entre o sistema com o agente externo e entre as próprias partículas do sistema são denominadas **oscilações acopladas**.

Quando as oscilações acopladas do sistema são descritas em termos de **coordenadas normais**, as quais são definidas de tal forma que cada coordenada oscila com uma frequência única e característica, a oscilação do sistema pode ser descrita em termos de **modos normais de oscilação**, os quais consistem em frequências características de oscilação do sistema. Se as perturbações que agem sobre as partículas do sistema são tais que estas se deslocam ao longo de oscilações de pequena amplitude, em comparação com escalas típicas de distâncias entre as mesmas, então o movimento do sistema pode ser descrito como aquele resultante de uma coleção de osciladores harmônicos acoplados.

Os conceitos de oscilações acopladas e modos normais de oscilação são importantes em diversas áreas da física, tais como matéria condensada, teoria quântica de campos e o eletromagnetismo de fluidos ionizados.

### 4.1 OSCILAÇÕES DE PEQUENA AMPLITUDE EM SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE

Para iniciar a discussão, considera-se um sistema conservativo com um único grau de liberdade na coordenada  $q$ , cuja dinâmica é determinada pela Lagrangiana

$$L\{q, \dot{q}\} = \frac{1}{2}\alpha(q)\dot{q}^2 - U(q), \quad (4.1)$$

sendo  $\alpha(q) > 0$  uma função arbitrária de  $q$  e  $U(q)$  a função energia potencial do sistema. Esta Lagrangiana gera, de acordo com (1.42), a equação de movimento

$$\alpha\ddot{q} + \frac{1}{2}\alpha'\dot{q}^2 + \frac{\partial U}{\partial q} = 0, \quad \left(\alpha' = \frac{d\alpha}{dq}\right). \quad (4.2)$$

#### 4.1.1 CONFIGURAÇÕES DE EQUILÍBRIO E CRITÉRIO DE ESTABILIDADE

Para que o movimento do sistema descrito pela Lagrangiana (4.1) constitua-se em um movimento oscilatório, é necessário que exista pelo menos uma configuração de equilíbrio determinada pelo valor particular  $q = q^{(0)}$ , definido por

$$\left.\frac{dU}{dq}\right|_{q=q^{(0)}} = 0. \quad (4.3a)$$

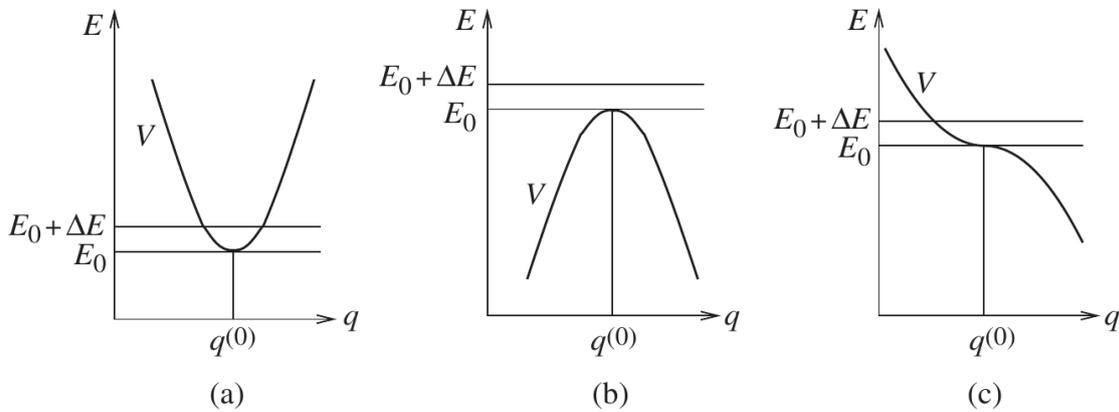
Neste caso, no instante em que o sistema se encontra no ponto de equilíbrio a equação de movimento se reduz a

$$\left( \alpha \ddot{q} + \frac{1}{2} \alpha' \dot{q}^2 \right) \Big|_{q=q^{(0)}} = 0.$$

Se, adicionalmente,  $\dot{q} = 0$  em  $q = q^{(0)}$ , então  $\ddot{q} = 0$  e o sistema irá se encontrar sempre em repouso.

Se a condição de existência da configuração de equilíbrio for satisfeita, então é possível que exista uma classe de soluções de (4.2) que consistem em oscilações com amplitudes finitas em torno de  $q^{(0)}$ . Contudo, para tanto existe uma condição adicional: o equilíbrio em  $q = q^{(0)}$  deve ser *estável*.

A figura 4.1 ilustra distintas configurações de equilíbrio para o sistema unidimensional descrito pela Lagrangiana (4.1). Somente no caso (a) o equilíbrio será estável, porque então pequenas perturbações em torno de  $q = q^{(0)}$  irão resultar em forças restauradoras que irão estabelecer oscilações de pequena amplitude em torno de  $q^{(0)}$ . Nos casos (b) e (c), uma perturbação, por menor que seja, irá resultar em uma divergência exponencial do sistema a partir do estado de equilíbrio.



**Figura 4.1:** Diferentes configurações de equilíbrio. Em (a) o equilíbrio é estável, mas em (b) e (c) o equilíbrio é instável.

Portanto, de acordo com a discussão acima, deve ser imposta a condição adicional

$$\frac{d^2U}{dq^2} \Big|_{q=q^{(0)}} > 0 \tag{4.3b}$$

para garantir a existência de oscilações de pequena amplitude para o sistema.

### 4.1.2 OSCILAÇÕES DE PEQUENA AMPLITUDE EM TORNO DO PONTO DE EQUILÍBRIO

Será assumido que o potencial do sistema satisfaz as condições (4.3a) e (4.3b). Deve existir então uma solução da equação de movimento (4.2) que corresponda a oscilações de pequena amplitude em torno de  $q = q^{(0)}$ . Escrevendo

$$q(t) = q^{(0)} + \eta(t), \quad \dot{q}(t) = \dot{\eta}(t),$$

sendo  $\eta = \eta(t)$  a parte da solução de (4.2) flutuante em torno de  $q^{(0)}$ , desenvolve-se tanto  $U(q)$  quanto  $\alpha(q)$  em séries de Taylor em torno de  $q = q^{(0)}$ , resultando

$$\begin{aligned} U(q) &= U(q^{(0)}) + \underbrace{\frac{dU}{dq} \Big|_{q=q^{(0)}}}_{(4.3a)} (q - q^{(0)}) + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dq^2} \Big|_{q=q^{(0)}} (q - q^{(0)})^2 + \dots \\ &= U(q^{(0)}) + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dq^2} \Big|_{q=q^{(0)}} \eta^2 + \dots, \end{aligned}$$

$$\alpha(q) = \alpha(q^{(0)}) + \left. \frac{d\alpha}{dq} \right|_{q=q^{(0)}} (q - q^{(0)}) + \dots = \alpha(q^{(0)}) + \left. \frac{d\alpha}{dq} \right|_{q=q^{(0)}} \eta + \dots$$

Como se deseja uma solução correspondente a oscilações de pequena amplitude, assume-se que  $|\eta(t)|$  seja sempre pequeno o suficiente para justificar o truncamento das séries acima, mantendo-se somente os primeiros termos. Este procedimento visa a linearização da equação (4.2), o que permite uma solução analítica simples. Com este intuito, serão mantidos somente os dois primeiros termos na série de  $U(q)$  e somente o primeiro termo na série de  $\alpha(q)$ , as quais ficam escritas

$$U(q) \approx U_0 + \frac{1}{2}k^{(0)}\eta^2, \quad \alpha(q) \approx \alpha^{(0)}, \text{ sendo}$$

$$U_0 \doteq U(q^{(0)}), \quad k^{(0)} \doteq \left. \frac{d^2U}{dq^2} \right|_{q=q^{(0)}} > 0, \quad \alpha^{(0)} \doteq \alpha(q^{(0)}).$$

Com as aproximações acima, a Lagrangiana (4.1) se reduz à Lagrangiana equivalente

$$L\{q, \dot{q}\} = \frac{1}{2}\alpha^{(0)}\dot{\eta}^2 - \frac{1}{2}k^{(0)}\eta^2,$$

a qual leva à equação de movimento de um oscilador harmônico

$$\ddot{\eta} + \omega^2\eta = 0, \text{ sendo } \omega = \sqrt{\frac{k^{(0)}}{\alpha^{(0)}}}. \quad (4.4)$$

Nesta equação,  $\omega$  é a frequência angular de oscilação, sendo que  $k^{(0)}$  corresponde a uma constante elástica, enquanto que  $\alpha^{(0)}$  desempenha um papel semelhante a uma “massa” do sistema.

**Exercício 4.1.** Uma conta de massa  $m$  desliza sem atrito ao longo de uma barra horizontal fixa. A conta está presa a uma mola com constante elástica  $k$  e comprimento natural  $\ell$  e sua outra extremidade está presa a uma distância vertical  $a$  do centro da barra. Esta situação é ilustrada na figura 4.2. Determine as posições de equilíbrio e determine a estabilidade das mesmas nos casos  $\ell > a$  e  $\ell < a$ .

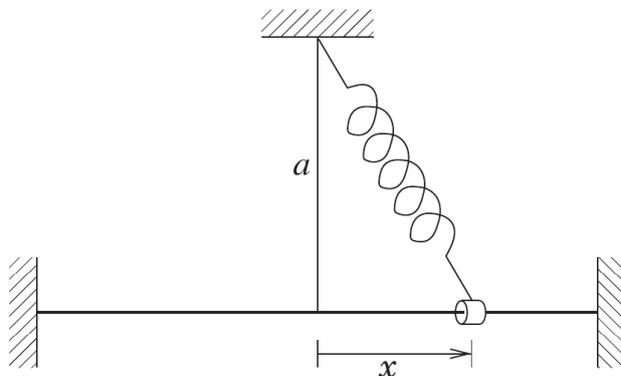


Figura 4.2: Sistema mecânico do exemplo 4.1.

**Resolução.** de acordo com o sistema de coordenadas ilustrado na figura, a Lagrangiana do sistema é

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k\left(\sqrt{a^2 + x^2} - \ell\right)^2.$$

As posições de equilíbrio são determinadas pelas soluções de:

$$U(x) = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{a^2 + x^2} - \ell\right)^2 \implies \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x_0} = k\left(\sqrt{a^2 + x_0^2} - \ell\right) \frac{x_0}{\sqrt{a^2 + x_0^2}} = 0.$$

Portanto, há três posições de equilíbrio:

$$x_{00} = 0, \quad x_{0\pm} = \pm\sqrt{\ell^2 - a^2}.$$

Nota-se que as posições  $x_{0\pm}$  correspondem a pontos equidistantes do centro da barra e que esta solução somente existe se  $a < \ell$ .

Para determinar a estabilidade dos pontos de equilíbrio, calcula-se o sinal de (4.3b) nos mesmos. Como

$$\frac{d^2U}{dx^2} = k \left[ 1 - \frac{\ell a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \right],$$

temos as situações: (i)  $a > \ell$ . Neste caso somente  $x = x_{00} = 0$  é ponto de equilíbrio e o mesmo é estável, pois

$$\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=0} = k \left( 1 - \frac{\ell}{a} \right) > 0.$$

De acordo com (4.4), a conta realiza oscilações de frequência

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} \left( 1 - \frac{\ell}{a} \right)}$$

em torno de  $x_{00}$ .

(ii)  $a < \ell$ . Neste caso, os três pontos de equilíbrio ( $x_{00}$ ,  $x_{0\pm}$ ) existem. Contudo, agora  $x = x_{00}$  é ponto de equilíbrio instável, ao passo que

$$\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_{0\pm}} = k \left( 1 - \frac{a^2}{\ell^2} \right) > 0.$$

Ou seja,  $x = x_{0\pm}$  são pontos de equilíbrio estáveis. A frequência das oscilações em torno destes pontos é

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} \left( 1 - \frac{a^2}{\ell^2} \right)}.$$

Por fim, é importante mencionar que se  $a = \ell$ , resulta  $x_{00} = x_{0\pm}$ , mas  $k^{(0)} = 0$ . Ou seja, a dinâmica do sistema não pode ser reproduzida por uma aproximação linear.

## 4.2 OSCILAÇÕES EM SISTEMAS COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE

Agora serão considerados sistemas cuja dinâmica é tal que a Lagrangiana pode ser escrita em termos de seus  $n$  graus de liberdade. Por exemplo, uma partícula se movimentando sob vínculos no espaço, ou um sistema com poucas partículas realizando o mesmo tipo de movimento. Posteriormente será considerado de forma explícita um sistema composto por um número arbitrário de partículas interagentes.

Com um número  $n > 1$  de graus de liberdade, o conceito de configuração de equilíbrio discutido na seção 4.1.1 nem sempre é o mais adequado. Em seu lugar, será introduzido o conceito de **movimento estacionário**, o qual ocorre quando o sistema de coordenadas adotado é tal que existe pelo menos uma coordenada não cíclica constante. O conceito de movimento estacionário será caracterizado com os exemplos a seguir.

**Exemplo 4.1 (Movimento planar sob força central).** Retornando aos exemplos 1.19 e 2.1, onde foram derivadas a Lagrangiana e a Hamiltoniana de uma partícula submetida a uma força conservativa central, sabe-se que a coordenada azimutal  $\varphi$  é cíclica, sendo sua equação de Euler-Lagrange

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2 \theta}, \quad (p_\varphi = \text{cte.})$$

e que a equação de movimento para a coordenada polar  $\theta$  admite uma solução constante  $\theta(t) = \frac{1}{2}\pi = \text{cte.}$ ; isto é, o movimento da partícula ocorre sempre sobre este plano. Neste caso, a Lagrangiana (1.66) se reduz a

$$L\{r, \dot{r}, \dot{\varphi}\} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r).$$

Neste caso, a equação para a coordenada radial fica

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + \frac{dU}{dr} = 0 \implies m\ddot{r} - \frac{p_\varphi^2}{mr^3} + \frac{dU}{dr} = 0.$$

Esta equação de movimento admite uma solução estacionária  $r = r_0 = \text{cte.}$  (órbita circular), desde que

$$\left. \frac{dU}{dr} \right|_{r=r_0} = \frac{p_\varphi^2}{mr_0^3}.$$

Este é um exemplo de movimento estacionário. No caso do potencial gravitacional,  $U = U_g = -A/r$ , sendo  $A = \text{cte.} > 0$ , temos  $r_0 = p_\varphi^2/mA$ .

**Exemplo 4.2 (Pêndulo esférico).** No exercício 2.4 foi obtida a Lagrangiana de um pêndulo esférico,

$$L\{\theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}\} = \frac{1}{2}m\ell^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + mg\ell \cos \theta.$$

A coordenada  $\varphi$  é cíclica, com equação de movimento  $\dot{\varphi} = p_\varphi/m\ell^2 \sin^2 \theta$  ( $p_\varphi = \text{cte.}$ ). Com isso, a equação para  $\theta$  fica escrita

$$\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0.$$

Esta equação admite uma solução estacionária  $\theta = \theta_0$ , onde

$$\cos \theta_0 = \frac{g}{\ell \dot{\varphi}^2}, \text{ desde que } |\dot{\varphi}| > \sqrt{\frac{g}{\ell}} \rightsquigarrow |p_\varphi| > \sqrt{m^2 \ell^3 g} \sin^2 \theta_0.$$

Em ambos os exemplos acima, os sistemas físicos são conservativos e as condições estabelecidas na seção 1.9.2.3 para que a função de Jacobi corresponda à energia mecânica são satisfeitas. Ou seja, energia mecânica pode ser identificada a partir da função  $h(q, \dot{q}, t)$ .

Os exemplos são também simples o suficiente para que exista somente um grau de liberdade associado à variável não cíclica e, neste caso, a energia mecânica pode ser escrita de uma maneira genérica como

$$E = \frac{1}{2}\alpha(q)\dot{q}^2 + U_{\text{ef}}(q),$$

sendo  $q$  a coordenada não cíclica e a função  $U_{\text{ef}}(q)$ , denominada **potencial efetivo**, é uma quantidade que tem dimensão de energia, contém a energia potencial do sistema, mas contém também termos adicionais que dependem da coordenada  $q$ . O potencial efetivo é obtido após a eliminação das coordenadas cíclicas em prol das demais. Para os exemplos discutidos,

$$U_{\text{ef}}(r) = \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + U(r) \quad (\text{força central})$$

$$U_{\text{ef}}(\theta) = \frac{p_\varphi^2}{2m\ell^2 \sin^2 \theta} - mg\ell \cos \theta \quad (\text{pêndulo esférico}).$$

Nestes casos, os movimentos estacionários obtidos consistem nas configurações de equilíbrio obtidas por

$$\left. \frac{d}{dq} U_{\text{ef}}(q) \right|_{q^{(0)}} = 0,$$

sendo que essas configurações de equilíbrio novamente serão estáveis se  $U_{\text{ef}}''(q^{(0)}) > 0$ .

**Exercício 4.2.** Investigue a existência e a estabilidade do movimento estacionário planar de um sistema planetário.

**Resolução.** Dada a Lagrangiana obtida no exemplo 4.1, para um sistema planetário  $U(r) = -A/r$ , sendo  $A = GmM > 0$  ( $G$ : constante gravitacional,  $m$ : massa do planeta,  $M$ : massa da estrela). Então, o potencial efetivo e a configuração de equilíbrio resultante são:

$$U_{\text{ef}}(r) = \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - \frac{A}{r} \implies \left. \frac{d}{dr} U_{\text{ef}}(r) \right|_{r_0} = -\frac{p_\varphi^2}{mr_0^3} + \frac{A}{r_0^2} = 0 \implies r_0 = \frac{p_\varphi^2}{mA},$$

o qual é justamente a órbita circular obtida no exemplo.

Por sua vez, o critério de estabilidade permite concluir:

$$U_{\text{ef}}''(r_0) = \frac{3p_\varphi^2}{mr_0^4} - \frac{2A}{r_0^3} = \frac{A}{r_0^3} > 0.$$

Ou seja, uma órbita circular é estável frente a pequenas oscilações. De acordo com (4.4), qualquer pequena perturbação aplicada a uma órbita circular irá gerar um movimento harmônico em torno da mesma com frequência angular

$$\omega = \sqrt{\frac{A}{mr_0^3}} = \sqrt{\frac{GM}{r_0^3}}.$$

Nota-se como essa frequência se reduz com o raio da órbita por um fator  $\omega \propto r_0^{-3/2}$ .

**Exercício 4.3.** Investigue a existência e a estabilidade do movimento estacionário de um pêndulo esférico.

*Resolução.* Agora, a Lagrangiana do exemplo 4.2 e o potencial efetivo associado resultam em:

$$\left. \frac{d}{d\theta} U_{\text{ef}}(\theta) \right|_{\theta_0} = -\frac{p_\varphi^2 \cos \theta_0}{m\ell^2 \sin^3 \theta_0} + mgl \sin \theta_0 = 0 \xrightarrow{p_\varphi = \dot{\varphi} m \ell^2 \sin^2 \theta} \cos \theta_0 = \frac{g}{\ell \dot{\varphi}^2}, \quad (4.5)$$

como já havia sido obtido e a estabilidade desse ângulo frente a pequenas perturbações resulta

$$U_{\text{ef}}''(\theta_0) = \frac{p_\varphi^2}{m\ell^2 \sin^2 \theta_0} + \frac{3p_\varphi^2 \cos^2 \theta_0}{m\ell^2 \sin^4 \theta_0} + mgl \cos \theta_0 = \frac{mgl}{\cos \theta_0} (1 + 3 \cos^2 \theta_0) > 0,$$

onde foi empregado (4.5). Ou seja, o movimento é estável. Pequenas perturbações em torno de  $\theta_0$  terão a frequência angular

$$\omega = \sqrt{\frac{1 + 3 \cos^2 \theta_0}{\cos \theta_0} \frac{g}{\ell}}.$$

### 4.3 OSCILAÇÕES ACOPLADAS DE PEQUENA AMPLITUDE

Considera-se agora um sistema conservativo de partículas interagentes em uma situação onde há  $n$  graus de liberdade, com todos os vínculos holônomos. Generalizando a discussão realizada nas seções anteriores, supõe-se que a Lagrangiana para esse sistema possa ser escrita na forma

$$L\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\} = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^n M_{k\ell}(\mathbf{q}) \dot{q}_k \dot{q}_\ell - U(\mathbf{q}), \quad (4.6)$$

onde o potencial  $U(\mathbf{q})$  pode ser um potencial efetivo, obtido após a eliminação das coordenadas cíclicas, e as funções  $M_{k\ell}(\mathbf{q})$  são supostas ser exatamente as expressões obtidas em (1.73), segundo as quais a matriz  $\mathbf{M} = [M_{k\ell}]$  é simétrica ( $M_{k\ell} = M_{\ell k}$ ). Nesta hipótese, a energia cinética não possui contribuições de ordem zero ou de primeira ordem nas velocidades generalizadas.

Supõe-se que esta Lagrangiana admite configurações de equilíbrio  $\mathbf{q}^{(0)} = (q_1^{(0)}, \dots, q_n^{(0)})$ , determinadas pelas soluções das equações

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q_k} \right|_{\mathbf{q}^{(0)}} = 0, \quad (k = 1, \dots, n). \quad (4.7a)$$

Assumindo então que uma pequena perturbação é aplicada ao sistema inicialmente na configuração de equilíbrio, escreve-se

$$q_k = q_k^{(0)} + \eta_k, \quad (k = 1, \dots, n),$$

onde os  $|\eta_k|$  são supostos “suficientemente pequenos” para que o desenvolvimento em série abaixo,

$$U(\mathbf{q}) = U(\mathbf{q}^{(0)}) + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial U}{\partial q_k} \Big|_{\mathbf{q}^{(0)}} \right) \eta_k + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^n \left( \frac{\partial^2 U}{\partial q_k \partial q_\ell} \Big|_{\mathbf{q}^{(0)}} \right) \eta_k \eta_\ell + \dots \approx U_0 + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^n U_{k\ell} \eta_k \eta_\ell$$

possa ser aproximado conforme ilustrado, sendo  $U_0 \doteq U(\mathbf{q}^{(0)})$  e

$$U_{k\ell} \doteq \frac{\partial^2 U}{\partial q_k \partial q_\ell} \Big|_{\mathbf{q}^{(0)}}, \quad (k, \ell = 1, \dots, n), \quad (4.7b)$$

sendo que  $U = [U_{k\ell}]$  (a **matriz potencial**) é suposta não nula e simétrica ( $U_{k\ell} = U_{\ell k}$ ).

Neste ponto, será também suposto que existe pelo menos um subconjunto das possíveis configurações de equilíbrio que são estáveis frente a essas perturbações. A condição necessária e suficiente para tanto pode ser obtida considerando-se o fato do sistema ser conservativo. Com isso, a integral de Jacobi (1.70) fica dada por

$$h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = E = U_0 + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^n M_{k\ell} \dot{\eta}_k \dot{\eta}_\ell + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^n U_{k\ell} \eta_k \eta_\ell.$$

Para que a perturbação produza oscilações de pequena amplitude em torno da configuração de equilíbrio, é necessário que tanto o termo cinético quanto o potencial permaneçam limitados. Como a energia cinética é sempre positivo-definida e a energia mecânica deve ser conservada, isto implica que o termo potencial também deve ser positivo-definido, de tal forma que possa existir uma configuração instantânea onde a energia potencial é máxima e a energia cinética é mínima, com pelo menos parte das velocidades generalizadas sendo nulas em algum instante de tempo. Em outras palavras, o último termo na integral de Jacobi deve gerar uma barreira de potencial em um espaço de configuração  $n$ -dimensional. Assim, a condição necessária e suficiente para que uma configuração de equilíbrio seja estável é

$$\sum_{k,\ell=1}^n U_{k\ell} \eta_k(t) \eta_\ell(t) \geq 0, \text{ para todo } t \geq 0. \quad (4.7c)$$

Desenvolvendo também a matriz  $M$  em torno de  $\mathbf{q}^{(0)}$  e realizando uma aproximação equivalente na energia cinética, obtém-se

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^n M_{k\ell}(\mathbf{q}) \dot{q}_k \dot{q}_\ell = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^n \left[ T_{k\ell} + \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial M_{k\ell}}{\partial q_j} \Big|_{\mathbf{q}^{(0)}} \right) \eta_j + \dots \right] \dot{\eta}_k \dot{\eta}_\ell \approx \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^n T_{k\ell} \dot{\eta}_k \dot{\eta}_\ell, \quad (4.7d)$$

com

$$T_{k\ell} \doteq M_{k\ell}(\mathbf{q}^{(0)}), \quad (k, \ell = 1, \dots, n), \quad (4.7e)$$

sendo  $T = [T_{k\ell}]$  a **matriz cinética**.

Por meio deste procedimento, obtém-se a forma aproximada da Lagrangiana (4.6), escrita como

$$L\{\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}\} = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^n T_{k\ell} \dot{\eta}_k \dot{\eta}_\ell - \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^n U_{k\ell} \eta_k \eta_\ell, \quad (4.8a)$$

ou, na forma matricial, como

$$L = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{T} \dot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{U} \boldsymbol{\eta}, \quad (4.8b)$$

sendo  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_n)^T$  a matriz coluna que contém os valores instantâneos das coordenadas generalizadas.

As equações de Euler-Lagrange para esta Lagrangiana são

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_j} - \frac{\partial L}{\partial \eta_j} = 0, \quad (j = 1, \dots, n).$$

Mas,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial L}{\partial \eta_j} &= \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^n \left( U_{k\ell} \underbrace{\frac{\partial \eta_k}{\partial \eta_j}}_{\delta_{kj}} \eta_\ell + U_{k\ell} \eta_k \underbrace{\frac{\partial \eta_\ell}{\partial \eta_j}}_{\delta_{\ell j}} \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^n U_{kj} \eta_k + \sum_{\ell=1}^n U_{j\ell} \eta_\ell \right) \xrightarrow{U_{jk}=U_{kj}} \sum_{k=1}^n U_{kj} \eta_k \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_j} &= \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^n \left( T_{k\ell} \frac{\partial \dot{\eta}_k}{\partial \dot{\eta}_j} \dot{\eta}_\ell + T_{k\ell} \dot{\eta}_k \frac{\partial \dot{\eta}_\ell}{\partial \dot{\eta}_j} \right) = \sum_{k=1}^n T_{kj} \dot{\eta}_k, \end{aligned}$$

de onde resultam as equações de movimento

$$\sum_{k=1}^n T_{jk} \dot{\eta}_k + \sum_{k=1}^n U_{jk} \eta_k = 0, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (4.9)$$

Este sistema de equações descreve as oscilações de  $n$  osciladores acoplados. Na próxima seção será realizada uma solução deste sistema de equações de movimento.

### 4.3.1 OSCILAÇÕES ACOPLADAS: MODOS NORMAIS DE VIBRAÇÃO

Será descrito agora um método geral de soluções das equações de movimento (4.9). Outros métodos de solução, relacionados a este, serão descritos em seções posteriores.

Como as soluções esperadas de (4.9) são do tipo oscilador harmônico, as funções  $\eta_k = \eta_k(t)$  ( $k = 1, \dots, n$ ) devem ser funções periódicas no tempo. Com base nesta hipótese, é conveniente então representar as soluções de (4.9) em termos de séries de Fourier; ou seja, supõe-se que

$$\eta_k(t) = \sum_{s \rightarrow -\infty}^{\infty} \bar{\eta}_{ks} e^{i\omega_s t}, \quad (4.10a)$$

onde as quantidades  $\bar{\eta}_{ks}$  ( $k = 1, \dots, n$ ;  $-\infty < s < \infty$ ) e  $\omega_s$  podem ser complexas, mas que estão sujeitas à *condição de realidade*

$$\eta_k^*(t) = \eta_k(t), \quad (4.10b)$$

onde  $z^* = \text{Re } z - i \text{Im } z$  é a operação de conjugação complexa.

Se as soluções do sistema (4.9) podem ser expressas pelas séries (4.10a), então, primeiro derivando,

$$\dot{\eta}_k(t) = - \sum_{s \rightarrow -\infty}^{\infty} \omega_s^2 \bar{\eta}_{ks} e^{i\omega_s t}$$

e depois introduzindo estas séries em (4.9), as mesmas podem ser escritas,

$$\sum_{s \rightarrow -\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=1}^n (U_{jk} - \omega_s^2 T_{jk}) \bar{\eta}_{ks} \right] e^{i\omega_s t} = 0,$$

sendo que as somas podem ser permutadas porque as equações são lineares.

Como as equações resultantes devem ser satisfeitas em qualquer instante de tempo, dado um conjunto de frequências angulares  $\{\omega_s\}$  ainda não determinado, resulta que, necessariamente,

$$\sum_{k=1}^n (U_{jk} - \omega_s^2 T_{jk}) \bar{\eta}_{ks} = 0, \quad (j = 1, \dots, n; -\infty < s < \infty). \quad (4.11a)$$

Além disso, o conjunto das amplitudes  $\{\bar{\eta}_{ks}\}$  também é indeterminado, mas não pode ser vazio; caso contrário a solução seria trivial. Por isso, interpretando-se as expressões acima como um conjunto linear de equações para as amplitudes, as suas soluções somente serão não triviais se

$$\det(U - \omega^2 T) = 0, \quad (4.11b)$$

sendo U e T respectivamente as matrizes potencial e simétrica, dadas por (4.7b) e (4.7e).

Como U e T são ambas matrizes  $n \times n$ , o desenvolvimento do determinante em (4.11b) resulta em uma *equação característica* do tipo

$$\alpha_n (\omega^2)^n + \alpha_{n-1} (\omega^2)^{n-1} + \dots + \alpha_1 (\omega^2) + \alpha_0 = 0, \quad (4.11c)$$

a qual é um polinômio de grau  $n$  para  $\omega^2$ . Em consequência, existem, no máximo,  $n$  valores possíveis para  $\omega_s^2$  em (4.10a), o que implica no truncamento da série de Fourier para  $|s| > n$ . Além disso, como as raízes de (4.11c) são

$$\omega^2 = \omega_s^2, \text{ resulta então que } \omega = \pm \omega_s;$$

ou seja, as quantidades  $\omega_s$ , denominadas **frequências características** ou **autofrequências**, ocorrem sempre aos pares. Por isso, o termo  $n = 0$  em (4.10a) também é nulo.<sup>1</sup> Na seção 4.3.3 será mostrado que as autofrequências são sempre reais e positivas.

Portanto, as soluções das equações de movimento (4.9) devem ser escritas como

$$\eta_k(t) = \sum_{\substack{s=-n \\ (n \neq 0)}}^n \bar{\eta}_{ks} e^{i\omega_s t}, \quad (k = 1, \dots, n),$$

<sup>1</sup>Na verdade, é possível que exista um sistema para o qual  $\omega_0 \neq 0$ , mas, neste caso, o termo  $n = 0$  não estará associado a um modo de oscilação do sistema.

onde, necessariamente,  $\omega_{-s} = -\omega_s$ . Impondo-se agora a condição de realidade (4.10b) a essas soluções, resulta

$$\eta_k(t) = \eta_k^*(t) \implies \sum_{s=-n}^n \bar{\eta}_{ks} e^{i\omega_s t} = \sum_{s=-n}^n \bar{\eta}_{ks}^* e^{-i\omega_s^* t} \xrightarrow{s \rightarrow -s} \sum_{s=-n}^n \bar{\eta}_{k(-s)}^* e^{-i\omega_{-s}^* t},$$

o que permite estabelecer as seguintes relações,

$$\bar{\eta}_{ks} = \bar{\eta}_{k(-s)}^*, \quad \omega_s = -\omega_{-s}^*.$$

Como  $\omega_{-s} = -\omega_s$ , a condição de realidade sobre as autofrequências implica que  $-\omega_{-s}^* = \omega_s^* = \omega_s$ ; ou seja, as autofrequências são reais.

Com as relações acima, pode-se manipular  $\eta_k(t)$  da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \eta_k(t) &= \sum_{s=1}^n \bar{\eta}_{ks} e^{i\omega_s t} + \underbrace{\sum_{s=-1}^{-n} \bar{\eta}_{ks} e^{i\omega_s t}}_{s \rightarrow -s} \\ &= \sum_{s=1}^n (\bar{\eta}_{ks} e^{i\omega_s t} + \bar{\eta}_{k(-s)} e^{i\omega_{-s} t}), \\ \eta_k(t) &= \sum_{s=1}^n (\bar{\eta}_{ks} e^{i\omega_s t} + \bar{\eta}_{ks}^* e^{-i\omega_s t}). \end{aligned}$$

Como as amplitudes  $\bar{\eta}_{ks}$  ainda estão indeterminadas, pode-se escrever, sem perda de generalidade,

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_{ks} &= \frac{1}{2} c_s \rho_{ks}, \quad (k, s = -n, \dots, n), \text{ onde} \\ c_s &= \bar{c}_s e^{i\phi_s}, \quad (\rho_{ks}, \bar{c}_s, \phi_s \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

sendo as quantidades  $\{\bar{c}_s\}$  e  $\{\phi_s\}$  determinadas pelas condições iniciais do sistema. Já as quantidades  $\{\rho_{ks}\}$  são organizadas na forma de matrizes-coluna

$$\rho_s \doteq \begin{pmatrix} \rho_{1s} \\ \rho_{2s} \\ \vdots \\ \rho_{ns} \end{pmatrix}, \quad (s = 1, \dots, n), \quad (4.12a)$$

denominadas de **vetores característicos** ou **autovetores**. Os vetores característicos são determinados quando as expressões das amplitudes  $\bar{\eta}_{ks}$  em termos dos mesmos são introduzidas de volta nas equações (4.11a), as quais se tornam

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (U_{jk} - \omega_s^2 T_{jk}) \rho_{ks} &= 0, \quad (j, s = 1, \dots, n); \text{ ou,} \\ (U - \omega_s^2 T) \rho_s &= 0, \quad (s = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (4.12b)$$

Ou seja, uma vez determinadas as autofrequências como as soluções da equação característica (4.11c), para cada  $\omega_s$  resulta um vetor característico  $\rho_s$ .

Em outras palavras, o problema da determinação das frequências e vetores característicos é equivalente à solução de um problema de autovalores envolvendo as matrizes U e T. Como o sistema (4.12b), é subdeterminado, os autovetores sempre resultam com uma última constante indeterminada. Mas, como as soluções ainda dependem das condições iniciais, estas constantes podem ser absorvidas dentro do conjunto  $\{\bar{c}_s\}$ .

Com as definições recém realizadas, as soluções das equações de movimento podem ser escritas como

$$\eta_k(t) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \bar{c}_s (\rho_{ks} e^{i\omega_s t} e^{i\phi_s} + \rho_{ks} e^{-i\omega_s t} e^{-i\phi_s}) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \bar{c}_s \rho_{ks} e^{i\omega_s t} e^{i\phi_s} + \text{C.C.},$$

onde C.C. significa “complexo conjugado”. Organizando as soluções  $\eta_k(t)$  também na forma de uma matriz coluna  $\eta(t) \doteq (\eta_1 \ \eta_2 \ \cdots \ \eta_k)^T$ , pode-se escrever

$$\eta(t) = \sum_{s=1}^n \left( \frac{1}{2} \bar{c}_s e^{i\phi_s} \right) \rho_s e^{i\omega_s t} = \sum_{s=1}^n \left( \frac{1}{2} \bar{c}_s e^{i\phi_s} \right) \zeta_s(t),$$

onde o termo complexo conjugado não foi escrito. Esta expressão é interpretada da seguinte maneira. Em um determinado instante  $t$ , o vetor  $\eta(t)$  com as soluções de (4.9) é sempre determinado por uma combinação linear (dependente das condições iniciais) dos diversos **modos normais de oscilação** ou **vibração** do sistema, dados por

$$\zeta_s(t) \doteq \rho_s e^{i\omega_s t}, \quad (s = 1, \dots, n).$$

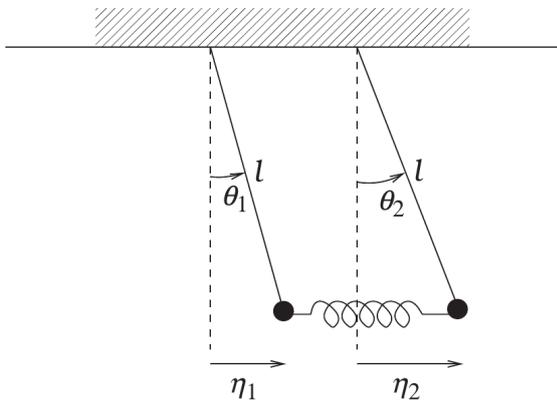
Finalmente, com os desenvolvimentos realizados acima, as soluções de (4.9) podem ser escritas como

$$\eta_k(t) = \sum_{s=1}^n \bar{c}_s \rho_{ks} \cos(\omega_s t + \phi_s), \quad (k = 1, \dots, n), \quad (4.13)$$

sendo que as frequências características  $\{\omega_s\}$  ( $s = 1, \dots, n$ ) são determinadas pelas raízes de (4.11c), enquanto que os vetores característicos  $\{\rho_s\}$  são determinados por (4.12b). Finalmente, as quantidades  $\{\bar{c}_s\}$  e  $\{\phi_s\}$  são determinadas pelas condições iniciais impostas ao sistema.

Alguns exemplos de aplicação deste formalismo serão agora discutidos.

**Exercício 4.4 (Pêndulos acoplados).** A figura 4.3 mostra dois pêndulos idênticos acoplados por uma mola com constante elástica  $\kappa$ . Assumindo oscilações de pequena amplitude, determine os modos normais de vibração e as soluções das equações de movimento se, no instante  $t = 0$ , ambos os pêndulos partem do repouso, com um destes deslocado da posição de equilíbrio por uma quantidade  $0 < a \ll 1$ .



**Figura 4.3:** Dois pêndulos idênticos acoplados por uma mola com constante elástica  $\kappa$ .

**Resolução.** A configuração de equilíbrio para este sistema obviamente corresponde a  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ . Como as oscilações são supostas de pequena amplitude, pode-se desprezar o movimento vertical dos mesmos para o termo cinético, considerando somente o movimento horizontal. Se no equilíbrio a separação entre os pêndulos é  $d_0$ , então,

$$x_1(t) = \eta_1(t) = \ell \sin \theta_1(t) \approx \ell \theta_1(t), \quad x_2(t) = d_0 + \eta_2(t), \quad \eta_2(t) = \ell \sin \theta_2(t) \approx \ell \theta_2(t).$$

Com isso, a energia cinética do sistema fica

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \approx \frac{1}{2} m (\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2).$$

Para a energia potencial, é necessário considerar o deslocamento vertical dos pêndulos para o cômputo da energia potencial gravitacional. Já para a energia potencial elástica, que depende do deslocamento relativo dos pêndulos em relação à distância  $d_0$ , pode-se considerar somente o deslocamento horizontal. Escreve-se então

$$U = mg\ell [(1 - \cos \theta_1) + (1 - \cos \theta_2)] + \frac{1}{2} \kappa (x_2 - x_1 - d_0)^2$$

$$\approx \frac{mg}{2\ell} (\eta_1^2 + \eta_2^2) + \frac{1}{2}\kappa (\eta_2 - \eta_1)^2.$$

Desta maneira, a Lagrangiana do sistema fica

$$L = \frac{1}{2}m (\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2) - \left[ \frac{mg}{2\ell} (\eta_1^2 + \eta_2^2) + \frac{1}{2}\kappa (\eta_2 - \eta_1)^2 \right].$$

Comparando a mesma com a forma genérica (4.8a), identificam-se as matrizes cinética e potencial como

$$T = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \frac{mg}{\ell} + \kappa & -\kappa \\ -\kappa & \frac{mg}{\ell} + \kappa \end{pmatrix}.$$

Com estas matrizes, a equação característica (4.11b) fornece as autofrequências

$$\det \begin{pmatrix} \frac{mg}{\ell} + \kappa - m\omega^2 & -\kappa \\ -\kappa & \frac{mg}{\ell} + \kappa - m\omega^2 \end{pmatrix} = 0 \implies \left( \frac{mg}{\ell} + \kappa - m\omega^2 \right)^2 - \kappa^2 = 0 \implies \omega_{\pm}^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{\kappa \pm \kappa}{m}.$$

Ou seja, as autofrequências são

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2\kappa}{m}}.$$

Para cada autofrequência, os vetores característicos são dados por (4.12b). Ou seja,

$$\begin{aligned} (U - \omega_1^2 T) \rho_1 = 0 &\implies \begin{pmatrix} \frac{mg}{\ell} + \kappa - m\omega_1^2 & -\kappa \\ -\kappa & \frac{mg}{\ell} + \kappa - m\omega_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11} \\ \rho_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa & -\kappa \\ -\kappa & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11} \\ \rho_{21} \end{pmatrix} = 0 \\ &\implies \rho_{11} = \rho_{21} \implies \rho_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \bar{c}_1} \boxed{\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \\ (U - \omega_2^2 T) \rho_2 = 0 &\implies \begin{pmatrix} \frac{mg}{\ell} + \kappa - m\omega_2^2 & -\kappa \\ -\kappa & \frac{mg}{\ell} + \kappa - m\omega_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{12} \\ \rho_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa & -\kappa \\ -\kappa & -\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{12} \\ \rho_{22} \end{pmatrix} = 0 \\ &\implies \rho_{12} = -\rho_{22} \implies \rho_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\beta \rightarrow \bar{c}_2} \boxed{\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

De acordo com as autofrequências obtidas ( $\omega_{1,2}$ ) e os vetores característicos associados ( $\rho_{1,2}$ ), os modos normais de vibração do sistema são

$$\zeta_1(t) = \rho_1 e^{i\omega_1 t}, \quad \zeta_2(t) = \rho_2 e^{i\omega_2 t}.$$

O modo normal com frequência  $\omega_1 = \sqrt{g/\ell}$  corresponde à oscilação em fase dos dois pêndulos, separados sempre pela distância de equilíbrio da mola  $d_0$ , conforme é ilustrado na figura 4.4(esquerda). Já o modo com frequência  $\omega_2 = \sqrt{g/\ell + 2\kappa/m}$  corresponde a uma oscilação em oposição de fase, com um dos pêndulos se deslocando sempre o oposto do outro. Este comportamento é devido aos valores dos componentes do vetor característico:  $\rho_{21} = -\rho_{22}$  e está ilustrado na figura 4.4(direita). O movimento geral do sistema será, portanto, uma combinação linear de ambos os modos normais, dependente das condições iniciais.

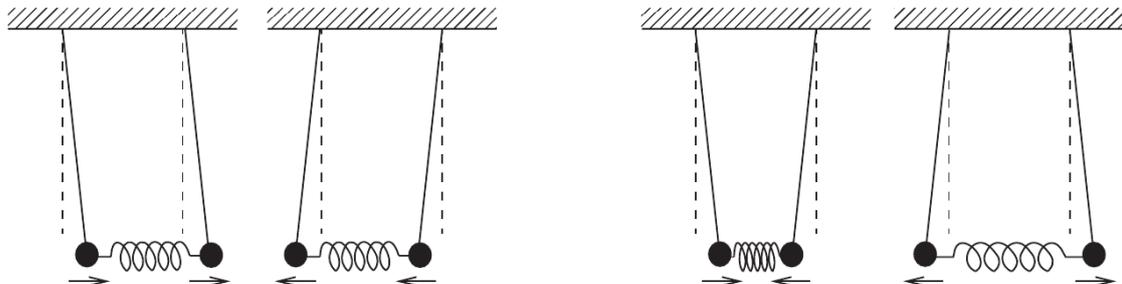


Figura 4.4: Modos normais de vibração para dois pêndulos acoplados por uma mola.

Com os resultados obtidos, de (4.13) conclui-se as soluções gerais são:

$$\eta_1(t) = \bar{c}_1 \rho_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \bar{c}_2 \rho_{12} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$\eta_2(t) = \bar{c}_1 \rho_{21} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \bar{c}_2 \rho_{22} \cos(\omega_2 t + \phi_2).$$

Dadas as condições iniciais

$$\eta_1(0) = 0, \quad \eta_2(0) = a, \quad \dot{\eta}_1(0) = \dot{\eta}_2(0) = 0,$$

resulta o sistema

$$\begin{aligned} \eta_1(0) &= \bar{c}_1 \cos \phi_1 + \bar{c}_2 \cos \phi_2 = 0 \\ \eta_2(0) &= \bar{c}_1 \cos \phi_1 - \bar{c}_2 \cos \phi_2 = a \\ \dot{\eta}_1(0) &= -\omega_1 \bar{c}_1 \sin \phi_1 - \omega_2 \bar{c}_2 \sin \phi_2 = 0 \\ \dot{\eta}_2(0) &= -\omega_1 \bar{c}_1 \sin \phi_1 + \omega_2 \bar{c}_2 \sin \phi_2 = 0. \end{aligned}$$

Somando-se as duas primeiras e as duas últimas, resultam

$$\bar{c}_1 \cos \phi_1 - \bar{c}_2 \cos \phi_2 = \frac{a}{2}, \quad \bar{c}_1 \sin \phi_1 = \bar{c}_2 \sin \phi_2 = 0.$$

Estas equações são satisfeitas se

$$\phi_1 = \phi_2 = 0, \quad \bar{c}_1 = -\bar{c}_2 = \frac{a}{2}.$$

Portanto, resulta finalmente

$$\begin{aligned} \eta_1(t) &= \frac{a}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = a \operatorname{sen} \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \\ \eta_2(t) &= \frac{a}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = a \operatorname{cos} \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \operatorname{cos} \left( \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right). \end{aligned}$$

A figura 4.5 mostra as oscilações deste sistema para dois casos do parâmetro de acoplamento  $\epsilon = 2\kappa\ell/mg$ : casos de acoplamento fraco ( $\epsilon \ll 1$ ) ou forte ( $\epsilon > 1$ ). Observa-se como o valor do parâmetro de acoplamento altera a taxa de transferência de energia de um oscilador para o outro.

### 4.3.2 COORDENADAS NORMAIS

Como os exemplos discutidos sugerem, a dinâmica de qualquer oscilador acoplado a um conjunto de  $n$  osciladores, conforme descrita pelas equações (4.9), pode ser decomposta em uma combinação linear de  $n$  modos normais de vibração.

A ideia subjacente à definição das *coordenadas normais* está em definir um novo sistema de coordenadas no qual cada modo normal vibra como um oscilador harmônico independente ao longo de uma das coordenadas normais. Em outras palavras, a transformação do sistema de coordenadas  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$  para o novo sistema de coordenadas normais desacopla os graus de liberdade e o sistema passa a evoluir como um sistema de  $n$  osciladores independentes.

Dada a notação matricial  $\eta(t) \doteq (\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_n)^T$ , a Lagrangiana pode ser escrita na forma matricial (4.8b),

$$L = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\eta}}^T \Gamma \dot{\tilde{\eta}} - \frac{1}{2} \tilde{\eta}^T U \eta,$$

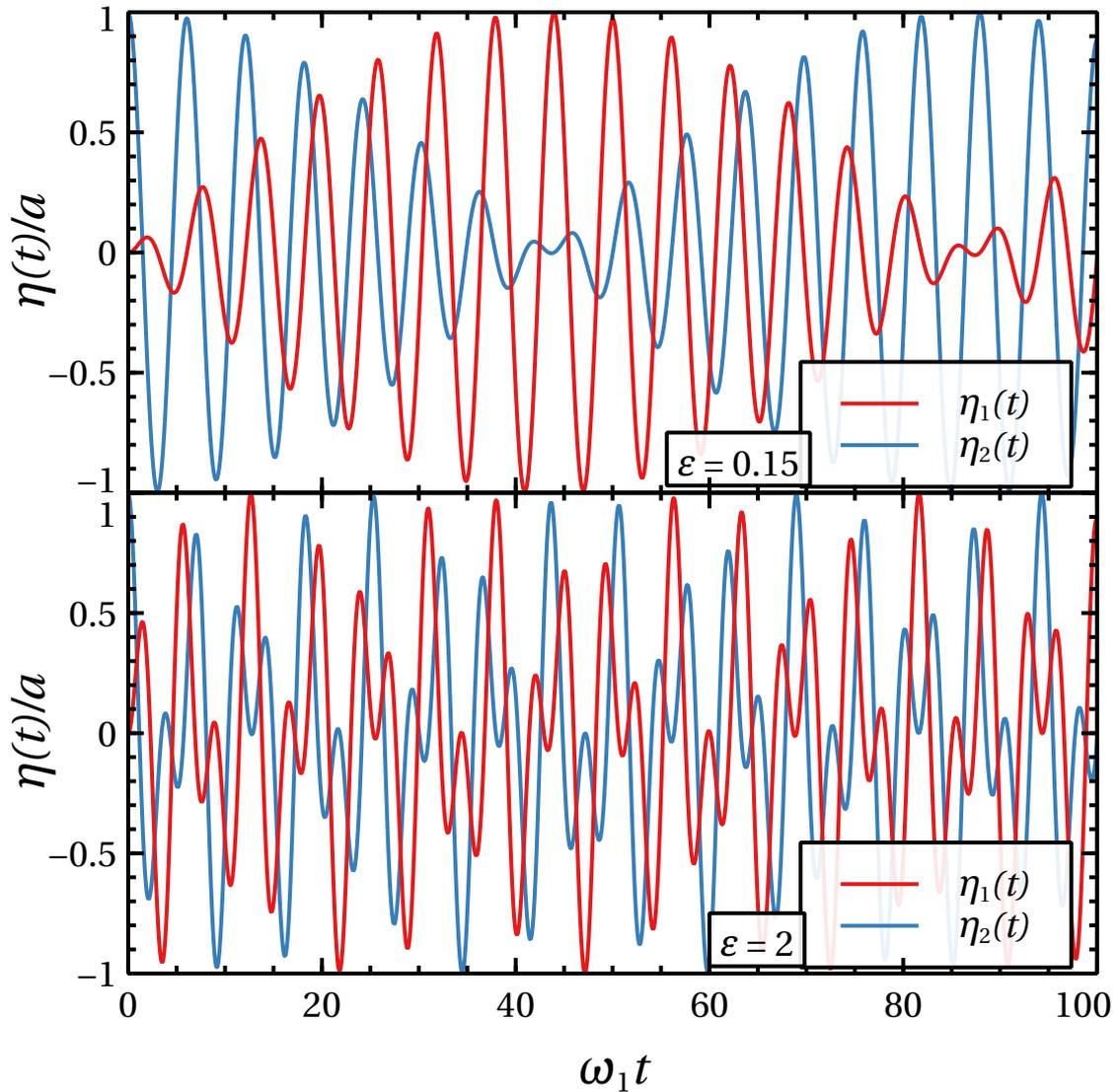
em termos das matrizes potencial  $U$  (4.7b) e cinética  $\Gamma$  (4.7e). Definem-se agora as **coordenadas normais**  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ , as quais estão relacionadas com as coordenadas originais  $\{\eta_k(t)\}$  pela transformação  $\zeta \mapsto \eta$  dada por

$$\eta(t) = A \zeta(t), \quad (4.14)$$

onde  $A$  é uma matriz  $n \times n$  a ser determinada. Substituindo esta transformação na Lagrangiana, resulta

$$L = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\zeta}}^T (\tilde{A} T A) \dot{\tilde{\zeta}} - \frac{1}{2} \tilde{\zeta}^T (\tilde{A} U A) \zeta. \quad (4.15)$$

Para que a Lagrangiana, escrita em termos das coordenadas normais, descreva um sistema de  $n$  osciladores desacoplados, é necessário que as matrizes  $\tilde{A} T A$  e  $\tilde{A} U A$  sejam diagonais. Ou seja, a matriz  $A$  deve ser tal que a mesma irá provocar a diagonalização tanto da matriz cinética quanto da potencial.



**Figura 4.5:** Oscilações de pêndulos acoplados para diferentes valores do parâmetro de acoplamento. (Superior) Caso de fraco acoplamento ( $\epsilon = 0.15$ ). (Inferior) Caso de forte acoplamento ( $\epsilon = 2$ ).

Para determinar a forma da matriz  $A$ , considera-se o espaço vetorial  $\mathcal{E}$ , cujos vetores são as matrizes  $n \times 1$  do tipo  $\xi = (\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n)^T$  sobre o corpo dos reais.<sup>2</sup> Dados dois vetores  $\xi$  e  $\vartheta$  deste espaço, define-se o produto interno dos mesmos como

$$\langle \xi, \vartheta \rangle = \tilde{\xi}^T \vartheta = \sum_{k,\ell=1}^n \xi_k T_{k\ell} \vartheta_\ell, \quad (4.16a)$$

envolvendo a matriz cinética  $T$ .<sup>3</sup>

Seja agora o conjunto  $\mathcal{Y} = \{\rho_s\}$  ( $\mathcal{Y} \subset \mathcal{E}$ , sendo  $s = 1, \dots, n$ ), formado pelos vetores característicos definidos por (4.12a) e determinados por (4.12b). Estes vetores claramente pertencem a este espaço vetorial, mas na sua determinação um de seus elementos sempre permanece indeterminado. Supondo que o problema de cálculo das frequências e vetores característicos seja não degenerado, impõe-se então sobre  $\mathcal{Y}$  a condição de formar um conjunto ortonormal frente ao produto interno (4.16a); ou seja,

$$\langle \rho_r, \rho_s \rangle = \tilde{\rho}_r^T \rho_s = \delta_{rs}, \quad (r, s = 1, \dots, n). \quad (4.16b)$$

A demonstração de que os autovetores são de fato ortogonais frente ao produto interno (4.16a) será realizada na seção 4.3.3.

<sup>2</sup>Ver, por exemplo, [Apostila de Física-Matemática](#), capítulo 4.

<sup>3</sup>A demonstração de que (4.16a) realmente constitui um produto interno será realizada na seção 4.3.3.

Com esta imposição, define-se a matriz  $A$  como a **matriz modal**

$$A = \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_n \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & \rho_{nn} \end{pmatrix}, \quad (4.17a)$$

ou seja,  $A_{rs} = \rho_{rs}$ , observa-se que se (4.16b) for satisfeita, então

$$\langle \rho_r, \rho_s \rangle = \tilde{\rho}_r \mathbb{T} \rho_s = \sum_{k,\ell=1}^n \rho_{kr} T_{k\ell} \rho_{\ell s} = \sum_{k,\ell=1}^n A_{kr} T_{k\ell} A_{\ell s} = \sum_{k,\ell=1}^n (\tilde{A})_{rk} T_{k\ell} A_{\ell s} = (\tilde{A} \mathbb{T} A)_{rs} = \delta_{rs}.$$

Ou seja, a matriz modal é tal que

$$\tilde{A} \mathbb{T} A = I_n. \quad (4.17b)$$

Como os vetores característicos devem satisfazer ao mesmo tempo (4.16b) e (4.12b), então

$$\tilde{\rho}_r \mathbb{U} \rho_s = \omega_s^2 \tilde{\rho}_r \mathbb{T} \rho_s = \omega_s^2 \delta_{rs}.$$

Definindo a matriz diagonal

$$W = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{pmatrix} \iff W_{rs} = \omega_r^2 \delta_{rs} \quad (r, s = 1, \dots, n),$$

e introduzindo a definição (4.17a), conclui-se então que

$$\tilde{\rho}_r \mathbb{U} \rho_s = W_{rs} \implies \tilde{A} \mathbb{U} A = W. \quad (4.17c)$$

Portanto, introduzindo os resultados (4.17b) e (4.17c) na Lagrangiana (4.15), resulta

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \dot{\zeta}_k^2 - \omega_k^2 \zeta_k^2 \right). \quad (4.18a)$$

Aplicando à mesma as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}_k} - \frac{\partial L}{\partial \zeta_k} = 0, \quad (k = 1, \dots, n),$$

resultam as equações de movimento de  $n$  osciladores desacoplados,

$$\ddot{\zeta}_k + \omega_k^2 \zeta_k = 0, \quad (k = 1, \dots, n), \quad (4.18b)$$

cujas soluções gerais podem ser escritas

$$\zeta_k(t) = c_k \cos(\omega_k t + \phi_k), \quad (k = 1, \dots, n), \quad (4.18c)$$

com  $c_k$  e  $\phi_k$  determinados pelas condições iniciais. Esta solução mostra que a  $k$ -ésima coordenada normal vibra com a frequência angular  $\omega_k$  pura.

A determinação das coordenadas normais possibilita então transformar um problema de  $n$  osciladores acoplados que vibram nas coordenadas  $\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_n(t)$  em um problema de  $n$  osciladores independentes que vibram nas coordenadas  $\zeta_1(t), \zeta_2(t), \dots, \zeta_n(t)$ . Uma vez determinadas as soluções (4.18c), as soluções para as coordenadas originais são obtidas a partir de (4.14).

Finalmente, a transformação inversa  $\eta \mapsto \zeta$  é realizada partindo-se de (4.14), multiplicando ambos os lados pela esquerda por  $\tilde{A} \mathbb{T}$  e usando (4.17b), de onde resulta

$$\tilde{A} \mathbb{T} \eta = \tilde{A} \mathbb{T} A \zeta \implies \zeta(t) = \tilde{A} \mathbb{T} \eta(t). \quad (4.19)$$

Sempre é possível escolher um conjunto de condições iniciais de modo a excitar uma oscilação acoplada “pura” ao longo de uma dada coordenada normal. Isto corresponderia a uma oscilação pura em um único modo normal. Contudo, para uma condição inicial arbitrária, em geral a oscilação resultante será uma justaposição linear de modos normais de oscilação.

**Exercício 4.5.** Determine as coordenadas normais para o sistema com dois pêndulos acoplados estudado no exercício 4.4.

*Resolução.* Dados: a matriz cinética e os vetores característicos (escritos em termos das constantes arbitrárias) obtidos no exercício,

$$T = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad \rho_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

a aplicação da condição (4.16b) resulta:

$$\begin{aligned} \langle \rho_1, \rho_1 \rangle &= \alpha^2 (1 \ 1) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \implies \alpha = (2m)^{-1/2} \\ \langle \rho_2, \rho_2 \rangle &= \beta^2 (1 \ -1) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \implies \beta = (2m)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Observa-se também que

$$\langle \rho_1, \rho_2 \rangle = \alpha\beta (1 \ 1) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Ou seja, a condição de ortogonalidade entre  $\rho_1$  e  $\rho_2$  é cumprida.

Assim, de (4.17a), a matriz modal para este sistema fica

$$A = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Com isso, de (4.19) as coordenadas normais resultam

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \zeta_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} (\eta_1 + \eta_2) \\ \zeta_2 = \sqrt{\frac{m}{2}} (\eta_1 - \eta_2), \end{cases}$$

enquanto que as relações inversas são dadas por (4.14),

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} (\zeta_1 + \zeta_2) \\ \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} (\zeta_1 - \zeta_2). \end{cases}$$

Dadas as soluções (4.18c), observa-se que, de fato, as expressões para  $\eta_1(t)$  e  $\eta_2(t)$  concordam com as soluções gerais obtidas no exercício 4.4. De acordo com as soluções (4.18c), o modo normal 1, que oscila ao longo da coordenada normal  $\zeta_1$ , o faz na frequência  $\omega_1$ . Mas, de acordo com o exercício 4.4, este modo normal oscila sempre com  $\eta_1 = \eta_2$ , isto é, com  $\zeta_1 \neq 0$  e  $\zeta_2 = 0$ . Por outro lado, o modo normal 2 oscila com frequência  $\omega_2$  ao longo da coordenada normal  $\zeta_2$ . Mas, nesta situação,  $\eta_1 = -\eta_2$ ; ou seja, de fato  $\zeta_1 = 0$  e  $\zeta_2 \neq 0$ .

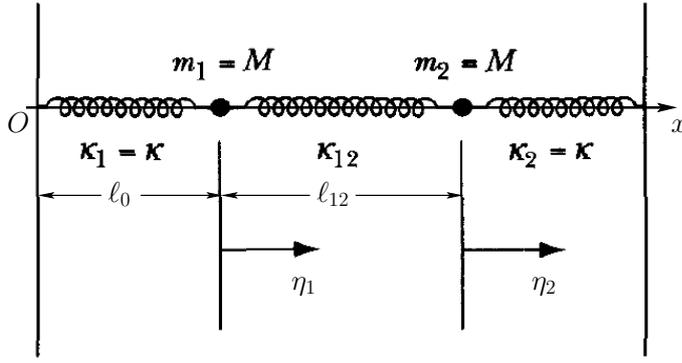
**Exemplo 4.3 (Um par de osciladores harmônicos acoplados).** O sistema ilustrado na figura 4.6 pode ser empregado para modelar oscilações longitudinais de uma molécula diatômica confinada, onde as forças entre os íons são representadas por molas. Neste modelo, as massas são conectadas por uma mola com constante elástica  $\kappa_{12}$  e por molas com constante  $\kappa$  afixadas a paredes rígidas.

De acordo com a figura, o comprimento de equilíbrio das molas laterais é  $\ell_0$ , ao passo que o respectivo comprimento para a mola central é  $\ell_{12}$ . Neste caso, é conveniente escrever as posições das massas ao longo do eixo  $x$  como

$$x_1(t) = \ell_0 + \eta_1(t), \quad x_2(t) = \ell_0 + \ell_{12} + \eta_2(t).$$

Com isso, as energias cinética e potencial resultam

$$T = \frac{1}{2} M (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) = \frac{1}{2} M (\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2)$$



**Figura 4.6:** Duas massas são conectadas por três molas afixadas a paredes rígidas. O sistema executa oscilações horizontais.

$$\begin{aligned}
 U &= U_{\kappa_1} + U_{\kappa_2} + U_{\kappa_{12}}, \\
 U_{\kappa_1} &= \frac{1}{2}\kappa(x_1 - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}\kappa\eta_1^2 \\
 U_{\kappa_2} &= \frac{1}{2}\kappa(x_2 - \ell_0 - \ell_{12})^2 = \frac{1}{2}\kappa\eta_2^2 \\
 U_{\kappa_{12}} &= \frac{1}{2}\kappa_{12}(x_2 - x_1 - \ell_{12})^2 = \frac{1}{2}\kappa_{12}(\eta_2 - \eta_1)^2.
 \end{aligned}$$

Desta forma, as matrizes potencial e cinética (4.7b,c) ficam, respectivamente,

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \kappa + \kappa_{12} & -\kappa_{12} \\ -\kappa_{12} & \kappa + \kappa_{12} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}.$$

De (4.9), as equações de movimento (para  $n = 2$ ) ficam então

$$\sum_{k=1}^2 T_{jk} \ddot{\eta}_k + \sum_{k=1}^2 U_{jk} \eta_k = 0 \Rightarrow \begin{cases} M\ddot{\eta}_1 + (\kappa + \kappa_{12})\eta_1 - \kappa_{12}\eta_2 = 0 \\ M\ddot{\eta}_2 - \kappa_{12}\eta_1 + (\kappa + \kappa_{12})\eta_2 = 0. \end{cases}$$

De acordo com a equação característica (4.11b), as autofrequências ficam então

$$\det \begin{pmatrix} \kappa + \kappa_{12} - M\omega^2 & -\kappa_{12} \\ -\kappa_{12} & \kappa + \kappa_{12} - M\omega^2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (\kappa + \kappa_{12} - M\omega^2)^2 - \kappa_{12}^2 = 0,$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\kappa + 2\kappa_{12}}{M}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\kappa}{M}}.$$

Os autovetores são dados por (4.12b). Para cada autofrequência, resultam

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{U} - \omega_1^2 \mathbf{T}) \rho_1 &= 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -\kappa_{12} & -\kappa_{12} \\ -\kappa_{12} & -\kappa_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11} \\ \rho_{21} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \rho_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
 (\mathbf{U} - \omega_2^2 \mathbf{T}) \rho_2 &= 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \kappa_{12} & -\kappa_{12} \\ -\kappa_{12} & \kappa_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{12} \\ \rho_{22} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \rho_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Portanto, de acordo com (4.13) as soluções das equações de movimento são

$$\begin{aligned}
 \eta_1(t) &= A \cos(\omega_1 t + \phi_1) + B \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\
 \eta_2(t) &= -A \cos(\omega_1 t + \phi_1) + B \cos(\omega_2 t + \phi_2),
 \end{aligned}$$

onde  $A = \alpha \bar{c}_1$  e  $B = \beta \bar{c}_2$ .

Para a determinação das coordenadas normais do sistema, é primeiro realizada a normalização dos autovetores de acordo com (4.16b), de onde resulta  $\alpha = \beta = (2M)^{-1/2}$ . Assim, de (4.17a) a matriz modal deste sistema fica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2M}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Com isso, de (4.19) as coordenadas normais resultam

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2M}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \zeta_1 = \sqrt{\frac{M}{2}}(\eta_1 - \eta_2) \\ \zeta_2 = \sqrt{\frac{M}{2}}(\eta_1 + \eta_2). \end{cases}$$

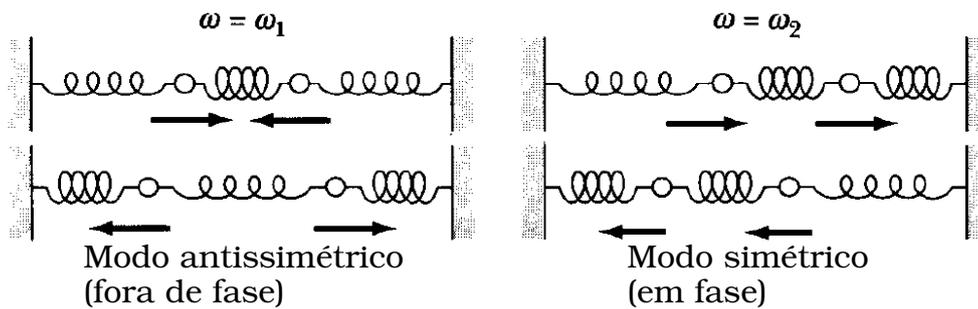
As equações de movimento das coordenadas normais são dadas por (4.18b), cujas soluções são dadas por (4.18c); ou seja, os modos normais evoluem como

$$\zeta_1(t) = c_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1), \quad \zeta_2(t) = c_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2).$$

Se as condições iniciais forem determinadas como  $\eta_1(0) = -\eta_2(0) = d_1$  e  $\dot{\eta}_1(0) = \dot{\eta}_2(0) = 0$ , então  $\zeta_1(0) = \sqrt{2M}d_1$ ,  $\zeta_2(0) = 0$ ,  $\dot{\zeta}_1(0) = \dot{\zeta}_2(0) = 0$ , de onde resultam  $c_1 = \sqrt{2M}d_1$ ,  $c_2 = 0$  e  $\phi_1 = \phi_2 = 0$ . Ou seja,

$$\zeta_1(t) = \sqrt{2M}d_1 \cos(\omega_1 t), \quad \zeta_2(t) = 0,$$

e a oscilação do sistema ocorre puramente no primeiro modo normal, com frequência  $\omega_1$ . Este modo de oscilação é denominado *modo antissimétrico*, onde as massas oscilam sempre fora de fase e todas as molas são deformadas, como pode ser observado no painel esquerdo da figura 4.7.



**Figura 4.7:** Oscilações nos dois modos normais do sistema. (Esquerda) oscilação no modo antissimétrico (fora de fase). (Direita) oscilação no modo simétrico (em fase).

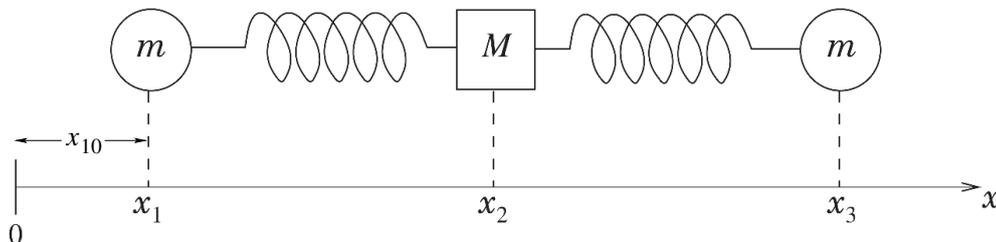
Por outro lado, se as condições iniciais forem  $\eta_1(0) = \eta_2(0) = d_2$  e  $\dot{\eta}_1(0) = \dot{\eta}_2(0) = 0$ , então  $\zeta_1(0) = 0$ ,  $\zeta_2(0) = \sqrt{2M}d_2$  e  $\dot{\zeta}_1(0) = \dot{\zeta}_2(0) = 0$ , de onde resultam  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = \sqrt{2M}d_2$  e  $\phi_1 = \phi_2 = 0$ . Ou seja,

$$\zeta_1(t) = 0, \quad \zeta_2(t) = \sqrt{2M}d_2 \cos(\omega_2 t),$$

a qual consiste na oscilação do sistema no *modo simétrico*, ilustrado no painel direito da figura 4.7. Neste, as massas oscilam sempre em fase, de modo que a mola central permanece sempre no comprimento de equilíbrio.

O exemplo a seguir ilustra uma situação onde uma autofrequência é nula, correspondendo a uma translação rígida do sistema por completo.

**Exemplo 4.4.** A figura 4.8 ilustra um modelo simples para o estudo das vibrações longitudinais que ocorrem em uma molécula triatômica linear livre, composta por dois íons idênticos dispostos simetricamente. A molécula  $\text{CO}_2$  é um exemplo deste tipo de molécula.



**Figura 4.8:** Modelo simplificado para o estudo das vibrações longitudinais de uma molécula triatômica linear.

Se ambas as molas possuem a mesma constante elástica  $\kappa$  e as mesmas extensões de equilíbrio  $\ell$ , então

$$x_1 = x_{10} + \eta_1(t), \quad x_2 = x_{10} + \ell + \eta_2(t), \quad x_3 = x_{10} + 2\ell + \eta_3(t).$$

As energias cinética e potencial ficam

$$T = \frac{1}{2} (m\dot{\eta}_1^2 + M\dot{\eta}_2^2 + m\dot{\eta}_3^2),$$

$$U = \frac{1}{2} \kappa (x_2 - x_1 - \ell)^2 + \frac{1}{2} \kappa (x_3 - x_2 - \ell)^2 = \frac{1}{2} \kappa [(\eta_2 - \eta_1)^2 + (\eta_3 - \eta_2)^2]$$

Com isto, as condições de equilíbrio (4.7a) resultam em

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = -\kappa (x_2 - x_1 - \ell) = 0 \Rightarrow x_2 - x_1 = \ell,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = \kappa (x_2 - x_1 - \ell) - \kappa (x_3 - x_2 - \ell) = 0 \Rightarrow x_3 - x_2 = \ell.$$

As matrizes potencial e cinética (4.7b,c) ficam, respectivamente,

$$U = \begin{pmatrix} \kappa & -\kappa & 0 \\ -\kappa & 2\kappa & -\kappa \\ 0 & -\kappa & \kappa \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

A equação característica (4.11b) fica escrita (com  $\lambda = \omega^2$ )

$$\det \begin{pmatrix} \kappa - \lambda m & -\kappa & 0 \\ -\kappa & 2\kappa - \lambda M & -\kappa \\ 0 & -\kappa & \kappa - \lambda m \end{pmatrix} = 0,$$

resultando na equação polinomial

$$\lambda (\kappa - \lambda m) [\kappa (M + 2m) - \lambda m M] = 0,$$

cujas soluções resultam nas autofreqüências

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{\kappa}{m} \left(1 + 2\frac{m}{M}\right)}.$$

A solução  $\omega_1 = 0$  parece estranha a princípio, mas ela corresponde ao movimento de translação livre o centro de massa do sistema, como será visto a seguir.

Para cada autofreqüência, temos os autovetores correspondentes a partir de (4.12b), sendo estes normalizados de acordo com (4.16b), resultando então

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt{2m + M}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \rho_3 = \frac{1}{\sqrt{2m \left(1 + 2\frac{m}{M}\right)}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2m/M \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A mesma relação (4.16b) mostra que os autovetores são ortogonais, isto é,  $\langle \rho_1, \rho_2 \rangle = \langle \rho_1, \rho_3 \rangle = \langle \rho_2, \rho_3 \rangle = 0$ .

Tendo sido determinados os autovetores ortonormais, a matriz modal (4.17a) é dada por

$$A = \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix},$$

permitindo assim a obtenção das coordenadas normais, de acordo com (4.19); ou seja,

$$\zeta_1(t) = \frac{m\eta_1 + M\eta_2 + m\eta_3}{\sqrt{2m + M}}, \quad \zeta_2(t) = \sqrt{\frac{m}{2}} (\eta_1 - \eta_3),$$

$$\zeta_3(t) = \sqrt{\frac{m}{2 \left(1 + 2\frac{m}{M}\right)}} (\eta_1 - 2\eta_2 + \eta_3) = \sqrt{\frac{m}{2 \left(1 + 2\frac{m}{M}\right)}} [(\eta_1 - \eta_2) - (\eta_2 - \eta_3)].$$

Observa-se que, a menos de um fator constante, o modo normal  $\zeta_1(t) = \sqrt{2m + M} x_{CM}(t)$ , i.e.,  $\zeta_1$  é proporcional à posição do centro de massa da molécula.

Finalmente, de acordo com (4.18b), as coordenadas normais satisfazem as equações de movimento

$$\ddot{\zeta}_1 = 0, \quad \ddot{\zeta}_2 + \omega_2^2 \zeta_2 = 0, \quad \ddot{\zeta}_3 + \omega_3^2 \zeta_3 = 0.$$

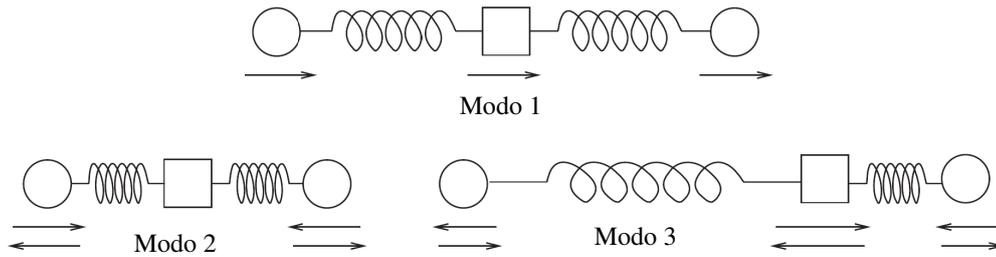


Figura 4.9: Modos normais de oscilação de uma molécula triatômica linear.

Ou seja, a solução para  $\zeta_1$  mostra que o centro de massa da molécula se move com aceleração nula e a molécula sofre uma translação rígida, com  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 \neq 0$ , para a qual  $U = 0$ ; ou seja, não há força restauradora atuando sobre o sistema nesta situação. Este tipo de movimento está identificado como o Modo 1 na figura 4.9.

Já o movimento do modo  $\zeta_2$ , identificado como “Modo 2”, consiste na vibração dos íons de massa  $m$  em relação ao íon central de massa  $M$ . Finalmente, o modo  $\zeta_3$  (“Modo 3”) consiste na vibração alternada do íon central em relação aos íons laterais.

### 4.3.3 PROPRIEDADES MATEMÁTICAS RELACIONADAS AOS MODOS NORMAIS

Nesta seção, algumas propriedades matemáticas do formalismo de modos normais serão apresentadas.

#### 4.3.3.1 O PRODUTO INTERNO ENTRE OS AUTOVETORES

Nas relações (4.16a,b), foi definido o produto interno entre dois vetores do espaço  $\mathcal{E}$ , que contém as matrizes  $n \times 1$  do tipo  $\xi = (\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n)^T$  sobre o corpo dos reais. A demonstração de que (4.16a) constitui em uma definição válida de produto interno parte do fato que a energia cinética total de um sistema de partículas é sempre positivo-definida, isto é,  $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \geq 0$  em (1.73a). Como é suposto que a Lagrangiana do sistema de osciladores acoplados está na forma (4.6), resulta da definição (4.7d) que

$$\sum_{k,\ell=1}^n T_{k\ell} \xi_k \xi_\ell \geq 0 \text{ e } \sum_{k,\ell=1}^n T_{k\ell} \xi_k \xi_\ell = 0 \iff \xi_1 = \cdots = \xi_n = 0, \quad (4.20)$$

sendo  $T$  uma matriz simétrica, *i.e.*,  $T_{k\ell} = T_{\ell k}$ .

Com esta propriedade, a regra (4.16a) realmente satisfaz a definição de um produto interno no espaço  $\mathcal{E}$ , como um espaço real positivo-definido;<sup>4</sup> ou seja, para  $\xi, \vartheta, \rho \in \mathcal{E}$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , a definição (4.16a) é a forma bilinear

$$\langle \xi, \vartheta \rangle = \tilde{\xi} T \vartheta = \sum_{k,\ell=0}^n \xi_k T_{k\ell} \vartheta_\ell = \beta,$$

a qual satisfaz

**(i) Linearidade:**  $\langle \xi, \alpha \vartheta \rangle = \alpha \langle \xi, \vartheta \rangle$ .

**(ii) Distributividade:**  $\langle \xi + \rho, \vartheta \rangle = \langle \xi, \vartheta \rangle + \langle \rho, \vartheta \rangle$ .

**(iii) Simetria:**  $\langle \xi, \vartheta \rangle = \langle \vartheta, \xi \rangle$ .

**(iv) Positividade:**  $\langle \xi, \xi \rangle \geq 0$ , com  $\langle \xi, \xi \rangle = 0$  se e somente se  $\xi = 0$ .

<sup>4</sup>Apostila de Física-Matemática, seção 4.8.

### 4.3.3.2 POSITIVIDADE DAS AUTOFREQUÊNCIAS

As autofrequências (ou frequências características)  $\{\omega_s\}$  são as raízes da equação característica (4.11c), a qual é uma equação polinomial de grau  $n$  para  $\omega_s^2$  ( $s = 1, \dots, n$ ).

Dado um vetor  $\xi_s \in \mathcal{E}$  ( $\xi_s \neq 0$ ) e escrevendo  $\lambda_s = \omega_s^2$ , as equações (4.11a) podem ser escritas na forma matricial como

$$(U - \lambda_s T) \xi_s = 0 \implies \lambda_s T \xi_s = U \xi_s.$$

Multiplicando pela esquerda por  $\tilde{\xi}_s$ , obtém-se então

$$\lambda_s = \omega_s^2 = \frac{\tilde{\xi}_s U \xi_s}{\tilde{\xi}_s T \xi_s} \geq 0,$$

pois, de acordo com (4.7c) e (4.20),  $\tilde{\xi}_s U \xi_s \geq 0$  e  $\tilde{\xi}_s T \xi_s > 0$ . Portanto,  $\omega_s$  é real e positivo-definida.

### 4.3.3.3 ORTOGONALIDADE DOS AUTOVETORES

Na determinação dos modos normais de oscilação, a relação (4.16b) assume que distintos autovetores são ortogonais frente ao produto interno (4.16a). Isto será agora demonstrado, desde que o problema de autovalores seja não degenerado; ou seja, se todas as autofrequências forem distintas entre si.

Para  $n \geq 2$ , sejam então os pares  $(\rho_r, \omega_r)$  e  $(\rho_s, \omega_s)$  ( $\omega_r \neq \omega_s$ ) determinados por (4.12b):

$$\begin{cases} \lambda_r T \rho_r = U \rho_r \\ \lambda_s T \rho_s = U \rho_s \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_r \tilde{\rho}_s T \rho_r = \tilde{\rho}_s U \rho_r \\ \lambda_s \tilde{\rho}_r T \rho_s = \tilde{\rho}_r U \rho_s \end{cases} \xrightarrow[\text{Propriedade (iii)}]{(4.16a)} (\lambda_r - \lambda_s) \langle \rho_r, \rho_s \rangle = \tilde{\rho}_s U \rho_r - \tilde{\rho}_r U \rho_s,$$

onde  $\lambda_r = \omega_r^2$ . Como a matriz potencial (4.7b) também é simétrica ( $U_{kl} = U_{lk}$ ), resulta que

$$\tilde{\rho}_s U \rho_r - \tilde{\rho}_r U \rho_s = 0.$$

Portanto, para um problema de autovalores não degenerado ( $\lambda_r \neq \lambda_s$ ), os autovetores são ortogonais,

$$\langle \rho_r, \rho_s \rangle = \tilde{\rho}_r T \rho_s = 0.$$

Suponha agora que o problema seja degenerado. Seja um sistema com  $n \geq 2$  de osciladores acoplados, com os conjuntos  $\Upsilon_n = \{\rho_s\}$  ( $s = 1, \dots, n$ ) de autovetores e  $\Omega_n = \{\omega_s\}$  de autofrequências associadas, como soluções de (4.12b). Suponha que exista pelo menos um par de subconjuntos  $\Upsilon_m \subseteq \Upsilon_n$  e  $\Omega_m \subseteq \Omega_n$  ( $m \leq n$ ) tais que  $\Upsilon_m = \{\rho_r\}$  ( $r = 1, \dots, m$ ) e  $\Omega_m = \{\bar{\omega}\}$ . Ou seja, o conjunto  $\Upsilon_n$  é organizado de tal forma que os primeiros  $m$  autovetores são degenerados à autofrequência  $\bar{\omega}$ . Neste caso, não necessariamente  $\langle \rho_r, \rho_s \rangle = \delta_{rs}$  ( $r, s = 1, \dots, m$ ).

Emprega-se então um processo de ortonormalização de Gram-Schmidt, o qual irá resultar no conjunto  $\tilde{\Upsilon}_m = \{\tilde{\rho}_r\}$  ( $r = 1, \dots, m$ ), com os vetores  $\tilde{\rho}_r$  dados por

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_1 &= \rho_1 \\ \tilde{\rho}_2 &= \rho_2 - \frac{\langle \tilde{\rho}_1, \rho_2 \rangle}{\langle \tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_1 \rangle} \tilde{\rho}_1 \\ &\vdots \\ \tilde{\rho}_m &= \rho_m - \sum_{r=1}^{m-1} \frac{\langle \tilde{\rho}_r, \rho_m \rangle}{\langle \tilde{\rho}_r, \tilde{\rho}_r \rangle} \tilde{\rho}_r. \end{aligned}$$

Os vetores de  $\tilde{\Upsilon}_m$  são todos ortogonais entre si. Para normalizá-los, basta dividir  $\tilde{\rho}_r \in \tilde{\Upsilon}_m$  pela sua norma  $\sqrt{\langle \tilde{\rho}_r, \tilde{\rho}_r \rangle}$ .

## 4.4 OSCILAÇÕES LONGITUDINAIS EM UMA REDE PERIÓDICA UNIDIMENSIONAL

Nesta seção será desenvolvido um método capaz de descrever oscilações longitudinais de pequenas amplitudes em uma rede periódica unidimensional.

**SUPOSIÇÕES**

O sistema físico em estudo está representado na figura 4.10.

1. Rede periódica unidimensional composta por  $n+2$  ( $n \geq 1$ ) partículas idênticas (com a mesma massa  $m$ ).
2. Interações somente entre vizinhos imediatos.
3. Forças internas restauradoras lineares, todas com a mesma constante elástica  $\kappa$ .
4. Forças externas: conservativas e atuando somente sobre as partículas extremas da rede (em  $z_0$  e/ou  $z_{n+1}$ ).
5. Perturbações que excitam oscilações de pequena amplitude em torno da configuração de equilíbrio.

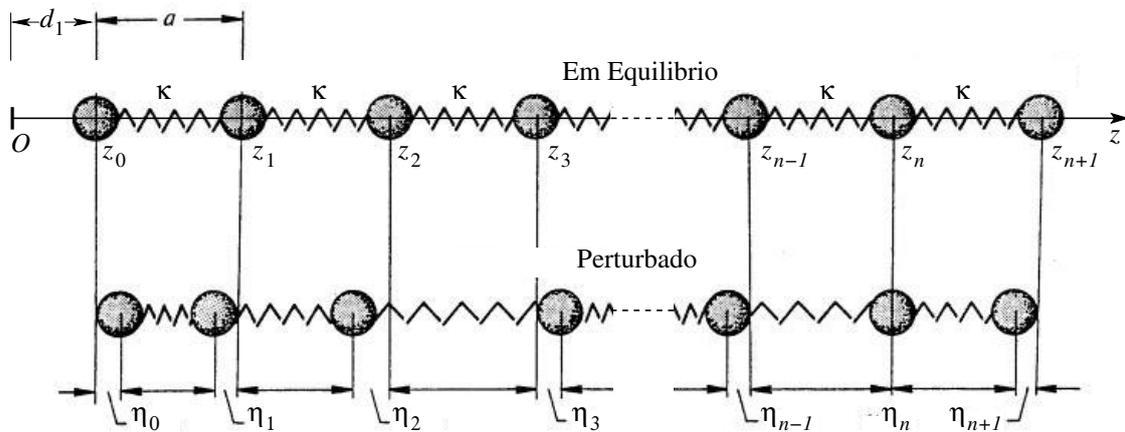


Figura 4.10: Rede periódica unidimensional.

De acordo com as suposições, a configuração de equilíbrio deste sistema é:

$$z_{0j} = d_1 + ja, \quad (j = 0, 1, \dots, n + 1),$$

onde  $a$  é a distância de equilíbrio, denominada **parâmetro de rede**, entre qualquer par de partículas do sistema.

Dada então uma perturbação sobre esta rede periódica, a qual excita oscilações longitudinais (ao longo do eixo  $z$ ) em torno da configuração de equilíbrio, as posições instantâneas das partículas passam a ser escritas como

$$z_j(t) = z_{0j} + \eta_j(t), \quad (j = 0, 1, \dots, n + 1),$$

sendo que pela suposição de pequena amplitude das oscilações,  $|\eta_j(t)| \ll a$  para qualquer  $j$ .

**ENERGIA CINÉTICA**

A energia cinética total deste sistema é dada simplesmente por

$$T = \frac{1}{2}m \sum_{j=0}^{n+1} \dot{z}_j^2 = \frac{1}{2}m \sum_{j=0}^{n+1} \dot{\eta}_j^2.$$

A matriz cinética  $T$  fica então

$$T = m \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = mI_{n+2},$$

sendo que agora, por conveniência, o elemento  $T_{ij}$  é

$$T_{ij} = m\delta_{ij}, \quad (i, j = 0, 1, \dots, n + 1).$$

**ENERGIA POTENCIAL**

Divide-se novamente a energia potencial total do sistema em parte externa mais parte interna.

**ENERGIA POTENCIAL EXTERNA.** De acordo com as suposições iniciais, este termo origina-se de forças externas (conservativas) ao sistema que atuam somente sobre as partículas nas extremidades do mesmo. Escreve-se então

$$U^{\text{ext}} = U_0(z_0) + U_{n+1}(z_{n+1}),$$

mantendo-se estes potenciais arbitrários.

**ENERGIA POTENCIAL INTERNA.** De acordo com a suposição de forças internas restauradoras lineares, com constantes elásticas todas iguais a  $\kappa$ , atuando sobre uma rede periódica em equilíbrio, a energia potencial interna do sistema é

$$U^{\text{int}} = \frac{1}{2}\kappa \sum_{j=0}^n (\eta_{j+1} - \eta_j)^2.$$

Para a construção da matriz potencial, é útil escrever a expressão acima em extenso:

$$U^{\text{int}} = \frac{1}{2}\kappa (\eta_0^2 - 2\eta_1\eta_0 + 2\eta_1^2 - 2\eta_2\eta_1 + 2\eta_2^2 + \dots + 2\eta_{n-1}^2 - 2\eta_n\eta_{n-1} + 2\eta_n^2 - 2\eta_{n+1}\eta_n + \eta_{n+1}^2). \quad (4.21)$$

Identifica-se a matriz potencial  $U$  a partir de (4.8a) ou (4.8b),

$$\begin{aligned} U^{\text{int}} &= \frac{1}{2}\tilde{\eta}U\eta = \frac{1}{2} \sum_{j,k=0}^{n+1} U_{jk}\eta_j\eta_k \\ &= U_{00}\eta_0^2 + (U_{01} + U_{10})\eta_1\eta_0 + (U_{02} + U_{20})\eta_2\eta_0 + \dots + (U_{0n} + U_{n0})\eta_n\eta_0 + (U_{0,n+1} + U_{n+1,0})\eta_{n+1}\eta_0 \\ &\quad + U_{11}\eta_1^2 + (U_{12} + U_{21})\eta_2\eta_1 + \dots + (U_{1n} + U_{n1})\eta_n\eta_1 + (U_{1,n+1} + U_{n+1,1})\eta_{n+1}\eta_1 \\ &\quad + U_{22}\eta_2^2 + (U_{23} + U_{32})\eta_3\eta_2 + \dots + (U_{2n} + U_{n2})\eta_n\eta_2 + (U_{2,n+1} + U_{n+1,2})\eta_{n+1}\eta_2 \\ &\quad + \dots \\ &\quad + U_{n-1,n-1}\eta_{n-1}^2 + (U_{n-1,n} + U_{n,n-1})\eta_n\eta_{n-1} + (U_{n-1,n+1} + U_{n+1,n-1})\eta_{n+1}\eta_{n-1} \\ &\quad + U_{nn}\eta_n^2 + (U_{n,n+1} + U_{n+1,n})\eta_{n+1,n} + U_{n+1,n+1}\eta_{n+1}^2. \end{aligned}$$

Comparando-se o resultado deste produto matricial com (4.21), conclui-se que a matriz potencial deve ser

$$U = \kappa \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

isto é,  $U$  é uma matriz tridiagonal.

**A LAGRANGIANA E AS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO**

A Lagrangiana deste sistema de osciladores acoplados fica escrita então

$$L = T - U \implies \begin{cases} L = \frac{1}{2}\tilde{\eta}T\dot{\eta} - \frac{1}{2}\tilde{\eta}U\eta - U_0(z_0) - U_{n+1}(z_{n+1}), \\ L = \frac{1}{2}m \sum_{j=0}^{n+1} \dot{\eta}_j^2 - \frac{1}{2} \sum_{j,k=0}^{n+1} U_{jk}\eta_j\eta_k - U_0(z_0) - U_{n+1}(z_{n+1}), \\ L = \frac{1}{2}m \sum_{j=0}^{n+1} \dot{\eta}_j^2 - \frac{1}{2}\kappa \sum_{j=0}^n (\eta_{j+1} - \eta_j)^2 - U_0(z_0) - U_{n+1}(z_{n+1}). \end{cases} \quad (4.23)$$

As equações de Euler-Lagrange para este sistema são

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_j} - \frac{\partial L}{\partial \eta_j} = 0, \quad (j = 0, \dots, n+1).$$

As equações de movimento resultantes são agora obtidas. Presta-se particular importância à aplicação das derivadas sobre o termo de energia potencial interna. Estas ficam:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{\text{int}}}{\partial \dot{\eta}_j} &= 0, \quad \frac{\partial U^{\text{int}}}{\partial \eta_0} = \kappa(\eta_0 - \eta_1), \quad \frac{\partial U^{\text{int}}}{\partial \eta_{n+1}} = \kappa(-\eta_n + \eta_{n+1}), \\ \frac{\partial U^{\text{int}}}{\partial \eta_j} &= \frac{1}{2} \kappa \sum_{k=0}^n \frac{\partial}{\partial \eta_j} (\eta_{k+1} - \eta_k)^2 = \kappa \sum_{k=0}^n (\eta_{k+1} - \eta_k) (\delta_{j,k+1} - \delta_{jk}), \quad (j = 1, \dots, n) \\ &= -\kappa(\eta_{j-1} - 2\eta_j + \eta_{j+1}), \quad (j = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Então, para as partículas nas extremidades da rede,

$$\begin{aligned} (j = 0) : \quad & \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_0} = m\dot{\eta}_0, \\ & \frac{\partial L}{\partial \eta_0} = -\kappa(\eta_0 - \eta_1) - \frac{\partial U_0}{\partial \eta_0}. \\ (j = n+1) : \quad & \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_{n+1}} = m\dot{\eta}_{n+1}, \\ & \frac{\partial L}{\partial \eta_{n+1}} = -\kappa(-\eta_n + \eta_{n+1}) - \frac{\partial U_{n+1}}{\partial \eta_{n+1}}. \end{aligned}$$

Já para as partículas internas da rede ( $j = 1, \dots, n$ ),

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_j} = m\dot{\eta}_j, \quad \frac{\partial L}{\partial \eta_j} = -\kappa \sum_{k=0}^n (\eta_{k+1} - \eta_k) (\delta_{j,k+1} - \delta_{jk}) = -\kappa(-\eta_{j-1} + 2\eta_j - \eta_{j+1}).$$

Portanto, as equações de movimento ficam:

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{\eta}_0 - \kappa(\eta_1 - \eta_0) + \frac{\partial U_0}{\partial \eta_0} = 0 \\ m\ddot{\eta}_j - \kappa(\eta_{j-1} - 2\eta_j + \eta_{j+1}) = 0, \\ m\ddot{\eta}_{n+1} + \kappa(\eta_{n+1} - \eta_n) + \frac{\partial U_{n+1}}{\partial \eta_{n+1}} = 0. \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\eta}_0 + \omega_0^2(\eta_0 - \eta_1) + \frac{1}{m} \frac{\partial U_0}{\partial \eta_0} = 0 \\ \ddot{\eta}_j - \omega_0^2(\eta_{j-1} - 2\eta_j + \eta_{j+1}) = 0 \\ \ddot{\eta}_{n+1} + \omega_0^2(\eta_{n+1} - \eta_n) + \frac{1}{m} \frac{\partial U_{n+1}}{\partial \eta_{n+1}} = 0, \end{array} \right. \quad (4.24)$$

sendo que no sistema acima,  $j = 1, \dots, n$  e  $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$ .

### SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Para resolver o sistema de equações (4.24), o método desenvolvido anteriormente pode ser em princípio aplicado; isto é, dadas as matrizes T e U, determinam-se primeiro as autofrequências de oscilação como as raízes da equação característica

$$\det(U - \omega^2 T) = 0,$$

e, para cada autofrequência  $\omega_j$ , determina-se o correspondente autovetor  $\rho_j$  pela equação de autovalores

$$(U - \omega_j^2 T) \rho_j = 0.$$

O problema prático em aplicar este método para um sistema com  $n+2$  osciladores está no fato de que a equação característica é sempre uma equação polinomial de grau  $n+2$  para  $\omega^2$ , a qual somente terá solução analítica para  $n \leq 2$ , isto é, para até 4 osciladores. Na prática, mesmo para 3 ( $n=1$ ) osciladores a fórmula de cálculo das raízes<sup>5</sup> gera expressões algebricamente longas e de difícil aplicação. Para 4 ( $n=2$ ) osciladores, a correspondente fórmula<sup>6</sup> gera resultados ainda

<sup>5</sup>A conhecida fórmula de Cardano-Tartaglia.

<sup>6</sup>A fórmula de Ferrari.

mais extensos. A partir de então, para 5 ou mais ( $n \geq 3$ ) osciladores não existem fórmulas que forneçam expressões analíticas para as raízes, restando então o cálculo numérico das mesmas. Portanto, embora este método a princípio permita obter as soluções analíticas do sistema (4.24), a sua aplicação prática está restrita a sistemas com um número pequeno de osciladores.

Para encontrar a solução analítica do sistema de equações (4.24) para um número arbitrário de osciladores, um novo método será agora desenvolvido. Este método é válido para as suposições descritas no início da seção.

No desenvolvimento do método anterior, foi realizada a suposição de que o movimento de cada oscilador é periódico no tempo, de modo que a solução da equação para o  $j$ -ésimo oscilador pode sempre ser escrita na forma de uma série (truncada) de Fourier

$$\eta_j(t) = \sum_{r=-r_m}^{r_m} \bar{\eta}_{jr} e^{-i\omega_r t}, \quad (j = 0, \dots, n+1).$$

Esta suposição foi verificada *a posteriori*, sendo que a condição de validade da mesma leva justamente à equação característica para as autofrequências  $\{\omega_j\}$ .

Supõe-se agora que além da periodicidade temporal, o movimento de cada partícula da rede possui uma periodicidade *espacial*, originária da equidistância entre quaisquer pares de partículas no equilíbrio. Esta suposição de periodicidade espacial também será demonstrada *a posteriori* e, para impor a mesma, escreve-se

$$\bar{\eta}_{jr} = \alpha_r e^{ik_r j a}, \quad \left( \begin{array}{l} j = 0, \dots, n+1 \\ r = -r_m, -r_m+1, \dots, 0, \dots, r_m-1, r_m \end{array} \right), \quad (4.25)$$

sendo  $\alpha_r$  uma amplitude (complexa) a ser determinada,  $a$  o parâmetro de rede e  $k_r$ , denominado o **número de onda**, descreve a periodicidade espacial da rede. Assim, a solução proposta para a equação de movimento da  $j$ -ésima partícula é agora

$$\eta_j(t) = \sum_{r=-r_m}^{r_m} \alpha_r e^{i(k_r j a - \omega_r t)}, \quad (j = 0, \dots, n+1).$$

Para explorar a implicação da hipótese de periodicidade espacial, denomina-se a quantidade

$$\phi_{jr}(t) \doteq k_r j a - \omega_r t$$

a **fase** do  $r$ -ésimo modo normal da oscilação da  $j$ -ésima partícula, de tal modo que

$$\eta_j = \sum_r \alpha_r e^{i\phi_{jr}(t)}.$$

Então, *periodicidade espaço-temporal* implica que se a fase do  $r$ -ésimo modo da  $j$ -ésima partícula no instante  $t$  é  $\phi_{jr}(t)$ , então a mesma fase parcial ocorrerá no instante  $t + \Delta t$  para a  $j + \Delta j$  ( $\Delta j > 0$ ) partícula à direita da primeira; ou seja,

$$\phi_{j+\Delta j, r}(t + \Delta t) = k_r (j + \Delta j) a - \omega_r (t + \Delta t) = \phi_{jr}(t),$$

o que implica que

$$(\Delta j) a k_r - \omega_r \Delta t = 0.$$

Este resultado pode ser interpretado da seguinte maneira. As oscilações das partículas ocorrem de tal forma que existe uma perturbação que se propaga a partir da  $j$ -ésima partícula para a sua direita e que se desloca ao longo da rede periódica com uma velocidade igual a

$$v_r(k_r, \omega_r) = \frac{(\Delta j) a}{\Delta t} = \frac{\omega_r}{k_r}, \quad (4.26)$$

para o  $r$ -ésimo modo normal de oscilação.

Porém, a mesma periodicidade espaço-temporal pode ocorrer também via perturbações que se propagam *para a esquerda* da  $j$ -ésima partícula. Neste caso, trocando-se  $\Delta j \rightarrow -\Delta j$ , observa-se que estas perturbações viajam com a velocidade

$$\frac{(\Delta j) a}{\Delta t} = -\frac{\omega_r}{k_r} = -v_r.$$

Portanto, a onda (perturbação) pode se deslocar em ambos os sentidos em qualquer ponto da rede. Assim, uma expressão mais correta para  $\eta_j(t)$  em (4.25) é

$$\eta_j(t) = \sum_{r=-r_m}^{r_m} \left[ \underbrace{\alpha_{+r} e^{i(k_r j a - \omega_r t)}}_{\text{para direita}} + \underbrace{\alpha_{-r} e^{i(k_r j a + \omega_r t)}}_{\text{para esquerda}} \right], \quad (j = 0, \dots, n+1),$$

sendo que foram identificados os termos que descrevem perturbações deslocando-se sobre a rede para a direita ou para a esquerda, com suas respectivas amplitudes.<sup>7</sup> Uma expressão mais compacta para esta proposta de solução é

$$\eta_j(t) = \sum_{r=-r_m}^{r_m} \sum_{s=\pm 1} \alpha_{sr} e^{i(k_r j a - s \omega_r t)}, \quad (j = 0, \dots, n+1). \quad (4.27)$$

A função  $\eta_j(t)$  dada por (4.27) é uma *proposta* de solução, a qual deve ser ainda posta à prova pelas equações de movimento. Esta solução depende dos conjuntos de parâmetros  $\{\alpha_{sr}\}$ ,  $\{k_r\}$  e  $\{\omega_r\}$ , os quais são ainda independentes entre si e arbitrários. Os seus valores específicos devem ser determinados agora por diversas imposições tais como (i) equações de movimento, (ii) realidade das soluções, (iii) condições de contorno impostas às bordas da rede e (iv) condições iniciais. Essas condições serão agora aplicadas e discutidas.

### RELAÇÃO DE DISPERSÃO

A proposta para  $\eta_j(t)$ , dada por (4.27), será agora testada frente as equações de movimento (4.24). Mais especificamente, as soluções serão testadas nas equações de movimento para as partículas internas da rede periódica ( $1 \leq j \leq n$ ), ou seja,

$$\ddot{\eta}_j - \omega_0^2 (\eta_{j-1} - 2\eta_j + \eta_{j+1}) = 0.$$

Define-se agora o símbolo

$$(r, j, s) \doteq k_r j a - s \omega_r t,$$

o qual será empregado para compactar a notação, quando não houver ambiguidade. Então, de (4.27),

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_j(t) &= - \sum_{r=-r_m}^{r_m} \sum_{s=\pm 1} \alpha_{sr} \omega_r^2 e^{i(r,j,s)} \\ \eta_{j-1}(t) &= \sum_{r=-r_m}^{r_m} \sum_{s=\pm 1} \alpha_{sr} e^{i(r,j-1,s)} = \sum_{r=-r_m}^{r_m} \sum_{s=\pm 1} \alpha_{sr} e^{i(r,j,s)} e^{-ik_r a} \\ \eta_{j+1}(t) &= \sum_{r=-r_m}^{r_m} \sum_{s=\pm 1} \alpha_{sr} e^{i(r,j+1,s)} = \sum_{r=-r_m}^{r_m} \sum_{s=\pm 1} \alpha_{sr} e^{i(r,j,s)} e^{ik_r a}. \end{aligned}$$

Inserindo estas expressões na equação de movimento (4.24), obtém-se

$$\begin{aligned} - \sum_{r=-r_m}^{r_m} \sum_{s=\pm 1} \alpha_{sr} \omega_r^2 e^{i(r,j,s)} - \omega_0^2 \sum_{r=-r_m}^{r_m} \sum_{s=\pm 1} \alpha_{sr} [e^{-ik_r a} - 2 + e^{ik_r a}] e^{i(r,j,s)} &= 0, \\ \sum_{r=-r_m}^{r_m} \sum_{s=\pm 1} \alpha_{sr} \{ \omega_r^2 + \omega_0^2 [e^{-ik_r a} - 2 + e^{ik_r a}] \} e^{i(k_r j a - s \omega_r t)} &= 0. \end{aligned}$$

Para que a identidade seja satisfeita para quaisquer condições iniciais e em todos os instantes de tempo, é necessário e suficiente que

$$\omega_r^2 + \omega_0^2 (e^{-ik_r a} - 2 + e^{ik_r a}) = 0, \quad \forall r, s.$$

Mas,

$$2i \sin x = e^{ix} - e^{-ix} \Rightarrow (e^{ix} - e^{-ix})^2 = e^{2ix} - 2 + e^{-2ix} = -4 \sin^2 x.$$

<sup>7</sup>Note que em  $\alpha_{-r}$ ,  $-r \neq -1 * r$ . As amplitudes  $\alpha_r$  e  $\alpha_{-r}$  são, a princípio, independentes.

Portanto,

$$\omega_r^2 = 4\omega_0^2 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{1}{2} k_r a \right),$$

de onde resulta a *relação de dispersão*

$$\omega_r(k_r) = 2\omega_0 \left| \operatorname{sen} \left( \frac{1}{2} k_r a \right) \right|. \quad (4.28)$$

A forma (4.28) da relação de dispersão somente é válida se  $k_r \in \mathbb{R}$  ( $r = 1, \dots, n$ ). Neste caso, ela mostra que a frequência do  $r$ -ésimo modo normal de oscilação é também uma quantidade real e não é independente, mas sim depende do respectivo número de onda  $k_r$ , sendo que ambos se relacionam por (4.28).

Por outro lado, a relação de dispersão apenas não determina quais são os valores que  $k_r$  deve assumir. Para todos os fins, o número de onda ainda é uma quantidade (real) arbitrária. Contudo, a relação (4.28) mostra que o intervalo *efetivo* de variação de  $k_r$  é finito, pois qualquer transformação

$$k_r \rightarrow k_r + \frac{2\ell\pi}{a}, \text{ sendo } \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

irá resultar em

$$\operatorname{sen} \left( \frac{1}{2} k_r a \right) \rightarrow \operatorname{sen} \left( \frac{1}{2} k_r a + \ell\pi \right) = (-1)^\ell \operatorname{sen} \left( \frac{1}{2} k_r a \right).$$

Ou seja, o intervalo de valores *distintos* de  $\omega_r$  está restrito a

$$0 \leq k_r \leq \frac{\pi}{a} \rightsquigarrow 0 \leq \omega_r \leq 2\omega_0,$$

pois

$$\omega_r \left( k_r = \frac{\pi}{a} - \epsilon \right) = \omega_r \left( k_r = \frac{\pi}{a} + \epsilon \right) = 2\omega_0 \left| \cos \left( \frac{1}{2} \epsilon a \right) \right|, \text{ para } 0 < \epsilon < \frac{\pi}{a}$$

e  $\omega_r(-k_r) = \omega_r(k_r)$ .

A relação de dispersão (4.28) também determina a *velocidade de fase*, a qual consiste na velocidade de propagação do  $r$ -ésimo modo normal de oscilação. Esta velocidade é obtida a partir de (4.26) e é definida por

$$c_r(k_r) \doteq |v_r(\omega_r, k_r)| = \left| \frac{\omega_r(k_r)}{k_r} \right| = 2\omega_0 \left| \frac{\operatorname{sen}(k_r a/2)}{k_r} \right|.$$

Escrevendo

$$c_r(k_r) = \omega_0 a \left| \frac{\operatorname{sen}(k_r a/2)}{k_r a/2} \right|,$$

observa-se que no intervalo  $0 \leq k_r \leq \pi/a$ , a velocidade da onda varia por

$$\omega_0 a \geq c_r \geq \frac{2}{\pi} \omega_0 a.$$

Este resultado mostra que as oscilações desta rede periódica apresentam o fenômeno da **dispersão**. Suponha que uma determinada perturbação é aplicada em uma região da rede, de tal forma que as condições iniciais consistem na superposição de diversos modos normais de oscilação, cada um com a sua intensidade inicial. Para  $t > 0$  esta perturbação inicial começa a se propagar em ambos os sentidos, sendo que cada modo normal se desloca com a sua própria velocidade de fase  $c_r$ . Isto significa que diferentes modos normais irão se deslocar pela rede com diferentes velocidades, o que irá deformar o perfil inicial da perturbação. Se o sistema for linear e conservativo, a mesma energia cinética inicial irá se distribuir por regiões cada vez maiores da rede, devido à dispersão, levando à conseqüente redução nas intensidades dos modos normais. O fenômeno da dispersão é comum a todos os sistemas periódicos oscilantes e é a razão pela qual a maior parte dos materiais sólidos são opacos à luz (radiação eletromagnética).

### CONDIÇÃO DE REALIDADE

A proposta de solução (4.27) deverá também satisfazer a condição de realidade, isto é,

$$\eta_j^*(t) = \eta_j(t), \quad (j = 0, \dots, n + 1).$$

Ou seja,

$$\eta_j^*(t) = \sum_{r=-r_m}^{r_m} \sum_{s=\pm 1} \alpha_{sr}^* e^{-i(r,j,s)t} = \sum_{r=-r_m}^{r_m} \sum_{s=\pm 1} \alpha_{sr} e^{i(r,j,s)t} = \eta_j(t),$$

onde já foi empregado o fato de que  $\{\omega_r, k_r\} \subset \mathbb{R}$ . Mas,

$$\sum_{r=-r_m}^{r_m} \sum_{s=\pm 1} \alpha_{sr}^* e^{-i(r,j,s)t} \xrightarrow{r \rightarrow -r} \sum_{r=-r_m}^{r_m} \sum_{s=\pm 1} \alpha_{s,-r}^* e^{-i(-r,j,s)t} = \sum_{r=-r_m}^{r_m} \sum_{s=\pm 1} \alpha_{sr} e^{i(r,j,s)t},$$

ou seja,

$$\sum_{r=-r_m}^{r_m} \sum_{s=\pm 1} \alpha_{s,-r}^* e^{-i[k_{-r}ja - s\omega_{-r}(k_{-r})t]} = \sum_{r=-r_m}^{r_m} \sum_{s=\pm 1} \alpha_{sr} e^{i[k_rja - s\omega_r(k_r)t]}.$$

Para que a identidade seja satisfeita, é suficiente que

$$\alpha_{sr} = \alpha_{s,-r}^*, \quad k_r = -k_{-r}, \quad \omega_r(k_r) = -\omega_{-r}(k_{-r}) = -\omega_{-r}(-k_r). \quad (4.29)$$

Impondo estas relações a (4.27), escreve-se primeiro<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} \eta_j(t) &= \sum_{s=\pm 1} \left( \sum_{r=1}^{r_m} + \sum_{r=-1}^{-r_m} \right) \alpha_{sr} e^{i(r,j,s)t} \\ &= \sum_{r=1}^{r_m} \sum_{s=\pm 1} \left( \alpha_{sr} e^{i(r,j,s)t} + \alpha_{s,-r} e^{i(-r,j,s)t} \right), \end{aligned}$$

onde foi realizada a transformação  $r \rightarrow -r$  no segundo somatório. Mas, de acordo com as relações (4.29),

$$\begin{aligned} (-r, j, s) &= k_{-r}ja - s\omega_{-r}(k_{-r})t \\ &= -k_rja + s\omega_r(k_r)t \\ &= -(r, j, s). \end{aligned}$$

Portanto, as soluções das equações de movimento podem ser escritas como

$$\eta_j(t) = \sum_{r=1}^{r_m} \sum_{s=\pm 1} \left[ \alpha_{sr} e^{i(k_rja - s\omega_r(k_r)t)} + \alpha_{sr}^* e^{-i(k_rja - s\omega_r(k_r)t)} \right], \quad (j = 0, \dots, n + 1), \quad (4.30)$$

de forma que a condição de realidade é automaticamente satisfeita.

### CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA A REDE FINITA

A solução (4.30) foi escrita de modo a mostrar que a solução  $\eta_j(t)$  é sempre real e que a frequência do  $r$ -ésimo modo normal  $\omega_r$  depende do número de onda  $k_r$  através da relação de dispersão (4.28). Contudo, até este momento os números de onda continuam sendo arbitrários (dentro do intervalo  $0 \leq k_r \leq \pi/a$ ). O que irá determinar quais são os valores fisicamente corretos para o conjunto  $\{k_r\}$  são as condições de contorno impostas às partículas extremas da rede periódica.

As condições de contorno empregadas na maior parte dos problemas físicos são:

**(A) Extremos fixos.** As forças externas aplicadas às partículas  $j = 0$  e  $j = n + 1$  são tais que as mesmas permanecem sempre imóveis, ou seja,

$$\eta_0(t) = \eta_{n+1}(t) = 0.$$

Esta situação pode ser visualizada estando estas partículas presas a paredes paralelas, quando então a rede somente pode executar oscilações entre as mesmas.

<sup>8</sup>O termo  $r = 0$  continua sendo inexistente.

**(B) Extremos livres.** Quando  $U_0 = U_{n+1} = 0$  nas equações de movimento (4.24). Neste caso, o centro de massa da rede desloca-se livremente pelo espaço.

**(C) Extremos absorventes.** Quando não são permitidas reflexões das ondas nos contornos, isto é, quando as intensidades dos modo normais com  $v_r > 0$  em  $j = 0$  e  $v_r < 0$  em  $j = n + 1$  são impostas nulas.

Estas condições emulam redes periódicas infinitas.

**(D) Condições de contorno periódicas.** São obtidas pela imposição

$$\eta_0(t) = \eta_{n+1}(t) (\neq 0).$$

Isto implica que as partículas  $j = 0$  e  $j = n + 1$  são, na verdade, a mesma partícula.

Estas condições de contorno são empregadas para descrever oscilações em redes fechadas ou circulares. Por exemplo, oscilações longitudinais ao longo do anel aromático da molécula de benzeno ( $C_6H_6$ ).

Serão consideradas aqui somente as condições de contorno **(A)**, ou seja, extremos fixos. Neste caso, somente  $n$  ( $j = 1, \dots, n$ ) partículas realmente oscilam. Inicialmente, escreve-se (4.30) da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \eta_j(t) &= \sum_{r=1}^{r_m} \left[ \sum_{s=\pm 1} \alpha_{sr} e^{i(k_r j a - s \omega_r(k_r) t)} + \sum_{s=\pm 1} \alpha_{sr}^* e^{-i(k_r j a - s \omega_r(k_r) t)} \right] \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{s \rightarrow -s} \\ &\quad \downarrow \\ \eta_j(t) &= \sum_{r=1}^{r_m} \sum_{s=\pm 1} \left[ \alpha_{sr} e^{i(k_r j a - s \omega_r(k_r) t)} + \alpha_{-sr}^* e^{-i(k_r j a + s \omega_r(k_r) t)} \right]. \end{aligned}$$

Impondo as condições de contorno **(A)** sobre as soluções para  $j = 0, n + 1$  em (4.30), é necessário que

$$\begin{aligned} \eta_0(t) &= \sum_{r=1}^{r_m} \sum_{s=\pm 1} (\alpha_{sr} + \alpha_{-sr}^*) e^{-is\omega_r(k_r)t} = 0 \\ \eta_{n+1}(t) &= \sum_{r=1}^{r_m} \sum_{s=\pm 1} \left[ \alpha_{sr} e^{ik_r(n+1)a} + \alpha_{-sr}^* e^{-ik_r(n+1)a} \right] e^{-is\omega_r(k_r)t} = 0. \end{aligned}$$

Estas condições são cumpridas em qualquer instante  $t \geq 0$  se:

1.  $\alpha_{sr} = -\alpha_{-sr}^*$ . Impondo agora esta condição de contorno, resulta

$$\eta_j(t) = 2i \sum_{r=1}^{r_m} \sum_{s=\pm 1} \alpha_{sr} \operatorname{sen}(k_r j a) e^{-is\omega_r(k_r)t}, \quad (j = 0, \dots, n+1). \quad (4.31)$$

Fica agora evidente em (4.31) que

$$\eta_0(t) = 0.$$

2. Valores de  $k_r$ . Escrevendo agora  $\eta_{n+1}(t)$  a partir de (4.31) e impondo a condição de contorno, resulta

$$\eta_{n+1}(t) = \sum_{r=1}^{r_m} \sum_{s=\pm 1} \alpha_{sr} \left( e^{ik_r(n+1)a} - e^{-ik_r(n+1)a} \right) e^{-is\omega_r(k_r)t} = 0,$$

o que implica que

$$e^{ik_r(n+1)a} - e^{-ik_r(n+1)a} = 0 \implies \operatorname{sen}[k_r(n+1)a] = 0.$$

Para  $0 \leq k_r \leq \pi/a$ , esta condição é cumprida se

$$k_r(n+1)a = r\pi \implies k_r = \frac{r\pi}{(n+1)a}, \quad (r = 1, \dots, n). \quad (4.32)$$

Por fim, como as amplitudes  $\alpha_{sr}$  ainda são indeterminadas, escreve-se inicialmente

$$\alpha_{sr} = \frac{\beta_{sr}}{2i} \quad (\beta_{sr} = \beta_{-sr}^*),$$

o que permite escrever a solução (4.31) como

$$\eta_j(t) = \sum_{r=1}^n \sum_{s=\pm 1} \beta_{sr} \rho_{jr} e^{-is\omega_r t} = \sum_{r=1}^n \rho_{jr} \xi_r(t), \quad (j = 1, \dots, n), \quad (4.33a)$$

sendo que

$$\xi_r(t) = \text{Re}(\gamma_r e^{i\omega_r t}) = \mu_r \cos \omega_r t - \nu_r \text{sen} \omega_r t, \quad (4.33b)$$

onde  $\{\gamma_r \in \mathbb{C}\}$  ou  $\{\mu_r, \nu_r \in \mathbb{R}\}$  são constantes ainda a ser determinadas pelas condições iniciais.

Em (4.33a) foi empregada a expressão (4.32) para os autovalores de  $k_r$  e foi também definido o autovetor  $\rho_j$ , cujos componentes são dados por

$$\rho_j = \begin{pmatrix} \rho_{1j} \\ \rho_{2j} \\ \vdots \\ \rho_{n-1,j} \\ \rho_{nj} \end{pmatrix} \iff \rho_{rj} \doteq F_j \text{sen} \left( \frac{rj\pi}{n+1} \right), \quad (j, r = 1, \dots, n).$$

Também devido a (4.32), as autofrequências  $\{\omega_r\}$ , de acordo com a relação de dispersão (4.28), ficam dadas por

$$\omega_r = 2\omega_0 \text{sen} \left( \frac{r\pi}{2(n+1)} \right), \quad (r = 1, \dots, n). \quad (4.33c)$$

Na solução (4.33a), nota-se que as condições de contorno  $\eta_0 = \eta_{n+1} = 0$  são automaticamente satisfeitas e, portanto, o número total de autovalores  $\{k_r, \omega_r\}$  é  $r_m = n$ , o que corresponde ao número de partículas que realmente oscilam na rede periódica.

Impõe-se também a condição de que os autovetores  $\{\rho_j\}$  satisfazem a condição de ortonormalidade

$$\langle \rho_j, \rho_k \rangle \doteq \rho_j^T \rho_k = \sum_{\ell=1}^n \rho_{\ell j} \rho_{\ell k} = \delta_{jk},$$

a qual fornece também o valor da constante de normalização  $F_j = \sqrt{2/(n+1)}$ . Ou seja,

$$\rho_{rj} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \text{sen} \left( \frac{rj\pi}{n+1} \right) \implies \rho_j = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \begin{pmatrix} \text{sen} \left( \frac{1}{n+1} j\pi \right) \\ \text{sen} \left( \frac{2}{n+1} j\pi \right) \\ \vdots \\ \text{sen} \left( \frac{n-1}{n+1} j\pi \right) \\ \text{sen} \left( \frac{n}{n+1} j\pi \right) \end{pmatrix}. \quad (4.33d)$$

Pode ser demonstrado que, dadas as condições iniciais  $\eta_{r0} \doteq \eta_r(0)$  e  $\dot{\eta}_{r0} \doteq \dot{\eta}_r(0)$  ( $r = 1, \dots, n$ ) as constantes  $\{\mu_r, \nu_r\}$  são dadas por

$$\mu_r = \sum_{\ell=1}^n \rho_{\ell r} \eta_{\ell 0} \quad \nu_r = -\frac{1}{\omega_r} \sum_{\ell=1}^n \rho_{\ell r} \dot{\eta}_{\ell 0}. \quad (4.33e)$$

Uma última observação importante é que as funções  $\xi_j(t)$  dadas por (4.33b) são, na verdade, os modos normais de oscilação da rede, pois substituindo (4.33a) na Lagrangiana (4.23) (com  $U_0 = U_{n+1} = 0$ ), a mesma pode ser escrita como

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( \dot{\xi}_j^2 - \omega_j^2 \xi_j^2 \right),$$

cujas equações de movimento resultantes são

$$\ddot{\xi}_j + \omega_j^2 \xi_j = 0, \quad (j = 1, \dots, n),$$

ou seja, equações de osciladores independentes.

## 4.5 OSCILAÇÕES ARBITRÁRIAS DE PEQUENA AMPLITUDE: A CORDA CARREGADA

### SUPOSIÇÕES

1. Rede unidimensional formada por  $n + 2$  osciladores acoplados, com as partículas de borda fixas.
2. Interações somente entre vizinhos imediatos.
3. Forças internas centrais e restauradoras para oscilações de pequena amplitude.

Uma maneira de descrever oscilações de uma rede unidimensional tanto na direção longitudinal quanto nas direções transversais seria retornar a um modelo semelhante ao ilustrado na figura 4.10, onde as partículas interagem por forças restauradoras lineares (as “molas”).

De acordo com este modelo, no equilíbrio as posições das  $n + 2$  partículas são dadas por

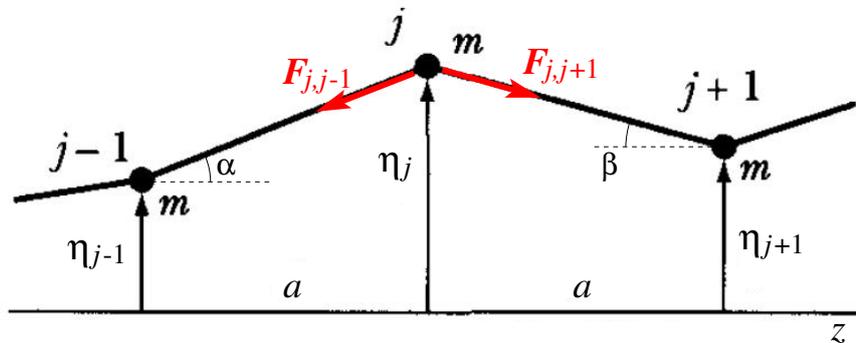
$$\mathbf{r}_{0j} = (d_1 + ja)\hat{\mathbf{k}}, \quad (j = 0, \dots, n + 1),$$

sendo  $a$  o parâmetro de rede. Quando a rede é perturbada, as posições instantâneas das partículas passam a ser dadas por

$$\mathbf{r}_j(t) = \mathbf{r}_{0j} + \boldsymbol{\eta}_j(t), \quad (j = 0, \dots, n + 1), \text{ sendo}$$

$$\boldsymbol{\eta}_j = \eta_{j,x}\hat{\mathbf{i}} + \eta_{j,y}\hat{\mathbf{j}} + \eta_{j,z}\hat{\mathbf{k}} \equiv \sum_{i=1}^3 \eta_{j,i}\hat{\mathbf{x}}_i, \text{ com } \eta_0 = \eta_{n+1} = \mathbf{0}.$$

A figura 4.11 ilustra um caso particular de oscilações possíveis em uma rede deste tipo, quando o deslocamento das partículas é puramente transversal.



**Figura 4.11:** Oscilações transversais de pequena amplitude em uma rede 1D e as forças internas atuando sobre a  $j$ -ésima partícula.

Embora este modelo seja realístico para diversos sistemas, há algumas dificuldades. A ideia é que oscilações genéricas, que ocorrem tanto na direção longitudinal quanto na direção transversal, possam ser desacopladas de tal forma que, independente da direção, a estrutura formal das equações de movimento seja a mesma e semelhante às equações para o caso puramente longitudinal discutido na seção 4.4.

Considerando somente as partículas identificadas por  $1 \leq j \leq n$ , a força sobre a  $j$ -ésima partícula devida à  $k$ -ésima partícula deve ser

$$\mathbf{F}_{jk} = f(r_{jk})\hat{\mathbf{r}}_{jk}, \text{ sendo } f(r_{jk}) > 0 \text{ e } \hat{\mathbf{r}}_{jk} = \frac{\mathbf{r}_{jk}}{r_{jk}}, \text{ com } \mathbf{r}_{jk} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j.$$

Mas,

$$\mathbf{r}_{jk} = \mathbf{r}_{0k} - \mathbf{r}_{0j} + \boldsymbol{\eta}_k - \boldsymbol{\eta}_j.$$

Como as interações ocorrem somente entre vizinhos imediatos, então sobre a  $j$ -ésima partícula atuam as forças

$$\mathbf{F}_{j,j-1} = f(r_{j,j-1})\hat{\mathbf{r}}_{j,j-1} \text{ e } \mathbf{F}_{j,j+1} = f(r_{j,j+1})\hat{\mathbf{r}}_{j,j+1},$$

quando então

$$\mathbf{r}_{j,j-1} = \boldsymbol{\eta}_{j-1} - \boldsymbol{\eta}_j - a\hat{\mathbf{k}} \text{ e } \mathbf{r}_{j,j+1} = \boldsymbol{\eta}_{j+1} - \boldsymbol{\eta}_j + a\hat{\mathbf{k}},$$

conforme está ilustrado na figura 4.11. Em coordenadas Cartesianas,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{j,j\pm 1} &= (\eta_{j\pm 1,x} - \eta_{j,x})\hat{\mathbf{i}} + (\eta_{j\pm 1,y} - \eta_{j,y})\hat{\mathbf{j}} + (\eta_{j\pm 1,z} - \eta_{j,z} - a)\hat{\mathbf{k}} \\ r_{j,j\pm 1} &= \sqrt{(\eta_{j\pm 1,x} - \eta_{j,x})^2 + (\eta_{j\pm 1,y} - \eta_{j,y})^2 + (\eta_{j\pm 1,z} - \eta_{j,z} - a)^2}. \end{aligned}$$

De acordo com o modelo, a força restauradora é elástica, *i. e.*,

$$f(r_{jk}) = \kappa(r_{jk} - a) \quad (\kappa = \text{cte.}) \implies \mathbf{F}_{jk} = \kappa(r_{jk} - a)\hat{\mathbf{r}}_{jk} = \kappa(r_{jk} - a)\frac{\mathbf{r}_{jk}}{r_{jk}}.$$

Esta suposição leva a uma dificuldade conceitual. Definindo

$$\delta_{\pm x_i} \doteq \frac{\eta_{j\pm 1,x_i} - \eta_{j,x_i}}{a},$$

pode-se escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{j,j\pm 1} &= \kappa(r_{j,j\pm 1} - a)\frac{\mathbf{r}_{j,j\pm 1}}{r_{j,j\pm 1}} \\ &= \kappa a \left( \sqrt{\delta_{\pm x}^2 + \delta_{\pm y}^2 + (\delta_{\pm z} \pm 1)^2} - 1 \right) \frac{\delta_{\pm x}\hat{\mathbf{i}} + \delta_{\pm y}\hat{\mathbf{j}} + (\delta_{\pm z} \pm 1)\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{\delta_{\pm x}^2 + \delta_{\pm y}^2 + (\delta_{\pm z} \pm 1)^2}}. \end{aligned}$$

Se forem assumidas oscilações de pequena amplitude, tais que  $|\delta_{\pm x_i}| \ll 1$ , observa-se que

$$\hat{\mathbf{r}}_{j,j\pm 1} = \frac{\mathbf{r}_{j,j\pm 1}}{r_{j,j\pm 1}} = \frac{\delta_{\pm x}\hat{\mathbf{i}} + \delta_{\pm y}\hat{\mathbf{j}} + (\delta_{\pm z} \pm 1)\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{\delta_{\pm x}^2 + \delta_{\pm y}^2 + (\delta_{\pm z} \pm 1)^2}} \approx \delta_{\pm x}\hat{\mathbf{i}} + \delta_{\pm y}\hat{\mathbf{j}} \pm \hat{\mathbf{k}},$$

onde a última expressão corresponde à ordem mais baixa na expansão em potências de  $\delta_{\pm x_i}$ . Neste caso, uma expansão de  $\mathbf{F}_{j,j\pm 1}$  em mais baixa ordem na perturbação resulta

$$\mathbf{F}_{j,j\pm 1} \approx \kappa a \left( \pm \delta_{\pm x}\delta_{\pm z}\hat{\mathbf{i}} \pm \delta_{\pm y}\delta_{\pm z}\hat{\mathbf{j}} + \delta_{\pm z}\hat{\mathbf{k}} \right).$$

Ou seja, as componentes transversais da força sobre a  $j$ -ésima partícula não são lineares; em consequência, as equações de movimento na direção transversal serão formalmente distintas das equações na direção longitudinal.

Para que a componente transversal da força restauradora seja linear, é necessário que a força de tensão da “corda” seja constante, isto é,  $f(r_{jk}) = \tau_j$ , sendo  $\tau_j$  o módulo da força de tensão da corda sobre a  $j$ -ésima partícula devida a uma de suas vizinhas. Este novo modelo irá gerar as equações de movimento desejadas na direção transversal, mas não pode ser aplicado para oscilações longitudinais, uma vez que o mesmo prevê uma componente longitudinal constante da força sobre a  $j$ -ésima partícula, ao invés de uma força restauradora.

Portanto, nenhum dos modelos de interações se aplica tanto a oscilações longitudinais quanto para oscilações transversais. Ou as forças são do tipo elástico na direção longitudinal ou do tipo força de tensão constante na direção transversal. Devido a isto, o modelo a ser adotado doravante para a corda carregada somente serve para oscilações puramente transversais.

Escreve-se então

$$\mathbf{F}_{j,j-1} = \tau_j \hat{\mathbf{r}}_{j,j-1} = \tau_j \frac{\mathbf{r}_{j,j-1}}{r_{j,j-1}} \implies \mathbf{F}_{j-1,j} = -\mathbf{F}_{j,j-1} = \tau_j \hat{\mathbf{r}}_{j-1,j}.$$

Mas, fazendo  $j \rightarrow j + 1$ ,

$$\mathbf{F}_{j+1,j} = \tau_{j+1} \hat{\mathbf{r}}_{j+1,j} = -\mathbf{F}_{j,j+1} \implies \mathbf{F}_{j,j+1} = \tau_{j+1} \hat{\mathbf{r}}_{j,j+1},$$

onde

$$\hat{\mathbf{r}}_{j,j\pm 1} \approx \delta_{\pm x}\hat{\mathbf{i}} + \delta_{\pm y}\hat{\mathbf{j}}.$$

Assim, resulta como força total sobre a  $j$ -ésima partícula,

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_{j,j-1} + \mathbf{F}_{j,j+1} \approx (\tau_j \delta_{-x} + \tau_{j+1} \delta_{+x})\hat{\mathbf{i}} + (\tau_j \delta_{-y} + \tau_{j+1} \delta_{+y})\hat{\mathbf{j}},$$

$$\mathbf{F}_j = \left[ \frac{\tau_j}{a} (\eta_{j-1,x} - \eta_{j,x}) + \frac{\tau_{j+1}}{a} (\eta_{j+1,x} - \eta_{j,x}) \right] \hat{\mathbf{i}} + \left[ \frac{\tau_j}{a} (\eta_{j-1,y} - \eta_{j,y}) + \frac{\tau_{j+1}}{a} (\eta_{j+1,y} - \eta_{j,y}) \right] \hat{\mathbf{j}},$$

para  $j = 1, \dots, n$ .

Esta aproximação para  $\mathbf{F}_{j,j\pm 1}$  é equivalente a uma aproximação por tangentes. Por exemplo, na figura 4.11 observa-se que, para  $\eta_{j,y} = 0$  e com  $\tau_j = \tau_{j+1}$ , a força resultante sobre a  $j$ -ésima partícula é

$$F_j = -F_{j,j-1} \sin \alpha - F_{j,j+1} \sin \beta = -\tau_j (\sin \alpha + \sin \beta).$$

Mas, para pequenos deslocamentos do equilíbrio,  $|\alpha, \beta| \ll 1$ , o que permite aproximar

$$\sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{\eta_j - \eta_{j-1}}{a} = -\delta_{-x}, \quad \sin \beta \approx \tan \beta = \frac{\eta_j - \eta_{j+1}}{a} = -\delta_{+x},$$

resultando

$$F_j \approx \tau_j (\delta_{-x} + \delta_{+x}) = \frac{\tau_j}{a} (\eta_{j+1} - 2\eta_j + \eta_{j-1}).$$

Para a derivação da energia potencial interna associada às oscilações transversais em uma corda carregada, retorna-se às propriedades (1.12) e (1.13), segundo as quais

$$\mathbf{F}_{j,j-1} = -\nabla_j U_{j,j-1} \text{ e } \mathbf{F}_{j,j+1} = -\nabla_j U_{j,j+1} = -\nabla_j U_{j+1,j}.$$

Para que estas expressões sejam válidas, é necessário que

$$U_{j,j-1} = \frac{1}{2a} \tau_j \left[ (\eta_{j-1,x} - \eta_{j,x})^2 + (\eta_{j-1,y} - \eta_{j,y})^2 \right], \quad U_{j,j+1} = \frac{1}{2a} \tau_{j+1} \left[ (\eta_{j+1,x} - \eta_{j,x})^2 + (\eta_{j+1,y} - \eta_{j,y})^2 \right].$$

Portanto, a energia potencial interna total é obtida a partir de (1.14), segundo a qual,

$$U^{(\text{int})} = \sum_{j=0}^n U_{j,j+1} = \sum_{j=0}^n \frac{\tau_{j+1}}{2a} \left[ (\eta_{j+1,x} - \eta_{j,x})^2 + (\eta_{j+1,y} - \eta_{j,y})^2 \right], \quad (4.34)$$

lembrando que  $\eta_{0,x_i} = \eta_{n+1,x_i} = 0$ .

Por sua vez, a energia cinética total das mesmas partículas é

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \dot{r}_j^2, \text{ sendo } \dot{r}_j = \dot{\eta}_j.$$

Assim, a energia cinética total para oscilações puramente transversais é simplesmente

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j (\dot{\eta}_{j,x}^2 + \dot{\eta}_{j,y}^2).$$

Portanto, a Lagrangiana do sistema de osciladores acoplados que executam oscilações puramente transversais no modelo da corda carregada é

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j (\dot{\eta}_{j,x}^2 + \dot{\eta}_{j,y}^2) - \frac{1}{2a} \sum_{j=0}^n \tau_{j+1} \left[ (\eta_{j+1,x} - \eta_{j,x})^2 + (\eta_{j+1,y} - \eta_{j,y})^2 \right]. \quad (4.35a)$$

Observa-se que esta Lagrangiana corresponde à forma generalizada de (4.23).

Uma forma particular para (4.35a) consiste em assumir que todas as partículas são idênticas e que a força de tensão da corda é uniforme. Neste caso,

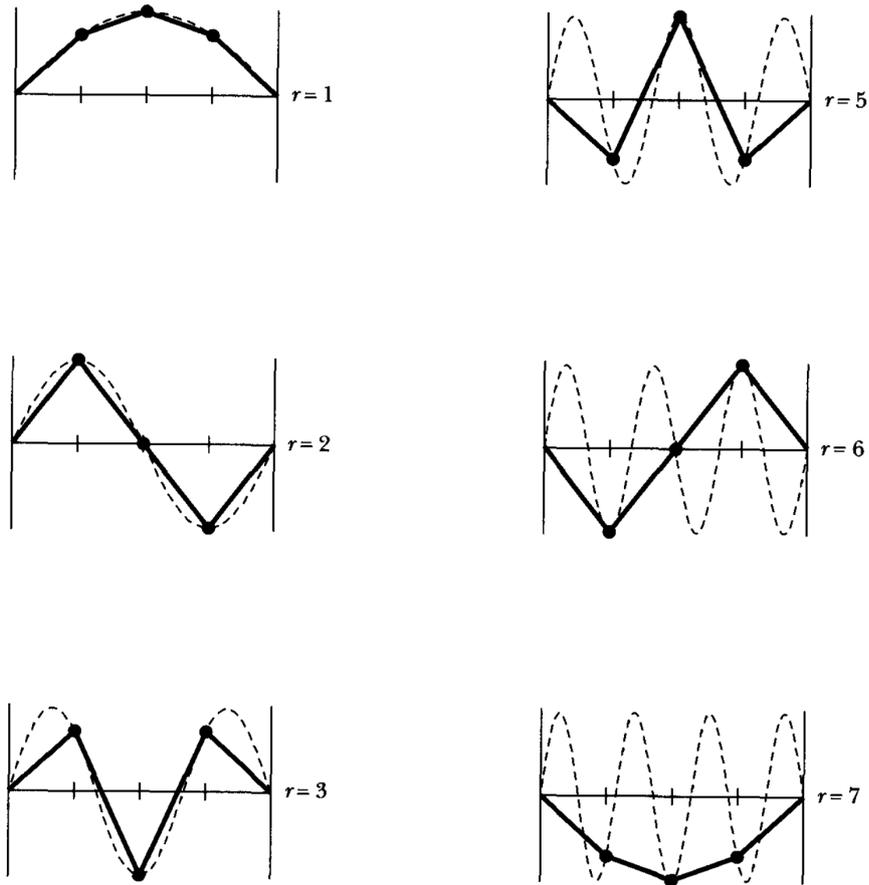
$$L = \frac{m}{2} \sum_{j=1}^n (\dot{\eta}_{j,x}^2 + \dot{\eta}_{j,y}^2) - \frac{\tau}{2a} \sum_{j=0}^n \left[ (\eta_{j+1,x} - \eta_{j,x})^2 + (\eta_{j+1,y} - \eta_{j,y})^2 \right]. \quad (4.35b)$$

Esta é a forma usualmente empregada para oscilações transversais em uma corda carregada.

Para ambas as Lagrangianas, as equações de Euler-Lagrange correspondentes são

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_{j,x}} - \frac{\partial L}{\partial \eta_{j,x}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_{j,y}} - \frac{\partial L}{\partial \eta_{j,y}} = 0, \end{cases} \text{ para } j = 1, \dots, n. \quad (4.35c)$$

Para ondas transversais com polarização linear (isto é, para oscilações onde  $\eta_{j,x} \neq 0$  e  $\eta_{j,y} = 0$  ou *vice-versa*), a solução das equações de movimento resultantes de (4.35a) seguem exatamente o mesmo procedimento detalhado na seção 4.4. A figura 4.12 mostra os oito primeiros modos normais de oscilações transversais lineares de uma corda uniforme carregada com  $n = 3$  partículas idênticas, como solução do exercício a seguir.



**Figura 4.12:** Modos normais de oscilações transversais para uma corda carregada com  $n = 3$  partículas. Somente os modos  $r = 1, 2, 3$  são distintos, porque os modos  $r = 4, 8, \dots$  são nulos e os modos  $r = 5, 6, 7$  são reproduções dos primeiros.

**Exercício 4.6.** Considere uma corda carregada composta por três partículas de massa  $m$  regularmente espaçadas sobre a corda, a qual exerce a mesma força de tensão sobre todas as partículas. No instante  $t = 0$ , somente a partícula central é deslocada por uma distância transversal  $h$  e liberada do repouso. Descreva o movimento subsequente.

*Resolução.* Sem perda de generalidade, pode-se assumir que o deslocamento inicial é realizado ao longo da direção  $y$ . Como os movimentos transversais são desacoplados, de acordo com (4.35c), resulta que  $\eta_{j,x}(t) = 0$ , para  $t > 0$  e  $j = 1, 2, 3$ . Assim, as condições iniciais ficam

$$\eta_{10} = \eta_{30} = 0, \quad \eta_{20} = h, \quad \dot{\eta}_{j0} = 0 \quad (j = 1, 2, 3),$$

onde o subscrito “ $y$ ” é suprimido. Da mesma forma, de (4.35a) a Lagrangiana do sistema fica

$$L = \frac{m}{2} \sum_{j=1}^3 \dot{\eta}_j^2 - \frac{\tau}{2a} \sum_{j=0}^3 (\eta_{j+1} - \eta_j)^2,$$

a qual é formalmente idêntica a (4.23) com a condição de contorno (A) (extremos fixos:  $\eta_0 = \eta_4 = 0$ ) e onde se identifica  $\kappa = \tau/a$ .

Portanto, as soluções das equações de movimento são dadas por (4.33),

$$\eta_j(t) = \sum_{r=1}^3 \rho_{jr} \xi_r(t), \quad \xi_r(t) = \mu_r \cos \omega_r t - \nu_r \sin \omega_r t, \quad \rho_{jr} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{jr\pi}{4}\right),$$

$$\omega_r = 2\omega_0 \sin\left(\frac{r\pi}{8}\right), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\tau}{ma}},$$

para  $(j, r = 1, 2, 3)$ . De acordo com as condições iniciais, conclui-se que  $\nu_r = 0$  ( $r = 1, 2, 3$ ) e

$$\mu_1 = \rho_{21} \eta_{20} = \frac{h}{\sqrt{2}}, \quad \mu_2 = \rho_{22} \eta_{20} = 0, \quad \mu_3 = \rho_{23} \eta_{20} = -\frac{h}{\sqrt{2}}.$$

Por sua vez, os possíveis valores de  $\sqrt{2}\rho_{jr}$  são mostrados na tabela abaixo:

$r=$	1	2	3
$j=$			
1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
2	1	0	-1
3	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

Portanto, as soluções são:

$$\begin{aligned}\eta_1(t) &= \frac{h}{2\sqrt{2}} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_3 t) \\ \eta_2(t) &= \frac{h}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_3 t) \\ \eta_3(t) &= \frac{h}{2\sqrt{2}} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_3 t),\end{aligned}$$

sendo

$$\omega_1 = 2\omega_0 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{8} \right) = \sqrt{2 - \sqrt{2}}\omega_0, \quad \omega_2 = \sqrt{2}\omega_0, \quad \omega_3 = 2\omega_0 \operatorname{sen} \left( \frac{3\pi}{8} \right) = \sqrt{2 + \sqrt{2}}\omega_0.$$

Observa-se que as condições iniciais são satisfeitas. Nota-se também que o segundo modo normal não é excitado. Os modos normais são ilustrados na figura 4.12.

## 4.6 A CORDA CONTÍNUA: INTRODUÇÃO A UMA TEORIA DE CAMPOS CLÁSSICOS

Será realizada nesta seção a transição de uma corda carregada, discutida na seção 4.5, para uma corda contínua, modelada como uma distribuição unidimensional contínua de massa.

O procedimento tradicional consiste em impor, sobre as quantidades definidas na seção 4.5, os limites  $m \rightarrow dm$ ,  $a \rightarrow dx$  e  $n \rightarrow \infty$ , de tal forma que  $ndx \rightarrow \ell$ , sendo  $\ell$  a extensão da corda, e  $m = \int dm = \int \lambda dx$  finita, sendo  $\lambda$  a densidade linear de massa. Contudo, ao invés desse procedimento usual, será aproveitada a oportunidade para se realizar uma breve introdução a uma teoria clássica de campos, a qual descreve a evolução dinâmica de um sistema clássico contínuo composto por um número infinito de graus de liberdade. A transição discreto  $\rightarrow$  contínuo será realizada sobre a Lagrangiana da corda carregada (4.35), de onde então será obtida a equação de movimento de uma corda contínua. Este procedimento alternativo servirá de modelo para a introdução dessa teoria de campo clássica.

### 4.6.1 A DENSIDADE LAGRANGIANA

Parte-se do sistema ilustrado pela figura 4.13, o qual representa uma corda carregada com  $N$  partículas, regularmente espaçadas ao longo da corda que possui extensão  $\ell$ . Todas as suposições que levam à Lagrangiana (4.35a) são supostas válidas; ou seja,

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \dot{\eta}_j^2 - \frac{1}{2a} \sum_{j=0}^N \tau_{j+1} (\eta_{j+1} - \eta_j)^2,$$

com  $\eta_0 = \eta_{N+1} = 0$  e onde, por simplicidade, foram assumidas oscilações somente ao longo de uma direção transversal.

A transição discreto  $\rightarrow$  contínuo será agora realizada sobre esta Lagrangiana. Escrevendo  $\Delta x = a$  e a posição de equilíbrio da  $j$ -ésima partícula como  $x_j = j\Delta x$  ( $j = 1, \dots, N$ ), sendo  $(N+1)\Delta x = \ell$ , realiza-se a troca de notação

$$\eta_j(t) \rightarrow \eta(x_j, t), \quad \dot{\eta}_j(t) \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \eta(x_j, t),$$

de tal forma que a Lagrangiana passa a ser escrita

$$L = \sum_{j=1}^N \Delta x \frac{1}{2} \frac{m_j}{\Delta x} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \eta(x_j, t) \right]^2 - \sum_{j=0}^N \Delta x \frac{\tau_{j+1}}{2} \left[ \frac{\eta(x_j + \Delta x, t) - \eta(x_j, t)}{\Delta x} \right]^2.$$

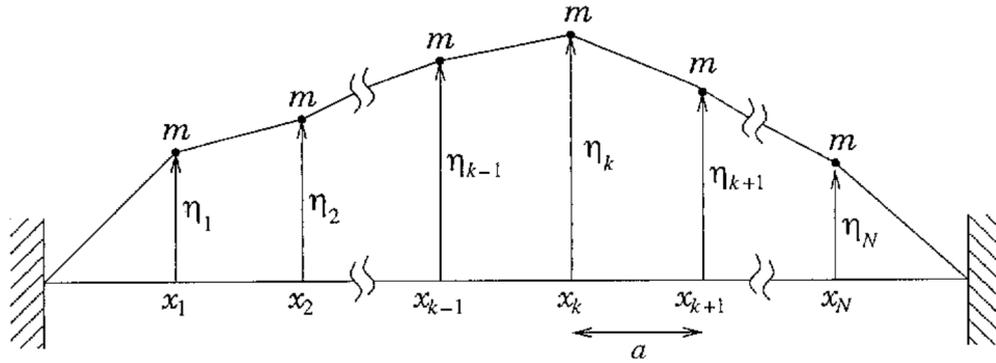


Figura 4.13: Oscilações transversais em uma corda carregada com extremos fixos.

Agora, o número total de partículas agregadas à corda passa a crescer de tal maneira que, à medida que \$N\$ aumenta, as massas individuais das mesmas, que passam a ser identificadas por \$\Delta m\_j\$, se reduzem na mesma proporção, mantendo a massa total da corda constante. Como a extensão da corda também permanece constante, isto implica que \$\Delta x\$ deve se reduzir também na mesma proporção. Considera-se então os seguintes processos de limite:

$$\lim_{\substack{\Delta m_j \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{\Delta m_j}{\Delta x} = \frac{dm}{dx} \doteq \lambda(x), \quad \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{j=0,1}^N \Delta x = \int_0^\ell dx, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\eta(x_j + \Delta x, t) - \eta(x_j, t)}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial x} \eta(x, t),$$

onde as posições discretas \$x\_j\$ (\$j = 1, \dots, N\$) passaram a ser referidas pela variável contínua \$0 \leq x \leq \ell\$ e a quantidade \$\lambda(x) = dm/dx\$ é a *densidade linear de massa* da corda. De acordo com este processo de limite, a densidade linear de massa da corda pode não ser constante ao longo da mesma. Da mesma forma, a tensão também pode não ser constante, quando então é realizada a transição \$\tau\_{j+1} \rightarrow \tau(x)\$.

Com este processo, a Lagrangiana passa a ser escrita

$$L = \int_0^\ell dx \mathcal{L} \left\{ \eta, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial t}; x, t \right\}, \tag{4.36}$$

$$\mathcal{L} \left\{ \eta, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial t}; x, t \right\} = \frac{1}{2} \lambda(x) \left[ \frac{\partial}{\partial t} \eta(x, t) \right]^2 - \frac{1}{2} \tau(x) \left[ \frac{\partial}{\partial x} \eta(x, t) \right]^2,$$

onde o funcional \$\mathcal{L} \{ \eta, \eta\_x, \eta\_t; x, t \}\$ é denominado **densidade Lagrangiana**, sendo introduzida também a notação

$$\eta_x = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \eta_t = \frac{\partial \eta}{\partial t}.$$

### 4.6.2 A INTEGRAL DE AÇÃO E A EQUAÇÃO DO CAMPO

Com a introdução da densidade Lagrangiana em (4.36), após um processo de transição de um sistema discreto de partículas para uma distribuição contínua de massa, a Lagrangiana deixa de conter a dinâmica de um sistema com um número finito de graus de liberdade para incluir a contribuição de um número infinito de coordenadas, através da integração da densidade Lagrangiana.

Ao final do mesmo processo, a quantidade \$\eta\_j = \eta\_j(t)\$ deixou de descrever o valor da coordenada da \$j\$-ésima partícula no instante \$t\$ e passou a ser escrita como a função de duas variáveis \$\eta = \eta(x, t)\$, a qual descreve a amplitude da oscilação transversal da corda na posição \$x\$ e no instante \$t\$. A quantidade \$x\$ não mais é uma variável dependente que varia com o tempo, passando a ser também uma variável independente. Diz-se então que \$\eta = \eta(x, t)\$ é o **campo de oscilações** da corda contínua e o formalismo teórico que resulta na densidade Lagrangiana \$\mathcal{L} \{ \eta, \eta\_x, \eta\_t; x, t \}\$ é denominado uma **teoria de campo**.

Introduzindo agora a Lagrangiana (4.36) na integral de ação (1.37), obtém-se

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \mathcal{L} \left\{ \eta, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial t}; x, t \right\}, \tag{4.37}$$

onde mudou-se os limites  $(0, \ell) \rightarrow (x_1, x_2)$  para que a integral (4.37), escrita como um funcional da densidade Lagrangiana  $\mathcal{L} \{ \eta, \eta_x, \eta_t; x, t \}$ , descreva de forma genérica a ação realizada pelo campo  $\eta = \eta(x, t)$  dentro do intervalo espacial  $x_1 \leq x \leq x_2$  e do intervalo de tempo  $t_1 \leq t \leq t_2$ . O formalismo responsável por este funcional visa descrever um campo com 1 + 1 dimensões (1 dimensão espacial mais o tempo), o qual é uma variável dependente no funcional, juntamente com suas derivadas primeiras. Dependendo do sistema físico, o funcional  $\mathcal{L}$  também pode depender explicitamente das variáveis independentes  $x$  e  $t$ .

Dentro do formalismo de uma teoria de campos, o Princípio de Hamilton originalmente apresentado na seção 1.4, deve ser ligeiramente modificado. O Princípio agora afirma que a condição de *extremum*  $\delta S = 0$  irá determinar a forma do campo  $\eta(x, t)$  dentre todas as variações possíveis na região  $x_1 \leq x \leq x_2$  e  $t_1 \leq t \leq t_2$  e que mantêm os extremos desta região fixos, *i. e.*, tais que

$$\delta \eta(x, t_1) = \delta \eta(x, t_2) = 0 \text{ e } \delta \eta(x_1, t) = \delta \eta(x_2, t) = 0.$$

Procedendo então com o cálculo de  $\delta S$  em (4.37),

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \delta \mathcal{L} \{ \eta, \eta_x, \eta_t; x, t \} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_x} \delta \eta_x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_t} \delta \eta_t \right). \end{aligned}$$

Lembrando que  $\delta \eta = \eta_2 - \eta_1$ , resulta

$$\delta \eta_x = \delta \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \frac{\partial \eta_2}{\partial x} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\eta_2 - \eta_1) = \frac{\partial}{\partial x} \delta \eta, \quad \delta \eta_t = \frac{\partial}{\partial t} \delta \eta.$$

Portanto,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_x} \frac{\partial}{\partial x} \delta \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_t} \frac{\partial}{\partial t} \delta \eta \right).$$

Integrando por partes os dois últimos termos,

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} dx \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_x} \frac{\partial}{\partial x} \delta \eta \right) &= \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_x} \delta \eta \right) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_x} \right) \delta \eta, \\ \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_t} \frac{\partial}{\partial t} \delta \eta \right) &= \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_t} \delta \eta \right) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_t} \right) \delta \eta. \end{aligned}$$

Introduzindo estes resultados de volta na expressão completa para  $\delta S$  e impondo a condição de *extremum*, resulta

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_t} \right) \right] \delta \eta = 0,$$

o que leva por fim à **equação do campo**

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_x} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_t} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0. \quad (4.38)$$

### 4.6.3 A EQUAÇÃO DA ONDA PARA UMA CORDA HOMOGÊNEA

Considera-se agora o caso particular de uma corda homogênea, para a qual  $\lambda = \text{cte.}$  e  $\tau = \text{cte.}$  Introduzindo a densidade Lagrangiana da corda contínua (4.36),

$$\mathcal{L} \{ \eta_x, \eta_t \} = \frac{1}{2} \lambda \eta_t^2 - \frac{1}{2} \tau \eta_x^2,$$

na equação de campo (4.38), observa-se que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_x} \right) = -\tau \eta_{xx} = -\tau \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_t} \right) = \lambda \eta_{tt} = \lambda \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2},$$

de onde resulta a **equação da onda**

$$\lambda \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \tau \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0. \quad (4.39)$$

As soluções desta equação e diversas generalizações da mesma serão consideradas em seções posteriores.

### 4.6.4 GENERALIZAÇÕES PARA UMA TEORIA DE CAMPOS CLÁSSICOS

Diversas generalizações para a densidade Lagrangiana (4.36) são possíveis. Esta Lagrangiana contém a dinâmica de um único campo clássico em um sistema com 1 + 1 dimensões. Uma generalização imediata para a mesma ocorre quando há  $N$  campos que evoluem em um espaço com 3+1 dimensões (espaço 3-D + tempo). Este tipo de generalização é útil para uma formulação Lagrangiana do eletromagnetismo, por exemplo.

Para tanto, considera-se o conjunto de campos  $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N\}$ , tais que

$$\eta_\alpha = \eta_\alpha(\mathbf{r}, t), \quad (\alpha = 1, \dots, N).$$

Se a densidade Lagrangiana associada a estes campos depender, no máximo, de suas derivadas primeiras, então a generalização de (4.36) fica

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left\{ \eta_1, \dots, \eta_N, \nabla\eta_1, \dots, \nabla\eta_N, \frac{\partial\eta_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial\eta_N}{\partial t}; \mathbf{r}, t \right\},$$

onde os campos existem em um volume  $V$  (possivelmente ilimitado) de espaço.

O Princípio de Hamilton aplicado a  $\mathcal{L}$  é formulado então como

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3r \delta \mathcal{L} \left\{ \eta_1, \dots, \eta_N, \nabla\eta_1, \dots, \nabla\eta_N, \frac{\partial\eta_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial\eta_N}{\partial t}; \mathbf{r}, t \right\} = 0.$$

Calculando a variação  $\delta\mathcal{L}$ , resulta

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3r \sum_{\alpha=1}^N \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_\alpha} \delta\eta_\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_{\alpha,t}} \delta\eta_{\alpha,t} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\eta_\alpha)} \cdot \delta(\nabla\eta_\alpha) \right\} = 0,$$

onde foram empregadas as notações  $\eta_{\alpha,t} = \partial\eta_\alpha/\partial t$ ,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\eta_\alpha)} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_{\alpha,x_k}} \hat{x}_k, \quad \delta(\nabla\eta_\alpha) = \sum_{k=1}^3 \delta\left(\frac{\partial\eta_\alpha}{\partial x_k}\right) \hat{x}_k,$$

onde  $\eta_{\alpha,x_k} = \partial\eta_\alpha/\partial x_k$ .

Nos dois últimos termos, pode-se realizar integrações por partes, sendo que as variações dos campos são, como sempre, assumidas nulas sobre o contorno; ou seja, se  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  é uma superfície Gaussiana que delimita o volume  $V$  dentro do qual os campos existem, então

$$\delta\eta_\alpha(\mathbf{r}, t)|_\Omega = 0, \text{ bem como } \delta\eta_\alpha(\mathbf{r}, t_1) = \delta\eta_\alpha(\mathbf{r}, t_2) = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, N).$$

Adicionalmente,

$$\delta\eta_{\alpha,t} = \frac{\partial}{\partial t}(\delta\eta_\alpha) \text{ e } \delta(\eta_{\alpha,x_k}) = \frac{\partial}{\partial x_k}(\delta\eta_\alpha).$$

Assim, para cada campo,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_{\alpha,t}} \delta\eta_{\alpha,t} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_{\alpha,t}} \delta\eta_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_{\alpha,t}} \delta\eta_\alpha.$$

Dada também a identidade  $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f$ ,

$$\begin{aligned} \int_V d^3r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\eta_\alpha)} \cdot \delta(\nabla\eta_\alpha) &= \int_V d^3r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\eta_\alpha)} \cdot \nabla(\delta\eta_\alpha) \\ &= \int_V d^3r \nabla \cdot \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\eta_\alpha)} \delta\eta_\alpha \right] - \int_V d^3r \nabla \cdot \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\eta_\alpha)} \delta\eta_\alpha \\ &= \oint_\Omega dS \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\eta_\alpha)} \cdot \hat{n} \delta\eta_\alpha - \int_V d^3r \nabla \cdot \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\eta_\alpha)} \delta\eta_\alpha \\ &= - \int_V d^3r \nabla \cdot \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\eta_\alpha)} \delta\eta_\alpha, \end{aligned}$$

onde foi empregado o teorema da divergência, sendo  $\hat{n}$  o vetor unitário que é ortogonal a cada ponto sobre a superfície  $\Omega$  e  $dS$  o elemento de superfície.

Portanto,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3r \sum_{\alpha=1}^N \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\alpha} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\alpha,t}} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \eta_\alpha)} \right\} \delta \eta_\alpha = 0.$$

Neste ponto deve ser retomada a discussão a respeito da existência de vínculos entre os diversos campos. A situação mais simples é quando não há vínculos, em cuja situação todas as variações são independentes, resultando daí o sistema de equações de campo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\alpha} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\alpha,t}} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \eta_\alpha)} = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, N). \quad (4.40)$$

Outras generalizações possíveis, dependendo do sistema físico em estudo podem ser:

- Campos vinculados; neste caso, a discussão sobre vínculos deve ser retomada.
- Densidades Lagrangianas que dependem de derivadas de mais alta ordem, *e. g.*,  $\partial^2 \eta_\alpha / \partial t^2$ .
- Integrais de ação com extremos não fixos:  $\delta \eta_\alpha(\mathbf{r}, t_1) \neq 0$ , *etc.* Este tipo de consideração é importante na análise das propriedades de simetria dos campos e suas leis de conservação (teorema de Noether).
- Teorias de campos nos formalismos da relatividade especial e geral (campos eletromagnéticos, gravitação).
- Teorias de campos quânticos.

O exemplo a seguir está relacionado com a última generalização e mostra como seria uma densidade Lagrangiana para a mecânica quântica não relativística.

**Exemplo 4.5 (Formulação Lagrangiana da mecânica quântica não relativística).** Seja  $\psi = \psi(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{C}$  a função de onda de uma partícula de massa  $m$  sob um potencial  $U = U(\mathbf{r}, t)$ . Assumindo que os campos  $\psi(\mathbf{r}, t)$  e  $\psi^*(\mathbf{r}, t)$  são independentes, a densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L}\{\psi, \psi^*, \psi_t, \nabla \psi, \nabla \psi^*; \mathbf{r}, t\} = i\hbar \psi^* \psi_t - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi \cdot \nabla \psi^* - U(\mathbf{r}, t) \psi \psi^*,$$

sendo  $\hbar = h/2\pi$  onde  $h$  é a constante de Planck, com as equações de campo dadas por (4.40), tem como resultados

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_t} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \psi)} = 0 &\implies -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + U(\mathbf{r}, t) \psi^* = -i\hbar \psi_t^* \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_t^*} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \psi^*)} = 0 &\implies -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U(\mathbf{r}, t) \psi = i\hbar \psi_t. \end{aligned}$$

Ou seja, as equações de campo geram a equação de Schroedinger e o seu complexo conjugado.

## 4.7 SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DA ONDA PARA A CORDA HOMOGÊNEA

Nesta seção alguns exemplos de soluções da equação (4.39). Esta equação será repetida abaixo, juntamente com as condições de contorno e com condições iniciais,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} &= 0, \\ \eta(0, t) = 0, \quad \eta(\ell, t) &= 0 \quad (\text{Condições de contorno}) \\ \eta(x, 0) = \Phi(x), \quad \frac{\partial \eta}{\partial t}(x, 0) &= \Psi(x) \quad (\text{Condições iniciais}). \end{aligned} \quad (4.41)$$

onde  $c = \sqrt{\tau/\lambda}$  é uma constante com a dimensão de velocidade e, não por coincidência, é a velocidade de propagação de uma perturbação transversal qualquer ao longo da corda.

O sistema (4.41) é um típico problema de Sturm-Liouville, onde a equação diferencial parcial é hiperbólica com condições de contorno de Dirichlet. A solução deste problema de contorno pode ser obtida com o emprego de vários métodos conhecidos, alguns dos quais serão discutidos abaixo.

### 4.7.1 MÉTODO DE FOURIER

O método de Fourier consiste em primeiro realizar uma separação de variáveis na equação parcial, obtendo-se assim equações diferenciais ordinárias, cujas soluções serão obtidas via séries de Fourier. Os coeficientes das séries de Fourier serão finalmente determinados com a imposições das condições iniciais e de contorno.

Propõe-se a seguinte forma de solução para a equação parcial,

$$\eta(x, t) = \chi(x) \psi(t).$$

Inserindo esta proposta em (4.41), resulta

$$\chi \ddot{\psi} - c^2 \chi'' \psi = 0 \implies \frac{\ddot{\psi}}{c^2 \psi} = \frac{\chi''}{\chi} = -k^2,$$

onde  $\dot{\psi} = d\psi/dt$ ,  $\chi' = d\chi/dx$ , etc. Seguindo o procedimento usual do método de separação de variáveis, na última expressão, como o termo do lado esquerdo é uma função somente do tempo e o termo no centro somente depende de  $x$ , então a igualdade somente será válida para todos os valores de  $x$  e  $t$  se ambos os lados forem iguais a uma constante, identificada por  $-k^2$ . Resultam assim as equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} + k^2 c^2 \psi &= 0 \\ \chi'' + k^2 \chi &= 0. \end{aligned}$$

Realizando a mesma separação das condições de contorno, resulta

$$\chi(0) = 0, \quad \chi(\ell) = 0.$$

Isto já é o suficiente para se obter a solução da parte espacial da equação da onda. A solução geral da equação para  $\chi(x)$  é

$$\chi(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx).$$

Impondo as condições de contorno, resultam

$$\chi(0) = A = 0, \quad \chi(\ell) = B \sin(k\ell) = 0.$$

Para que a solução não seja trivial (quando  $B = 0$ ), é necessário que

$$\sin(k\ell) = 0 \implies k_r = \frac{r\pi}{\ell}, \quad (r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Portanto, há uma infinidade de soluções possíveis para a parte espacial,

$$\chi_r(x) = B_r \sin(k_r x), \quad (r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

As constantes  $\{B_r\}$  ainda devem ser determinadas.

Considera-se agora a parte temporal. A solução geral da equação correspondente é

$$\psi(t) = C \cos(kct) + D \sin(kct) \xrightarrow{k=k_r} \psi_r(t) = \mu_r \cos(k_r ct) - \nu_r \sin(k_r ct), \quad (r = 0, \pm 1, \dots),$$

onde foi levada em conta a existência de infinitos valores possíveis para  $k$ , o que implica que existem também infinitas soluções possíveis para a parte temporal.

Absorvendo as constantes indeterminadas  $\{B_r\}$  nas constantes da parte temporal, a solução mais geral possível do sistema (4.41), a qual satisfaz tanto a equação diferencial quanto as condições de contorno resulta

$$\eta(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} [\mu_r \cos(k_r ct) - \nu_r \sin(k_r ct)] \sin(k_r x). \quad (4.42a)$$

A esta solução serão impostas finalmente as condições iniciais, obtendo-se assim o sistema

$$\begin{aligned} \eta(x, 0) &= \sum_{r=1}^{\infty} \mu_r \sin(k_r x) = \Phi(x) \\ \frac{\partial \eta}{\partial t}(x, 0) &= - \sum_{r=1}^{\infty} c k_r \nu_r \sin(k_r x) = \Psi(x). \end{aligned}$$

Sabendo que

$$\int_0^\ell dx \operatorname{sen}(k_r x) \operatorname{sen}(k_m x) = \int_0^\ell dx \operatorname{cos}(k_r x) \operatorname{cos}(k_m x) = \frac{1}{2} \ell \delta_{rm}, \quad (4.42b)$$

os coeficientes da série de Fourier resultam

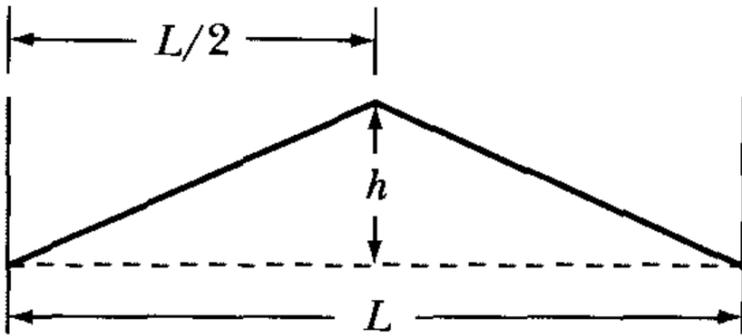
$$\mu_r = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell dx \Phi(x) \operatorname{sen}(k_r x), \quad \nu_r = -\frac{2}{\ell \omega_r} \int_0^\ell dx \Psi(x) \operatorname{sen}(k_r x), \quad (4.42c)$$

onde

$$\omega_r = k_r c = \frac{r\pi}{\ell} c, \quad (r = 1, \dots, \infty)$$

são as autofrequências dos modos normais de oscilação da corda.

**Exercício 4.7.** Encontre o deslocamento  $\eta(x, t)$  de uma corda de extensão  $L$  que é “dedilhada”, isto é, deslocada transversalmente de sua configuração de equilíbrio no centro da mesma por uma distância  $h$  e liberada do repouso, conforme ilustrado na figura 4.14.



**Figura 4.14:** Uma corda de extensão  $L$  é deslocada transversalmente a partir do seu centro por uma distância  $h$  e liberada do repouso.

*Resolução.* Para se obter o deslocamento  $\eta(x, t)$  emprega-se o método de Fourier. Para tanto, é necessário determinar primeiro as condições iniciais, de acordo com a ilustração da figura 4.14. Estas condições iniciais são

$$\eta(x, 0) = \Phi(x) = \begin{cases} \frac{2h}{L}x, & 0 \leq x \leq \frac{L}{2}, \\ \frac{2h}{L}(L-x), & \frac{L}{2} < x \leq L. \end{cases}$$

$$\eta_t(x, 0) = \Psi(x) = 0.$$

De acordo com (4.42c),  $\nu_r = 0$  e

$$\mu_r = \frac{4h}{L^2} \left[ \int_0^{L/2} dx x \operatorname{sen}(k_r x) + \int_{L/2}^L dx (L-x) \operatorname{sen}(k_r x) \right] \implies \mu_r = \frac{8h}{r^2 \pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{r\pi}{2}\right).$$

Ou seja,

$$\mu_r = \begin{cases} 0, & r \text{ par} \\ (-1)^{(r-1)/2} \frac{8h}{r^2 \pi^2}, & r \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Portanto, de acordo com (4.42a), o deslocamento subsequente da corda é dado por

$$\eta(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r+1)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{(2r+1)\pi}{L}x\right) \operatorname{cos}(\omega_{2r+1}t)$$

$$= \frac{8h}{\pi^2} \left[ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right) \operatorname{cos}(\omega_1 t) - \frac{1}{9} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{L}x\right) \operatorname{cos}(\omega_3 t) + \frac{1}{25} \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{L}x\right) \operatorname{cos}(\omega_5 t) + \dots \right],$$

onde as autofrequências são dadas por  $\omega_r = r\pi c/L$ .

A solução mostra que somente o modo fundamental (com frequência  $\omega_1 = \pi c/L$ ) e harmônicos ímpares ( $\omega_3, \omega_5, \dots$ ) são excitados, mas nenhum harmônico par ( $\omega_2, \omega_4, \dots$ ). Isto ocorre porque a corda foi deslocada no seu centro de simetria e, portanto, o movimento subsequente também deve ser simétrico, resultando que nenhum harmônico par será excitado. Em geral, se a corda é deslocada em um ponto arbitrário, nenhum dos harmônicos com nodos nesse ponto será excitado.

### 4.7.2 A ENERGIA DE UMA CORDA OSCILANTE

Como não há forças dissipativas nem motrizes no modelo adotado para a corda homogênea em (4.41), a energia total de uma corda em oscilação deve permanecer constante. Para determinar a energia total, parte-se da expressão (4.42a) para o deslocamento da corda, escrita como

$$\eta(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \psi_r(t) \operatorname{sen}(k_r x), \text{ sendo } \psi_r(t) = \mu_r \cos(\omega_r t) - \nu_r \operatorname{sen}(\omega_r t).$$

A energia cinética total da corda em cada ponto  $x$  e em cada instante  $t$  pode ser determinada pela energia cinética de um elemento infinitesimal de massa  $dm = \lambda dx$  no ponto  $x$  e no instante  $t$ , ou seja,

$$dT = \frac{1}{2} \lambda dx \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2. \quad (4.43a)$$

Integrando esta expressão ao longo da extensão da corda, resulta a energia cinética total

$$T = \frac{1}{2} \lambda \int_0^\ell \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \lambda \int_0^\ell \left[ \sum_{r=1}^{\infty} \dot{\psi}_r(t) \operatorname{sen}(k_r x) \right]^2 dx = \frac{1}{2} \lambda \sum_{r,s=1}^{\infty} \dot{\psi}_r \dot{\psi}_s \int_0^\ell \operatorname{sen}(k_r x) \operatorname{sen}(k_s x) dx.$$

A integral remanescente é dada por (4.42b), de onde resulta então

$$T(t) = \frac{1}{4} \lambda \ell \sum_{r=1}^{\infty} \dot{\psi}_r^2 = \frac{1}{4} \lambda \ell \sum_{r=1}^{\infty} \omega_r^2 [\mu_r \operatorname{sen}(\omega_r t) + \nu_r \cos(\omega_r t)]^2.$$

Para derivar a expressão da energia potencial elástica da corda, retorna-se à expressão (4.34) para a corda carregada uniforme, restringindo o movimento para somente uma direção transversal. Neste caso, pode-se escrever

$$U = \sum_{j=0}^n U_{j,j+1}, \text{ sendo } U_{j,j+1} = \frac{1}{2} \tau \left( \frac{\eta_{j+1} - \eta_j}{a} \right)^2 a.$$

Realizando o processo de transição discreto  $\rightarrow$  contínuo, escreve-se  $a = \Delta x$ ,  $\eta_j = \eta(x, t)$  e  $U_{j,j+1} = \Delta U(x, t)$  e realiza-se o processo de limite  $\Delta x \rightarrow 0$  e  $n \rightarrow \infty$ , de onde resulta

$$dU = \frac{1}{2} \tau \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 dx \implies U = \frac{1}{2} \tau \int_0^\ell \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (4.43b)$$

onde novamente foi assumida uma corda homogênea. Ou seja,

$$U = \frac{1}{2} \tau \sum_{r,s=1}^{\infty} k_r k_s \psi_r \psi_s \int_0^\ell \cos(k_r x) \cos(k_s x) dx \xrightarrow{(4.42b)} U = \frac{1}{4} \tau \ell \sum_{r=1}^{\infty} k_r^2 \psi_r^2,$$

a qual pode ser escrita como

$$U(t) = \frac{1}{4} \lambda \ell \sum_{r=1}^{\infty} \omega_r^2 [\mu_r \cos(\omega_r t) - \nu_r \operatorname{sen}(\omega_r t)]^2.$$

Portanto, a energia total da corda oscilante é

$$E = T(t) + U(t) = \frac{1}{4} \lambda \ell \sum_{r=1}^{\infty} \omega_r^2 \left\{ [\mu_r \operatorname{sen}(\omega_r t) + \nu_r \cos(\omega_r t)]^2 + [\mu_r \cos(\omega_r t) - \nu_r \operatorname{sen}(\omega_r t)]^2 \right\}.$$

Expandindo os quadrados e simplificando, resulta finalmente

$$E = \frac{1}{4} \lambda \ell \sum_{r=1}^{\infty} \omega_r^2 (\mu_r^2 + \nu_r^2).$$

Ou seja, a energia total é constante e dada em pela soma das contribuições de todos os modos normais de oscilação.

Em muitas situações, é conveniente calcular-se as *médias temporais* das energias cinética e potencial, obtidas pelo cálculo do valor médio destas quantidades ao longo de um período fundamental de oscilação  $T_1 = 2\pi/\omega_1$ . Estas médias ficam então

$$\langle T \rangle = \frac{\omega_1}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_1} dt T(t) = \frac{\omega_1}{2\pi} \frac{1}{4} \lambda \ell \sum_{r=1}^{\infty} \omega_r^2 \int_0^{2\pi/\omega_1} dt [\mu_r \sin(\omega_r t) + \nu_r \cos(\omega_r t)]^2$$

$$\langle U \rangle = \frac{\omega_1}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_1} dt U(t) = \frac{\omega_1}{2\pi} \frac{1}{4} \lambda \ell \sum_{r=1}^{\infty} \omega_r^2 \int_0^{2\pi/\omega_1} dt [\mu_r \cos(\omega_r t) - \nu_r \sin(\omega_r t)]^2.$$

Uma vez que

$$\int_0^{2\pi/\omega_1} dt \sin^2(\omega_r t) = \int_0^{2\pi/\omega_1} dt \cos^2(\omega_r t) = \frac{\pi}{\omega_1}, \quad \int_0^{2\pi/\omega_1} dt \sin(\omega_r t) \cos(\omega_r t) = 0,$$

resulta

$$\langle T \rangle = \langle U \rangle = \frac{1}{8} \lambda \ell \sum_{r=1}^{\infty} \omega_r^2 (\mu_r^2 + \nu_r^2) = \frac{1}{2} E.$$

Ou seja, os valores médios das energias cinética e potencial da corda oscilante são os mesmos, e ambos equivalem à metade da energia total. Este resultado é um caso particular do teorema do Virial, discutido na seção 2.3.1, para um sistema de partículas em um poço de potencial elástico, ou seja, com  $U(r) \propto Ar^2$  ( $n = -2$ ).

### 4.7.3 SOLUÇÃO GERAL: MÉTODO DE CAUCHY

Como se sabe, de acordo com a teoria das equações diferenciais parciais de segunda ordem, a equação da onda (4.41) é uma equação hiperbólica. Empregando o método das características, as curvas características desta equação são determinadas pelo sistema

$$dx - c dt = 0 \implies x - ct = \xi$$

$$dx + c dt = 0 \implies x + ct = \zeta,$$

onde  $\xi$  e  $\zeta$  são constantes ao longo das características.

Isto significa que ao se realizar a troca de variáveis  $(x, t) \rightarrow (\xi, \zeta)$  em (4.41), resulta

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} = \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial \zeta},$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} = -c \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + c \frac{\partial \eta}{\partial \zeta},$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} \right) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta^2},$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} \right) - c^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} - c \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} \right) = c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \partial \zeta} + c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta^2}.$$

Substituindo na equação, resulta

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \partial \zeta} = 0,$$

a qual é a forma canônica da equação da onda.

A solução geral da forma canônica é

$$\eta(\xi, \zeta) = f(\xi) + g(\zeta),$$

sendo  $f(\xi)$  e  $g(\zeta)$  funções quaisquer das características. Portanto, a solução geral de (4.41) sempre pode ser escrita como

$$\eta(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct). \quad (4.44)$$

A solução geral (4.44) mostra que, independente das condições de contorno ou das condições iniciais, qualquer oscilação transversal que ocorra ao longo de uma corda contínua homogênea

pode ser decomposta em dois sinais que se propagam ao longo da corda com a mesma velocidade  $c = \sqrt{\tau/\lambda}$ ; um dos sinais se propaga no sentido positivo e o outro no sentido negativo.

Para melhor compreender essa solução, toma-se o caso particular onde as condições de contorno e iniciais são tais que em uma fração  $\Delta x < \ell$  da corda somente ocorra a solução  $f(x - ct)$ , durante um certo intervalo de tempo  $\Delta t$ . Para um determinado par  $(x_0, t_0)$  contido neste intervalo, se  $\xi_0 = x_0 - ct_0$ , a amplitude da perturbação possui um certo valor  $f = f_0$ , dado por  $f_0 = f(\xi_0)$ . Percebe-se então que se a quantidade  $\xi_0$  permanecer constante, então a perturbação terá sempre o mesmo valor  $f_0$ . Isto ocorre porque para um instante  $t = t_1 > t_0$ , o mesmo valor para  $\xi = \xi_0$  irá ocorrer no ponto  $x = x_1 > x_0$ , desde que  $\xi_0 = x_1 - ct_1$ . Ou seja, a perturbação  $f_0 = f(\xi_0)$  irá se deslocar ao longo da corda no sentido positivo com uma velocidade tal que  $\xi_0 = \text{cte}$ . Esta velocidade é obtida derivando-se no tempo  $d\xi/dt = 0 = dx/dt - c$ ; ou seja,  $v_{\text{sinal}} = c$ . A mesma interpretação vale para qualquer outro valor da constante  $\xi$  e, portanto, a solução  $f(x - ct)$  corresponde a um certo pulso com forma arbitrária que se propaga no sentido positivo com velocidade  $v_{\text{sinal}} = c$ . Esta interpretação pode ser repetida para a função  $g(x + ct)$ , porém, neste caso, o pulso se propaga no sentido negativo com velocidade  $v_{\text{sinal}} = -c$ .

Portanto, a solução geral da onda, em qualquer ponto da corda e em qualquer instante de tempo, sempre pode ser escrita como uma combinação de dois pulsos contrapropagantes que se deslocam com a mesma velocidade. A figura 4.15 ilustra esta conclusão.

Pode-se mostrar facilmente que a solução de ondas estacionárias (4.42), obtida após a imposição das condições de contorno e iniciais, pode ser decomposta em dois pulsos contrapropagantes. Empregando as identidades

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)], \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)], \end{aligned}$$

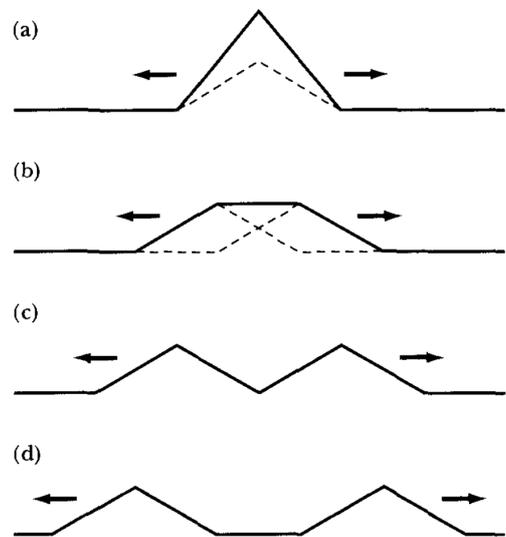
observa-se que, de fato,

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{r=1}^{\infty} [\mu_r \sin k_r(x - ct) - \nu_r \cos k_r(x - ct)]}_{f(x-ct)} \\ &+ \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{r=1}^{\infty} [\mu_r \sin k_r(x + ct) + \nu_r \cos k_r(x + ct)]}_{g(x+ct)}. \end{aligned}$$

Também é interessante observar que

$$\begin{aligned} \eta(0, t) &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} [-\mu_r \sin k_r ct - \nu_r \cos k_r ct] + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} [\mu_r \sin k_r ct + \nu_r \cos k_r ct] = 0, \\ \eta(\ell, t) &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} [\mu_r \sin k_r(\ell - ct) - \nu_r \cos k_r(\ell - ct)] + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} [\mu_r \sin k_r(\ell + ct) + \nu_r \cos k_r(\ell + ct)] = 0. \end{aligned}$$

Ou seja, as condições de contorno são sempre satisfeitas.



**Figura 4.15:** Propagação de um pulso ao longo de uma corda em distintos instantes. Em (a),  $f(x - ct) = g(x + ct)$ . Em (b) - (d), os pulsos individuais  $f(x - ct)$  e  $g(x + ct)$  gradativamente se tornam distinguíveis, à medida que o tempo passa.

## 4.8 MOVIMENTO FORÇADO OU AMORTECIDO DA CORDA HOMOGÊNEA

As soluções discutidas na seção 4.7 prevêm que, dada uma perturbação inicial, a oscilação resultante permanecerá ocorrendo para todos os instantes posteriores. Em um sistema mais realístico, isto em geral não será verdade; é muito provável que ocorra a ação de algum mecanismo dissipativo que irá gradativamente reduzir a amplitude das oscilações até a corda retornar ao equilíbrio. Um exemplo comum ocorre quando uma corda oscila em um fluido ou no ar.

Nesta seção será apresentado um modelo que permite uma descrição um pouco mais realística da oscilação de uma corda homogênea. O mesmo formalismo pode ser empregado quando existe também um agente externo que serve como força motriz atuando sobre a corda.

Retornando à Lagrangiana da corda carregada homogênea (4.35b), considera-se a situação onde as partículas oscilantes ( $j = 1, \dots, n$ ) são submetidas a forças motrizes e/ou dissipativas, conforme discutido na seção 1.7.2.

Desta forma, supõe-se que a  $j$ -ésima partícula é submetida a uma força generalizada (não potencial)

$$Q_j = Q_j(\eta_j, \dot{\eta}_j, t).$$

Neste caso, de acordo com (1.51), as equações de Euler-Lagrange (4.35c) são transformadas para

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_j} - \frac{\partial L}{\partial \eta_j} = Q_j(\eta_j, \dot{\eta}_j, t), \quad (j = 1, \dots, n),$$

onde, por simplicidade, considerou-se somente oscilações em um plano.

A forma final das equações de movimento depende da forma das forças generalizadas  $Q_j$ . Para obter expressões representativas de situações realísticas, supõe-se agora que cada partícula ao longo da corda pode ser submetida tanto a uma força motriz, que depende da posição da partícula ao longo da corda e que depende explicitamente do tempo, e também que o sistema oscila em um meio viscoso homogêneo, o qual gera uma força de resistência proporcional à velocidade de cada partícula; ou seja,

$$Q_j = F_j(t) - g\dot{\eta}_j,$$

sendo  $F_j(t)$  a força motriz aplicada à  $j$ -ésima partícula e  $g$  uma constante. Assim, resultam as equações

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_j} - \frac{\partial L}{\partial \eta_j} = F_j(t) - g\dot{\eta}_j, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (4.45)$$

As equações de movimento acima descrevem corretamente a dinâmica das partículas, mas esta formulação do problema não é adequada para se realizar a transição de uma corda carregada para uma corda contínua executando oscilações (possivelmente forçadas) em um meio viscoso.

Uma maneira equivalente de se formular a descrição Lagrangiana deste problema e que permite a transição discreto  $\rightarrow$  contínuo parte da Lagrangiana de Bateman associada. De acordo com esta formulação, a Lagrangiana (4.35b) é modificada para a forma

$$\bar{L} = \left[ \frac{m}{2} \sum_{k=1}^n \dot{\eta}_k^2 - \frac{\tau}{2a} \sum_{k=0}^n (\eta_{k+1} - \eta_k)^2 + \sum_{k=1}^n \eta_k F_k(t) \right] e^{gt/m}, \quad (4.46)$$

onde para simplificar restringiu-se ao movimento planar das partículas. Percebe-se que nesta formulação as ações das forças motrizes e dissipativas são incorporadas à Lagrangiana.

Aplicando então as equações de Euler-Lagrange à Lagrangiana de Bateman (4.46),

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\eta}_j} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \eta_j} = 0, \quad (j = 1, \dots, n),$$

resultam as equações de movimento

$$m\ddot{\eta}_j + g\dot{\eta}_j - \frac{\tau}{a}(\eta_{j-1} - 2\eta_j + \eta_{j+1}) = F_j(t), \quad (j = 1, \dots, n),$$

as quais se reduzem a (4.24) no caso particular  $g = 0$  e  $F_j(t) = 0$ . Verifica-se facilmente também que as mesmas equações de movimento são obtidas a partir de (4.45).

Para realizar agora a transição discreto  $\rightarrow$  contínuo na Lagrangiana (4.46), procede-se às transformações usuais

$$m \rightarrow \Delta m, \quad a \rightarrow \Delta x, \quad ja \rightarrow x, \quad \eta_j(t) \rightarrow \eta(x, t) \text{ e } \dot{\eta}_j(t) \rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial t},$$

com  $\lambda = \Delta m / \Delta x = \text{cte}$ . Além disso, devem ser realizadas as seguintes considerações:

1. Força resistiva  $f_{\text{visc},j} = g\dot{\eta}_j$ : a constante  $g$  deve ser proporcional à seção reta da  $j$ -ésima partícula durante o seu movimento no fluido viscoso. Assim, à medida que  $\Delta m \rightarrow 0$ , essa seção reta também deve tender a zero. Por esta razão, escreve-se  $g \rightarrow \Delta g$ , de tal forma que

$$D \doteq \frac{1}{2} \lim_{\substack{\Delta m \rightarrow 0 \\ \Delta g \rightarrow 0}} \frac{\Delta g}{\Delta m} = \text{cte.}$$

é uma constante de amortecimento, resultante do movimento da corda em um meio resistivo.

2. Força motriz  $F_j(t)$ : novamente, como  $\Delta m \rightarrow 0$ , a força motriz sobre cada partícula também deve possuir o mesmo limite. Substitui-se então  $F_j(t) \rightarrow \Delta F_j(t)$ , de tal forma que existe o limite

$$f(x, t) \doteq \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta F_j(t)}{\Delta m},$$

sendo  $f(x, t)$  uma força motriz por unidade de massa aplicada à corda.

A partir das considerações acima, escreve-se inicialmente a Lagrangiana (4.46) como

$$\bar{L} = \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Delta x \lambda \dot{\eta}_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \Delta x \tau \left( \frac{\eta_{k+1} - \eta_k}{\Delta x} \right)^2 + \sum_{k=1}^n \Delta x \lambda \eta_k \frac{\Delta F_k(t)}{\Delta m} \right] e^{\Delta g t / \Delta m}.$$

Aplicando os limites  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta m \rightarrow 0$ ,  $\Delta g \rightarrow 0$ ,  $\Delta F_k \rightarrow 0$ , resulta então

$$\bar{L} = \int_0^\ell dx \bar{\mathcal{L}} \{ \eta, \eta_x, \eta_t; x, t \}, \quad (4.47a)$$

sendo

$$\bar{\mathcal{L}} \{ \eta, \eta_x, \eta_t; x, t \} = \left[ \frac{1}{2} \lambda \eta_t^2 - \frac{1}{2} \tau \eta_x^2 + \lambda f(x, t) \eta \right] e^{2Dt} \quad (4.47b)$$

a densidade Lagrangiana da corda contínua em um meio viscoso e submetida a uma força motriz.

As equações de campo resultam então em:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \eta_t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \eta_x} - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \eta} = 0,$$

levando a

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + 2D \frac{\partial \eta}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (4.48a)$$

sendo esta última a equação da onda para oscilações transversais da corda com amortecimento e força externa.

Para se resolver a equação (4.48a) com as condições de contorno/iniciais

$$\begin{aligned} \eta(0, t) = \eta(\ell, t) &= 0, \\ \eta(x, 0) = \Phi(x) \quad \eta_t(x, 0) &= \Psi(x), \end{aligned} \quad (4.48b)$$

propõe-se a solução

$$\eta(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \eta_r(t) \text{sen}(k_r x), \text{ sendo novamente } k_r = \frac{r\pi}{\ell},$$

a qual automaticamente satisfaz as condições de contorno. Inserindo essa solução na equação, resulta

$$\sum_{r=1}^{\infty} (\ddot{\eta}_r + 2D\dot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r) \text{sen}(k_r x) = f(x, t), \text{ com } \omega_r = k_r c.$$

Multiplicando ambos os lados por  $\text{sen}(k_s x)$  e integrando, resulta

$$\sum_{r=1}^{\infty} (\ddot{\eta}_r + 2D\dot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r) \underbrace{\int_0^\ell dx \text{sen}(k_r x) \text{sen}(k_s x)}_{\frac{\ell}{2} \delta_{rs}} = \underbrace{\int_0^\ell dx f(x, t) \text{sen}(k_s x)}_{f_s(t)},$$

$$\ddot{\eta}_r + 2D\dot{\eta}_r + \omega_r^2\eta_r = \frac{2}{\ell}f_r(t), \quad (4.49)$$

sendo  $f_r(t)$  a componente de  $f(x, t)$  que atua como um agente motriz sobre o  $r$ -ésimo modo normal de oscilação. A equação para  $\eta_r(t)$  pode ser resolvida com os métodos usuais para EDOs.

**Exercício 4.8.** Descreva o movimento de uma corda homogênea de extensão  $\ell$  que parte do repouso e é submetida a uma força motriz sinusoidal com frequência angular  $\omega$ , aplicada no ponto  $x = \ell/2$ .

**Resolução.** O primeiro passo consiste em resolver a EDO (4.49). Para tanto, primeiramente, a força motriz por unidade de massa  $f(x, t)$  deve ser escrita

$$f(x, t) = f_0 \operatorname{sen}(\omega t) \delta\left(x - \frac{\ell}{2}\right).$$

Neste caso, a força por modo normal resulta

$$f_r(t) = \int_0^\ell dx f(x, t) \operatorname{sen}(k_r x) = f_0 \operatorname{sen}(\omega t) \operatorname{sen}\left(k_r \frac{\ell}{2}\right).$$

Nota-se que  $f_r(t) = 0$  para  $r = 2, 4, 6, \dots$ . Portanto, a EDO (4.49) fica

$$\ddot{\eta}_r + 2D\dot{\eta}_r + \omega_r^2\eta_r = \underbrace{\frac{2}{\ell}f_0 \operatorname{sen}\left(k_r \frac{\ell}{2}\right)}_{C_r} \operatorname{sen}(\omega t).$$

A EDO acima é resolvida empregando-se o método de variação de parâmetros. Em primeiro lugar, a equação homogênea associada tem como solução

$$\ddot{\eta}_{r,h} + 2D\dot{\eta}_{r,h} + \omega_r^2\eta_{r,h} = 0 \rightsquigarrow \eta_{r,h}(t) = \left(A_r e^{-\sqrt{D^2 - \omega_r^2}t} + B_r e^{\sqrt{D^2 - \omega_r^2}t}\right) e^{-Dt}.$$

Observa-se que ambas as soluções LI são amortecidas, com os três tipos possíveis de amortecimento,

**Subamortecimento:**  $D < \omega_r$ ;

**Amortecimento crítico:**  $D = \omega_r$ ;

**Superamortecimento:**  $D > \omega_r$ ;

ocorrendo para diferentes modos normais; ou seja, o regime passa de subamortecido para superamortecido no modo normal  $\bar{r}$  dado por

$$\omega_r = k_r c = D \Rightarrow \bar{r} = \frac{\ell D}{\pi c}.$$

Então, com o método de variação de parâmetros, pode-se mostrar que a solução geral da EDO acima é

$$\eta_r(t) = A_r e^{-(D+\gamma_r)t} + B_r e^{-(D-\gamma_r)t} + \eta_r^{(p)}(t), \text{ sendo } \gamma_r = \sqrt{D^2 - \omega_r^2} \text{ e}$$

$$\eta_r^{(p)}(t) = \frac{C_r \operatorname{sen}(\omega t - \phi_r)}{\sqrt{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + 4D^2\omega^2}}, \text{ com } \tan \phi_r = \frac{2\omega D}{\omega_r^2 - \omega^2}.$$

Observa-se que os dois primeiros termos correspondem a oscilações transientes amortecidas e, após um intervalo suficientemente longo de tempo, a oscilação do  $r$ -ésimo modo normal é dada simplesmente por  $\eta_r^{(p)}(t)$ . Portanto, após esse intervalo de tempo, a oscilação da corda será dada por

$$\eta(x, t) = \frac{2}{\ell} f_0 \sum_{r=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{r\pi}{2}\right) \frac{\operatorname{sen}(k_r x) \operatorname{sen}(\omega t - \phi_r)}{\sqrt{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + 4D^2\omega^2}}.$$

Observa-se também que há uma dependência complicada no denominador, o qual pode se aproximar da ressonância para o modo normal  $\bar{r}$ , tal que

$$(\omega_{\bar{r}}^2 - \omega^2)^2 + 4D^2\omega^2 = 0.$$

Mesmo que a ressonância não ocorra, somente um número finito de modos normais, situados próximos ao mínimo do denominador, são os que dominam o movimento da corda.

## 4.9 EQUAÇÃO DA ONDA EM MEIOS DISPERSIVOS

Uma outra maneira de se obter a solução geral da equação da onda consiste no emprego de transformações integrais, em particular as transformações de Fourier ou Laplace. O método das transformadas integrais é muito poderoso, pois permite resolver o problema da corda contínua em situações onde os métodos discutidos na seção 4.7 não são válidos. Um ampla classe de situações onde os métodos anteriores não podem ser aplicados, mas que podem ser abordados empregando transformações integrais ocorre quando a corda ou o ambiente que rodeia a corda são modificados de tal forma que a mesma se torna um meio dispersivo. Alguns casos de interesse empregando este método serão discutidos nesta seção.

### 4.9.1 MEIO NÃO DISPERSIVO; MÉTODO DAS TRANSFORMADAS INTEGRAIS

Retornando à equação da onda no vácuo,

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0,$$

a sua solução empregando o método de transformações integrais será discutida como introdução ao assunto.

Dada a solução  $\eta(x, t)$ , define-se a função dual no espaço de Fourier

$$\eta(k, \omega) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(x, t) e^{-i(kx - \omega t)}, \quad (4.50a)$$

desde que estas integrais existam. A correspondente transformação inversa é, portanto,

$$\eta(x, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint dk d\omega \eta(k, \omega) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (4.50b)$$

a qual também é suposta existente. Os limites de integração na expressão acima dependem das considerações que serão realizadas abaixo.

A solução da equação da onda escrita na forma (4.50b) permite uma generalização do conceito de modos normais de oscilação introduzido na seção 4.3.1 para um conjunto finito de osciladores acoplados. Agora, a solução da equação da onda da corda contínua será composta pela soma de (em princípio) infinitos modos normais

$$\eta_{k\omega}(x, t) = \eta(k, \omega) e^{i(kx - \omega t)},$$

distinguidos pelas quantidades  $k$  e  $\omega$ . A função  $\eta_{k\omega}(x, t)$  descreve a propagação de um modo normal em particular, onde a quantidade  $\eta(k, \omega)$  é a amplitude do modo normal,  $k$  é o **número de onda**, o qual se relaciona com o comprimento da onda  $\lambda$  pela relação  $\lambda = 2\pi/k$  e  $\omega$  é a frequência angular da onda, relacionada com a frequência  $f$  e o período  $T$  da mesma por  $f = \omega/2\pi$  e  $T = 2\pi/\omega$ .

Algumas propriedades importantes da solução (4.50b) serão agora discutidas.

### AS RELAÇÕES DE DISPERSÃO

Aplicando a transformação dupla de Fourier na equação da onda, observa-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \eta$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = -k^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \eta;$$

ou seja, realizam-se as seguintes substituições na equação:

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow -i\omega, \quad \frac{\partial}{\partial x} \longrightarrow ik.$$

Com a transformação dupla, a equação da onda se reduz à equação algébrica

$$(\omega^2 - k^2 c^2) \eta(k, \omega) = 0.$$

Para que a solução desta equação não seja trivial, *i. e.*,  $\eta(k, \omega) = 0$ , é necessário que a **equação de dispersão**

$$\omega^2 - k^2 c^2 = 0$$

seja satisfeita. As soluções desta equação são denominadas as **relações de dispersão** das ondas propagando-se no meio; tratam-se de relações envolvendo a frequência angular  $\omega$  das ondas com o número de onda  $k$ . Essas soluções podem ser escritas como  $\omega = \omega_\sigma(k)$  ou  $k = k_\sigma(\omega)$ , onde o índice  $\sigma$  distingue as diferentes soluções possíveis para a equação de dispersão. Nesta Apostila será adotada a primeira forma.

A existência das relações de dispersão mostra que o meio (no caso, a corda) somente poderá sustentar ondas que possuam relações bem determinadas entre a frequência e o número de onda. Outras relações entre estas duas quantidades não são suportadas e, portanto, não existem.

Para o caso particular da corda homogênea, as relações de dispersão resultam, simplesmente,

$$\omega = \omega_k^\sigma \equiv \omega_\sigma(k) = \sigma k c, \quad (\sigma = \pm 1). \quad (4.51)$$

Ou seja, a frequência das oscilações do meio será diretamente proporcional ao número de onda  $k$ .

A existência da relação de dispersão implica que na transformação inversa (4.50b) a amplitude espectral  $\eta(k, \omega)$  somente será não nula para frequências que satisfaçam a relação  $\omega = \omega_k^\sigma$ . Devido a isso, é necessário que

$$\eta(k, \omega) = \sum_\sigma \eta(k, \omega_k^\sigma) \delta(\omega - \omega_k^\sigma) \equiv 2\pi \sum_\sigma \mathcal{U}_\sigma(k) \delta(\omega - \omega_k^\sigma),$$

onde

$$\mathcal{U}_\sigma(k) \doteq (2\pi)^{-1} \eta(k, \omega_k^\sigma),$$

sendo que a soma em  $\sigma$  deve refletir todas as soluções possíveis da equação de dispersão. Com isso, a transformação inversa (4.50b) passa a ser escrita

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_\sigma \int_{-\infty}^{\infty} dk \mathcal{U}_\sigma(k) e^{ikx} \int d\omega \delta(\omega - \omega_k^\sigma) e^{-i\omega t}, \\ \eta(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_\sigma \int_{-\infty}^{\infty} dk \mathcal{U}_\sigma(k) e^{i(kx - \omega_k^\sigma t)}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Observa-se que na expressão acima, o número de onda  $k$  foi suposto ser real.

### CONDIÇÃO DE REALIDADE E PROPRIEDADES DE SIMETRIA

Como a solução  $\eta(x, t)$  da equação da onda descreve um fenômeno físico mensurável, esta função deve ser necessariamente real,

$$\eta^*(x, t) = \eta(x, t).$$

Impondo-se esta condição de realidade à forma (4.52), resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \mathcal{U}_\sigma^*(k) e^{-i(kx - \omega_k^{\sigma*} t)} = \int_{-\infty}^{\infty} dk \mathcal{U}_\sigma(k) e^{i(kx - \omega_k^\sigma t)},$$

onde foi assumido que o número de onda  $k$  é real. Fazendo  $k \rightarrow -k$  na integral da esquerda, resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \mathcal{U}_\sigma^*(-k) e^{i(kx + \omega_{-k}^{\sigma*} t)} = \int_{-\infty}^{\infty} dk \mathcal{U}_\sigma(k) e^{i(kx - \omega_k^\sigma t)}.$$

Para que esta igualdade seja sempre satisfeita, impõe-se as relações de simetria

$$\mathcal{U}_\sigma(k) = \mathcal{U}_\sigma^*(-k), \quad \omega_k^\sigma = -\omega_{-k}^{\sigma*} \Rightarrow \begin{cases} \text{Re } \omega_k^\sigma = -\text{Re } \omega_{-k}^\sigma \\ \text{Im } \omega_k^\sigma = \text{Im } \omega_{-k}^\sigma. \end{cases} \quad (4.53)$$

Ou seja, em geral a amplitude espectral  $\mathcal{U}_\sigma(k)$  e as relações de dispersão  $\omega_k^\sigma$  podem ser funções complexas do número de onda. Isto será determinado pela equação de dispersão, que depende das propriedades do meio onde ocorrem as oscilações e das condições iniciais e de contorno.

**CONDIÇÕES INICIAIS E A AMPLITUDE ESPECTRAL**

Dadas agora as condições iniciais

$$\eta(x, 0) = \Phi(x), \quad \eta_t(x, 0) = \Psi(x),$$

de (4.52) vem

$$\eta_t(x, t) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dk \omega_k^{\sigma} \mathcal{U}_{\sigma}(k) e^{i(kx - \omega_k^{\sigma} t)}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \eta(x, 0) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dk \mathcal{U}_{\sigma}(k) e^{ikx} = \Phi(x) \\ \eta_t(x, 0) &= -\frac{i}{2\pi} \sum_{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dk \omega_k^{\sigma} \mathcal{U}_{\sigma}(k) e^{ikx} = \Psi(x). \end{aligned}$$

Estas relações irão fornecer a intensidade espectral  $\mathcal{U}_{\sigma}(k)$  dos modos normais de oscilação.

Multiplicando ambos os lados das relações acima por  $e^{-ikx}$  e integrando em  $x$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \sum_{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dk' \mathcal{U}_{\sigma}(k') e^{i(k'-k)x} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \Phi(x) e^{-ikx} \\ -\frac{i}{2\pi} \sum_{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dk' \omega_k^{\sigma} \mathcal{U}_{\sigma}(k') e^{i(k'-k)x} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi(x) e^{-ikx}. \end{aligned}$$

Dada agora a identidade

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k'-k)x} = 2\pi \delta(k' - k),$$

obtem-se então o sistema de equações

$$\begin{cases} \sum_{\sigma} \mathcal{U}_{\sigma}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Phi(x) e^{-ikx} \\ \sum_{\sigma} \omega_k^{\sigma} \mathcal{U}_{\sigma}(k) = i \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi(x) e^{-ikx}, \end{cases} \quad (4.54)$$

o qual normalmente é suficiente para fornecer a forma da intensidade espectral.

Para a equação da onda em uma corda homogênea, a relação de dispersão é (4.51), o que implica que

$$\begin{cases} \mathcal{U}_+(k) + \mathcal{U}_-(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Phi(x) e^{-ikx} \\ \omega_k^+ \mathcal{U}_+(k) + \omega_k^- \mathcal{U}_-(k) = i \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi(x) e^{-ikx}, \end{cases}$$

cuja solução pode ser escrita

$$\mathcal{U}_{\sigma}(k) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \left[ \eta(x, 0) + \frac{i\sigma}{\omega_k} \eta_t(x, 0) \right], \quad (\sigma = \pm 1), \quad (4.55)$$

a qual sempre é válida quando  $\sigma = \pm 1$  e  $\omega_k^- = -\omega_k^+ \doteq -\omega_k$ . Este resultado fornece a intensidade espectral da perturbação que se propaga sobre a corda.

**A VELOCIDADE DE FASE**

A solução formal (4.52) mostra que um determinado modo normal de oscilação será dado por

$$\eta_{k,\sigma}(x, t) = \mathcal{U}_{\sigma}(k) e^{i(kx - \omega_k^{\sigma} t)} = \mathcal{U}_{\sigma}(k) e^{\text{Im} \omega_k^{\sigma} t} e^{i(kx - \text{Re} \omega_k^{\sigma} t)}.$$

Para  $k$  e  $\omega_k^{\sigma}$  não nulos, esta expressão mostra que com o transcorrer do tempo, o modo normal irá se deslocar ao longo do meio como uma onda senoidal, com a sua amplitude modulada por

$$\max \eta_{k,\sigma}(t) = \mathcal{U}_{\sigma}(k) e^{\text{Im} \omega_k^{\sigma} t}.$$

Usualmente,  $\text{Im} \omega_k^\sigma \leq 0$  e isto implica que a amplitude do modo normal se reduz à medida que este se propaga no meio. Diz-se então que ocorre um *amortecimento* deste modo normal.

A amplitude do modo normal é multiplicada por uma função harmônica que varia com  $x$  e  $t$  devido ao deslocamento do modo. Esse deslocamento pode ser quantificado determinando-se a condição para que a *fase*  $\phi$  do modo normal permaneça constante, onde

$$\phi(x, t) = kx - \text{Re} \omega_k^\sigma t.$$

As variações instantâneas de  $x$  e  $t$  que mantêm a fase constante são determinadas por

$$\frac{d\phi}{dt} = k \frac{dx}{dt} - \text{Re} \omega_k^\sigma = 0 \implies v_{\phi, \sigma}(k) = \frac{\text{Re} \omega_k^\sigma}{k}. \quad (4.56)$$

A quantidade  $v_{\phi, \sigma}(k)$  é a *velocidade de fase* do modo normal (identificado pela quantidade  $\sigma$ ). Como esta depende da relação de dispersão do modo normal, a velocidade de fase também irá depender das propriedades físicas do meio pelo qual a onda se propaga.

Uma definição importante que resulta da expressão (4.56) para a velocidade de fase é a de um **meio dispersivo**. Um *meio dispersivo* é aquele cuja velocidade fase dos modos normais depende do valor do número de onda (ou seja, depende do comprimento da onda); em contrapartida, um **meio não dispersivo** é aquele no qual a velocidade de fase é uma constante.

A importância de um meio ser ou não dispersivo consiste no fato de que, uma vez que a solução completa da equação da onda, dada por (4.52), é escrita como uma superposição de modos normais, *i. e.*,  $\eta(x, t) \propto \int dk \eta_{k, \sigma}(x, t)$ , as condições iniciais e de contorno usualmente irão resultar em uma distribuição de amplitudes para um número (possivelmente infinito) de modos normais no instante  $t = 0$ , como soluções de (4.54). Se o meio for não dispersivo, a forma inicial do pulso irá se propagar ao longo do meio sem deformação, pois todos os modos normais irão se deslocar com a mesma velocidade de fase. Por outro lado, se o meio for dispersivo, então diferentes modos normais irão se deslocar com diferentes velocidades de fase e o pulso inicial será gradativamente deformado, à medida que se deslocar no meio. Este tipo de comportamento é muito importante na óptica, por exemplo, porque os meios materiais normalmente são dispersivos para ondas eletromagnéticas.

## SOLUÇÃO PARA MEIO NÃO DISPERSIVO

Retornando finalmente à equação da onda para a corda uniforme, como a sua relação de dispersão (4.51) é simplesmente  $\omega_k^\sigma = \sigma kc$  ( $\sigma = \pm 1$ ), a solução (4.52) pode ser escrita

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dk \mathcal{U}_+(k) e^{ik(x-ct)} + \int_{-\infty}^{\infty} dk \mathcal{U}_-(k) e^{ik(x+ct)} \right] = f_+(x-ct) + f_-(x+ct),$$

onde

$$f_\sigma(x - \sigma ct) \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \mathcal{U}_\sigma(k) e^{ik(x - \sigma ct)}, \quad (\sigma = \pm 1)$$

sendo que  $f_{+(-)}$  descreve um pulso se propagando no sentido positivo (negativo) da corda sem deformação, com o módulo da velocidade igual a  $c$  e com a amplitude espectral dada por  $\mathcal{U}_\sigma(k)$ .

Nota-se também que a velocidade de fase dos modos normais, dada por (4.56), neste caso se torna

$$v_{\phi, \sigma}(k) = \frac{\omega_k^\sigma}{k} = \sigma c.$$

Isto é, a velocidade de propagação do pulso é exatamente a velocidade de fase.

Esta é exatamente a forma geral da solução para a corda homogênea, obtida pelo método de Cauchy apresentado na seção 4.7.3. O exemplo a seguir apresenta a solução completa para a propagação de um pulso Gaussiano.

**Exemplo 4.6 (Pulso Gaussiano).** Seja uma corda infinita com as condições iniciais

$$\eta(x, 0) = h e^{-x^2/\alpha^2}, \quad \eta_t(x, 0) = 0,$$

as quais descrevem uma deformação inicial na forma de uma função Gaussiana com largura  $\alpha$ .

De (4.55) obtemos a amplitude espectral da perturbação

$$\mathcal{U}_\sigma(k) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \eta(x, 0) = \frac{1}{2} h \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} e^{-x^2/\alpha^2},$$

resultando

$$\mathcal{U}_\sigma(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha h e^{-\alpha^2 k^2/4};$$

ou seja, a amplitude espectral também é Gaussiana.

Portanto, de (4.52) resulta então

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \frac{\alpha h}{4\sqrt{\pi}} \sum_\sigma \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\alpha^2 k^2/4} e^{ik(x-\sigma ct)} \\ &= \frac{\alpha h}{4\sqrt{\pi}} \sum_\sigma e^{-(x-\sigma ct)^2/\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp \left\{ -\frac{1}{4} \left[ \alpha k - \frac{2}{\alpha} i (x - \sigma ct) \right]^2 \right\} \\ &= \frac{\alpha h}{4\sqrt{\pi}} \sum_\sigma \frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-(x-\sigma ct)^2/\alpha^2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2} h \sum_{\sigma=\pm 1} e^{-(x-\sigma ct)^2/\alpha^2},$$

o que mostra que a perturbação resultante é composta por dois pulsos Gaussianos contrapropagantes com a mesma largura mas com a metade da altura da deformação inicial.

### 4.9.2 ONDAS ESTACIONÁRIAS A PARTIR DA SOLUÇÃO GERAL

A solução obtida em (4.52), a qual descreve cada modo normal como uma onda propagando-se sobre a corda, aparentemente está em conflito com a solução da corda com as extremidades fixas, dada, por exemplo, por (4.42), a qual descreve a solução na forma de ondas estacionárias.

Contudo, é fácil mostrar que a imposição das condições de contorno em (4.52) juntamente com a condição de realidade, reproduz a solução em ondas estacionárias. Este procedimento é realizado a seguir.

Temos:

- Solução geral para a equação da onda:

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_\sigma \int_{-\infty}^{\infty} dk \mathcal{U}_\sigma(k) e^{i(kx - \omega_k^\sigma t)}$$

- Condições de contorno:

$$\eta(0, t) = \eta(\ell, t) = 0.$$

- Relação de dispersão:  $\omega_k^\sigma = \sigma kc$ .
- Condição de realidade:

$$\mathcal{U}_\sigma(k) = \mathcal{U}_\sigma^*(-k) \qquad \omega_k^\sigma = -\omega_{-k}^\sigma,$$

- Condições iniciais:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\sigma(k) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \left[ \eta(x, 0) + \frac{i\sigma}{\omega_k} \eta_t(x, 0) \right] \quad (\sigma = \pm 1) \\ \eta(x, 0) &= \Phi(x) \quad \eta_t(x, 0) = \Psi(x). \end{aligned}$$

Então, aplicando as condições de contorno e a condição de realidade:

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\sigma=\pm} \int_{-\infty}^{\infty} dk \mathcal{U}_\sigma(k) e^{ik(x-\sigma ct)} \\ \eta(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\sigma=\pm} \int_0^{\infty} dk \left[ \mathcal{U}_\sigma(k) e^{ik(x-\sigma ct)} + \mathcal{U}_\sigma^*(k) e^{-ik(x-\sigma ct)} \right] \\ \eta(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dk \left[ \mathcal{U}_+(k) e^{ik(x-ct)} + \mathcal{U}_+^*(k) e^{-ik(x-ct)} + \mathcal{U}_-(k) e^{ik(x+ct)} + \mathcal{U}_-^*(k) e^{-ik(x+ct)} \right]. \end{aligned}$$

No contorno  $x = 0$ ,

$$\eta(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \left[ (\mathcal{U}_+(k) + \mathcal{U}_-^*(k)) e^{-ikct} + (\mathcal{U}_+^*(k) + \mathcal{U}_-(k)) e^{ikct} \right]$$

Observa-se que se for imposta a relação

$$\mathcal{U}_\pm = -\mathcal{U}_\mp^* \implies \eta(0, t) = 0,$$

e esta condição de contorno é automaticamente satisfeita.

Mas daí resulta ser possível escrever

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \left[ \mathcal{U}_-(k) (e^{ikx} - e^{-ikx}) e^{ikct} + \mathcal{U}_-^*(k) (e^{-ikx} - e^{ikx}) e^{-ikct} \right].$$

Escrevendo agora

$$\frac{i}{\pi} \mathcal{U}_-(k) = \frac{1}{2} [\mu(k) + i\nu(k)], \text{ com } \mu(k) \text{ e } \nu(k) \text{ reais,}$$

resulta então

$$\eta(x, t) = \int_0^\infty dk [\mu(k) \cos(kct) - \nu(k) \sin(kct)] \sin(kx).$$

Aplicando agora a condição de contorno em  $x = \ell$ ,

$$\eta(\ell, t) = \int_0^\infty dk [\mu(k) \cos(kct) - \nu(k) \sin(kct)] \sin(k\ell) = 0.$$

Se

$$\mu(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(k_n) \delta(k - k_n), \quad k_n = \frac{n\pi}{\ell} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

com o mesmo para  $\nu(k)$ , segue que

$$\eta(\ell, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\mu_n(k_n) \cos(k_n ct) - \nu_n(k_n) \sin(k_n ct)] \sin(k_n \ell) = 0,$$

a qual automaticamente satisfaz esta condição de contorno também.

Portanto, resulta a solução escrita na forma de ondas estacionárias

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\mu_n(k_n) \cos(k_n ct) - \nu_n(k_n) \sin(k_n ct)] \sin(k_n x).$$

A partir deste ponto, a determinação de  $\{\mu_n(k_n)\}$  e  $\{\nu_n(k_n)\}$  a partir das condições iniciais segue o procedimento realizado na seção 4.7.1.

### 4.9.3 EXEMPLOS DE MEIOS DISPERSIVOS

Nesta seção serão discutidos alguns sistemas mecânicos que apresentam propriedades dispersivas nas suas oscilações transversais.

Uma das consequências mais importantes devidas à existência da dispersão (*i. e.*,  $v_\phi = v_\phi(k)$ ) é que a velocidade de fase de um determinado modo normal não mais é, em geral, a velocidade de propagação do pulso ao longo do meio. Além disso, a forma do pulso inicial não se mantém constante à medida que este se propaga pelo meio.

#### CORDA OSCILANDO EM UM MEIO VISCOSO

Retornando à equação da onda (4.48a) e incluindo somente o efeito de uma força dissipativa proporcional à velocidade, a mesma se reduz a

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + 2D \frac{\partial \eta}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0.$$

A aplicação da transformação dupla de Fourier (4.50a) implica nas substituições

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rightarrow -k^2,$$

o que leva à equação de dispersão

$$(\omega^2 + 2iD\omega - k^2c^2)\eta(k, \omega) = 0 \implies \omega^2 + 2iD\omega - k^2c^2 = 0,$$

cujas raízes são as relações de dispersão

$$\omega(k) = -iD \pm \sqrt{k^2c^2 - D^2} \implies \omega_k^\sigma = \sigma\sqrt{k^2c^2 - D^2} - iD \quad (\sigma = \pm 1).$$

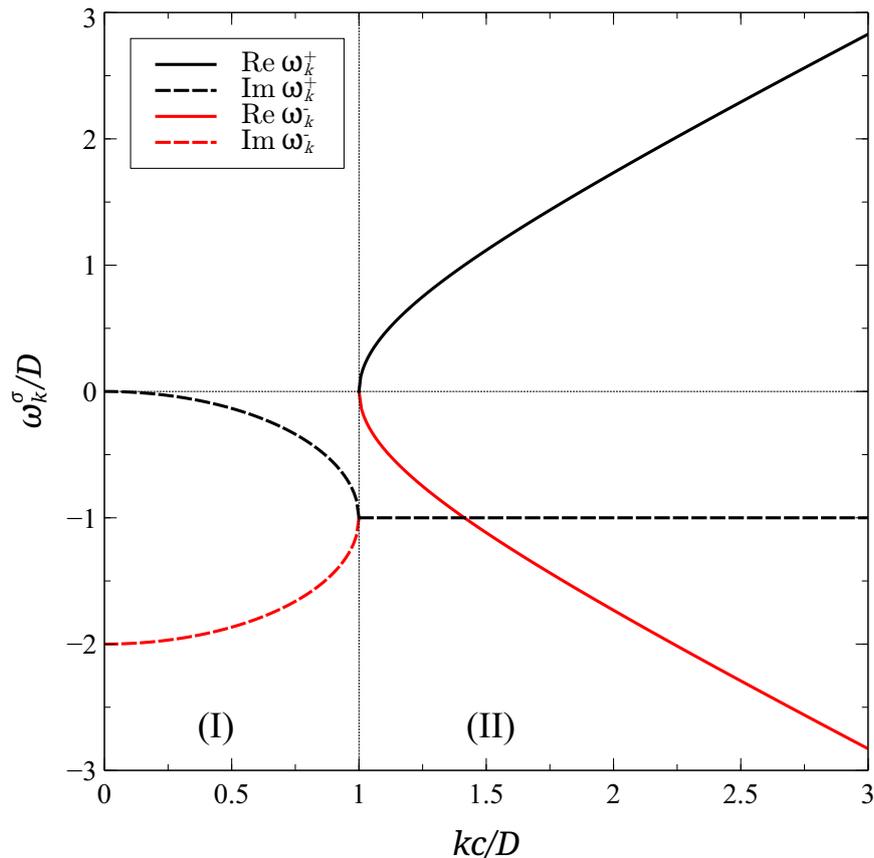
Observa-se que a relação de dispersão apresenta dois comportamentos distintos para números de onda reais; uma região (Região I) ocorre quando  $|k| < D/c$ , onde  $\omega_k^\sigma$  é puramente imaginária,

$$\omega_k^\sigma = i\left(\sigma\sqrt{D^2 - k^2c^2} - D\right), \quad \left(|k| < \frac{D}{c}\right),$$

e outra (Região II) quando  $|k| \geq D/c$ , na qual  $\omega_k^\sigma$  é complexa,

$$\omega_k^\sigma = \sigma\sqrt{k^2c^2 - D^2} - iD, \quad \left(|k| \geq \frac{D}{c}\right).$$

A figura 4.16 mostra os gráficos destas relações de dispersão para  $k > 0$ . Observa-se que, como era esperado,  $\text{Im } \omega_k^\sigma \leq 0$ , devido à dissipação realizada pelo meio viscoso.



**Figura 4.16:** Gráficos das relações de dispersão para uma corda oscilando em um meio viscoso.

As relações de dispersão devem satisfazer as propriedades de simetria (4.53). Na região I, a condição  $\text{Im } \omega_k^\sigma = \text{Im } \omega_{-k}^\sigma$  é automaticamente satisfeita; contudo, na região II, para que a condição  $\text{Re } \omega_k^\sigma = -\text{Re } \omega_{-k}^\sigma$  seja satisfeita, é necessário que

$$\text{Re } \omega_k^+ = -\text{Re } \omega_{-k}^-.$$

A partir da solução (4.52), observa-se que as ondas parciais na região I comportam-se como

$$\eta_k(x, t) = \mathcal{U}_+(k) e^{i(kx - \omega_k^+ t)} = \mathcal{U}_+(k) e^{ikx} e^{-(D - \sqrt{D^2 - k^2 c^2})t}, \quad (kc/D < 1);$$

ou seja, são fortemente amortecidas sem se deslocarem (velocidade de fase nula). Já na região II, as ondas parciais se comportam como

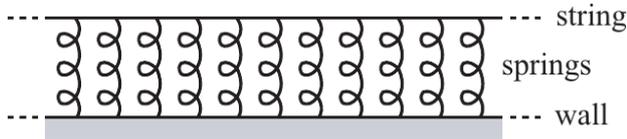
$$\eta_k(x, t) = \mathcal{U}_+(k) e^{i(kx - \sqrt{k^2 c^2 - D^2}t)} e^{-Dt}, \quad (kc/D \geq 1);$$

ou seja, também são amortecidas, mas estas possuem velocidade de fase não nula,

$$\frac{v_\phi}{c} = \frac{\text{Re } \omega_k^+}{kc} = \frac{\sqrt{k^2 c^2 / D^2 - 1}}{kc/D},$$

com uma significativa dispersão.

### CORDA OSCILANDO EM UM MEIO RESTAURADOR; O MODELO DO “COLCHÃO DE MOLAS”



**Figura 4.17:** O modelo do “colchão de molas”: uma força elástica restauradora é exercida pelo meio sobre a corda quando a mesma é perturbada a partir do equilíbrio.

A figura 4.17 ilustra um modelo simples para uma corda homogênea que está imersa em um meio que irá exercer uma força restauradora elástica sobre a corda sempre que algum pulso transversal se propagar ao longo da mesma. Este modelo ilustra uma situação onde ocorre um valor mínimo para as frequências dos modos normais de oscilação possíveis na corda. Essa frequência mínima é denominada **frequência de corte**.

A descrição dinâmica deste sistema será realizada novamente pela equação (4.48a). Para simplificar, será suposto que não existe dissipação ( $D = 0$ ). Para se deduzir a forma da força motriz por unidade de massa, retorna-se brevemente à corda carregada descrita pelas equações de Euler-Lagrange (4.45), para as quais  $g = 0$  e  $F_j(t)$  será a força motriz exercida sobre a  $j$ -ésima partícula pelo agente motriz; em outras palavras, será a força exercida por uma pequena mola de constante elástica  $\kappa$  sempre que a  $j$ -ésima partícula se afastar do ponto de equilíbrio,

$$F_j = -\kappa \eta_j.$$

Na transição discreto  $\rightarrow$  contínuo, é necessário que a força motriz também esteja sujeita ao limite  $F_j \rightarrow \Delta F_j$ ; ou seja,  $\kappa \rightarrow \Delta \kappa$ . Dessa maneira, a Lagrangiana de Bateman (4.46) será escrita

$$\bar{L} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Delta x \lambda \dot{\eta}_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \Delta x \tau \left( \frac{\eta_{k+1} - \eta_k}{\Delta x} \right)^2 - \sum_{k=1}^n \Delta x \frac{\Delta m}{\Delta x} \frac{\Delta \kappa}{\Delta m} \eta_k^2,$$

a partir da qual identifica-se a densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \lambda \eta_t^2 - \frac{1}{2} \tau \eta_x^2 - \theta \eta^2,$$

sendo

$$\theta = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta \kappa \rightarrow 0}} \frac{\Delta \kappa}{\Delta x}$$

a constante elástica do “colchão” por unidade de comprimento.

Aplicando a equação de campo (4.38) a esta densidade Lagrangiana, resulta a equação da onda modificada

$$\eta_{tt} - c^2 \eta_{xx} + \omega_s^2 \eta = 0,$$

onde  $\omega_s = \sqrt{2\theta/\lambda}$  é a frequência (angular) de corte.

A aplicação das transformações de Fourier a esta equação corresponde à transformações  $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$  e  $\partial/\partial x \rightarrow ik$ , o que leva à equação de dispersão

$$(-\omega^2 + k^2 c^2 + \omega_s^2) \eta = 0 \implies \omega_k = \sqrt{\omega_s^2 + k^2 c^2}. \quad (4.57)$$

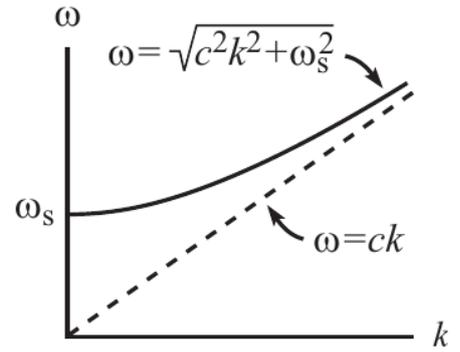
A figura 4.18 mostra o gráfico desta relação de dispersão. Observa-se que como resultado da interação da corda com o meio restaurador, não existe modo normal de oscilação com frequência inferior à frequência de corte  $\omega_s$ , a qual depende tanto do meio (via  $\theta$ ) quanto da corda (via  $\lambda$ ).

A velocidade de fase do modo normal com número de onda  $k$  neste sistema é

$$v_\phi = \sqrt{c^2 + \frac{\omega_s^2}{k^2}}.$$

Observa-se que  $v_\phi \xrightarrow{k \rightarrow 0} \infty$  e  $v_\phi \xrightarrow{k \rightarrow \infty} c$ . Ou seja, o meio é altamente dispersivo para pequenos números de onda.

Este modelo simples ilustra um sistema físico onde uma corda homogênea pode se tornar um meio efetivamente dispersivo devido a interações da mesma com o meio em que ela se encontra.



**Figura 4.18:** Relação de dispersão dos modos normais no sistema “colchão de mola.”

#### 4.9.4 PROPAGAÇÃO DE UM PULSO EM UM MEIO DISPERSIVO

Para ilustrar uma aplicação prática dos resultados obtidos nas seções anteriores, consideramos um modelo físico para um meio contínuo específico, representado pela sua relação de dispersão, a ser utilizado no cálculo, sem aproximações, da propagação de um pulso policromático de oscilações transversais.

A solução da equação da onda em um meio dispersivo pode ser escrita, de (4.52), como

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dk U_{\sigma}(k) e^{i(kx - \omega_k^{\sigma} t)}, \quad (4.58)$$

com as amplitudes espectrais determinadas das condições iniciais via (4.54).

Uma relação de dispersão genérica é usualmente muito complicada para a obtenção de um resultado analítico. Por isso, será suposto ser possível uma expansão, válida para o limite  $kc/\omega \ll 1$ , a qual é a região onde os efeitos dispersivos são usualmente mais relevantes. Assim, a relação de dispersão a ser empregada será modelada por

$$\omega_k^{\sigma} = \sigma \omega_0 \left( 1 + \frac{1}{2} a^2 k^2 \right), \quad (\sigma = \pm 1), \quad (4.59)$$

sendo  $\omega_0$  uma frequência característica, correspondente ao caso limite de um meio não dispersivo, e  $a = c/\omega_0$ .

Uma situação onde esta aproximação pode ser realizada é o modelo do colchão de molas, cuja relação de dispersão (4.57) pode ser aproximada como

$$\omega_k = \sigma \sqrt{\omega_s^2 + k^2 c^2} \approx \sigma \omega_s \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{c^2}{\omega_s^2} k^2 \right).$$

Como há 2 valores possíveis para  $\sigma$ , as quantidades  $U_{\sigma}(k)$  serão determinadas pelo sistema de equações (4.54); ou seja,

$$\begin{aligned} U_+(k) + U_-(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \eta(x, 0) \\ U_+(k) \omega_k^+ + U_-(k) \omega_k^- &= i \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \eta_t(x, 0). \end{aligned}$$

Como  $\omega_k^- = -\omega_k^+$ , as soluções deste sistema são

$$U_{\sigma}(k) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \left[ \eta(x, 0) + \frac{i\sigma}{\omega_k} \eta_t(x, 0) \right] \quad (\sigma = \pm 1), \quad (4.60)$$

onde  $\omega_k \equiv \omega_k^+$ . As expressões calculadas para  $\mathcal{U}_\sigma(k)$  podem então ser utilizadas para se obter  $\eta(x, t)$ .

Será considerado agora o caso de um pulso monocromático de extensão finita lançado a partir da origem em  $t = 0$  para ambos os sentidos ao longo do eixo  $x$ . Este tipo de pulso é modelado por

$$\eta(x, 0) = e^{-x^2/2L^2} \cos k_0 x, \quad \frac{\partial}{\partial t} \eta(x, 0) = 0,$$

sendo  $L$  a largura espacial do pulso e  $k_0 = 2\pi/\lambda$  se refere ao comprimento de onda  $\lambda$ . Para este tipo de pulso, as amplitudes espectrais, obtidas a partir de (4.60), ficam

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\sigma(k) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} e^{-x^2/2L^2} \cos k_0 x \\ &= \frac{1}{4} \left( \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i(k-k_0)x} e^{-x^2/2L^2} + \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i(k+k_0)x} e^{-x^2/2L^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( e^{-(L^2/2)(k-k_0)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-[x+iL^2(k-k_0)]^2/2L^2} + e^{-(L^2/2)(k+k_0)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-[x+iL^2(k+k_0)]^2/2L^2} \right), \\ \mathcal{U}_\sigma(k) &= \sqrt{\frac{\pi}{8}} L \left[ e^{-(L^2/2)(k-k_0)^2} + e^{-(L^2/2)(k+k_0)^2} \right] \quad (\sigma = \pm 1). \end{aligned}$$

Com este resultado, a solução da equação da onda  $\eta(x, t)$  é obtida a partir de (4.58) e da relação de dispersão (4.59),

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dk \mathcal{U}_+(k) e^{i(kx - \omega_k t)} + \int_{-\infty}^{\infty} dk \mathcal{U}_-(k) e^{i(kx + \omega_k t)} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\infty} dk \mathcal{U}_+(k) e^{i(kx - \omega_k t)} + \int_0^{\infty} dk \mathcal{U}_+(-k) e^{-i(kx + \omega_{-k} t)} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} dk \mathcal{U}_-(k) e^{i(kx + \omega_k t)} + \int_0^{\infty} dk \mathcal{U}_-(-k) e^{-i(kx - \omega_{-k} t)} \right]. \end{aligned}$$

Usando agora as propriedades matemáticas das relações de dispersão, resulta

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\infty} dk \mathcal{U}_+(k) e^{i(kx - \omega_k t)} + \int_0^{\infty} dk \mathcal{U}_+^*(k) e^{-i(kx - \omega_k t)} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} dk \mathcal{U}_-(k) e^{i(kx + \omega_k t)} + \int_0^{\infty} dk \mathcal{U}_-^*(k) e^{-i(kx + \omega_k t)} \right], \end{aligned}$$

onde foram empregadas as condições de realidade, isto é, pode-se escrever a solução como

$$\eta(x, t) = \frac{1}{\pi} \text{Re} \left[ \int_0^{\infty} dk \mathcal{U}_+(k) e^{i(kx - \omega_k t)} + \int_0^{\infty} dk \mathcal{U}_-(k) e^{i(kx + \omega_k t)} \right],$$

mostrando que o resultado realmente é real.

Uma vez empregadas as propriedades matemáticas de  $\mathcal{U}_\sigma(k)$  e  $\omega_k$ , pode-se fazer uso do fato de que ambas são funções pares em  $k$ . Além disso, neste caso  $\mathcal{U}_\sigma(k)$  também é real e independente de  $\sigma$ . Assim, pode-se escrever a expressão anterior da seguinte maneira,

$$\eta(x, t) = \frac{L}{\sqrt{32\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[ e^{-(L^2/2)(k-k_0)^2} + e^{-(L^2/2)(k+k_0)^2} \right] \left[ e^{i(kx - \omega_k t)} + e^{i(kx + \omega_k t)} \right].$$

Nota-se que para  $t = 0$  a expressão acima se reduz às condições iniciais. Para  $t > 0$  pode-se escrever a expressão anterior de uma maneira mais compacta como

$$\eta(x, t) = \frac{L}{\sqrt{32\pi}} \sum_{s_1, s_2 = \pm 1} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-(L^2/2)(k+s_1 k_0)^2} \exp \left\{ i \left[ kx + s_2 \omega_0 \left( 1 + \frac{1}{2} a^2 k^2 \right) t \right] \right\},$$

cuja solução é

$$\eta(x, t) = \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2 = \pm 1} \frac{\exp \left[ -\frac{(x - s_1 s_2 a^2 k_0 \omega_0 t)^2}{2(L^2 - i s_2 a^2 \omega_0 t)} \right]}{\sqrt{1 - i s_2 a^2 \omega_0 t / L^2}} \exp \left[ -i s_1 k_0 x + i s_2 \left( 1 + \frac{1}{2} a^2 k_0^2 \right) \omega_0 t \right]. \quad (4.61)$$

A solução acima continua real, pois é fácil mostrar que  $\eta^*(x, t) = \eta(x, t)$ . Além disso,

$$\eta(x, 0) = \frac{1}{2} \sum_{s_1 = \pm 1} \exp(-x^2/2L^2) \exp(-is_1 k_0 x),$$

a qual é idêntica à condição inicial empregada.

A solução (4.61) descreve a propagação de dois pulsos pelo meio dispersivo em sentidos opostos. A amplitude máxima de cada pulso propaga-se com a velocidade constante

$$x(t) - s_1 s_2 a^2 k_0 \omega_0 t = 0 \iff v_g = \pm \omega_0 a^2 k_0,$$

também denominada **velocidade de grupo**. O envoltório, ou *modulação* do pulso permanece com a forma aproximadamente gaussiana, mas nem a largura nem a amplitude da modulação permanecem constantes. Ao se propagar em um meio dispersivo, a largura da gaussiana aumenta e sua amplitude diminui, ambas na mesma proporção, dada por

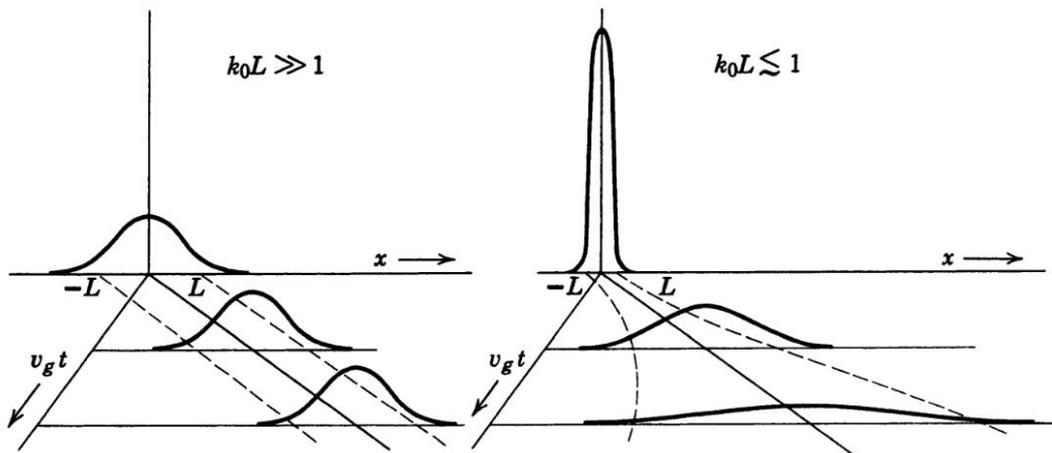
$$L(t) = \left| L - is_2 \frac{a^2 \omega_0}{L} t \right| = \sqrt{L^2 + \left( \frac{a^2 \omega_0 t}{L} \right)^2}.$$

Assim, os efeitos dispersivos em um dado pulso são mais intensos durante um dado intervalo de tempo  $\Delta t$  quanto mais estreito for o pulso inicial, ou seja, quanto menor  $L$ . O critério para um efeito dispersivo menos intenso é  $L \gg a$ . Obviamente, para tempo longos o pulso sempre irá variar na proporção

$$\frac{L(t)}{a} \rightarrow \frac{a}{L} \omega_0 t,$$

mas o tempo necessário para se chegar a esta forma limite depende da razão  $a/L$ .

A figura 4.19 mostra uma comparação entre dois pulsos lançados inicialmente com diferentes larguras. O pulso mais largo ( $k_0 L \gg 1$ ) consiste em um pacote de ondas composto por um número grande de comprimentos de onda e é pouco distorcido durante sua propagação pelo meio dispersivo. Já o pulso mais estreito ( $k_0 L \lesssim 1$ ) é deformado em um tempo relativamente curto.



**Figura 4.19:** Alteração na forma de um pacote de ondas durante propagação em um meio dispersivo. O pulso mais largo contém um número maior de comprimentos de onda ( $k_0 L \gg 1$ ) e é comparativamente menos distorcido que o pulso mais estreito ( $k_0 L \lesssim 1$ ), o qual é rapidamente disperso.

### 4.9.5 A VELOCIDADE DE GRUPO EM UM MEIO DISPERSIVO

A discussão realizada nas seções anteriores mostrou que a velocidade de fase  $v_\phi = \text{Re } \omega_k / k$  com que um determinado componente de Fourier da onda plana se propaga nem sempre é uma medida fisicamente aceitável da velocidade propagação da energia transportada por um pulso propagando-se em um meio dispersivo. Isto ocorre devido a três razões principais:

1. Em um meio dispersivo, diferentes componentes de Fourier propagam-se com velocidades distintas; como consequência, o pulso se dispersa ao longo de sua propagação.
2. Para certos meios e certas regiões espectrais, é possível que a velocidade de fase exceda a velocidade de propagação dos pulsos, isto é,  $v_\phi > c$ .
3. Em um meio que também é dissipativo, além de dispersivo, as oscilações serão também atenuadas ao longo de sua propagação, acentuando ainda mais a distorção do pulso inicial.

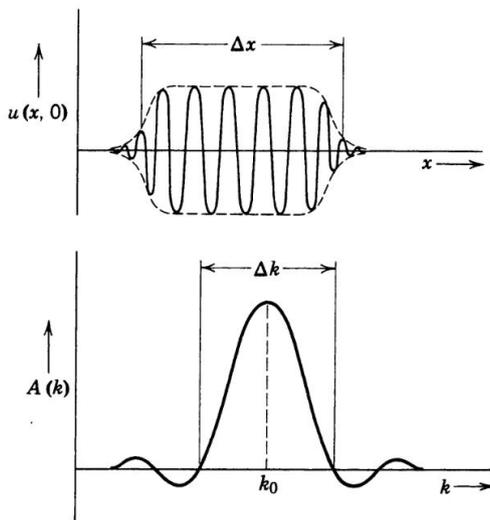
Neste tipo de meio, uma medida mais precisa da velocidade de propagação do pulso é fornecida pela *velocidade de grupo*.

Para simplificar a discussão, considera-se um pulso unidimensional  $\eta(x, t)$  propagando-se em um meio dispersivo sem dissipação, semelhante ao exemplo considerado na seção 4.9.4. Para este caso, o pulso continua sendo descrito pelas expressões (4.58) e (4.60),

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) e^{i(kx - \omega_k t)} \quad (4.62a)$$

$$A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \eta(x, 0), \quad (4.62b)$$

onde por simplificação foi assumido que  $\partial\eta(x, 0)/\partial t = 0$  e que o pulso propaga-se exclusivamente no sentido positivo. Como o meio não apresenta dissipação, sua relação de dispersão  $\omega_k = \omega(k)$  é uma função puramente real.



**Figura 4.20:** (Acima) um pulso inicial de dimensão finita  $\Delta x$  é injetado em um meio dispersivo. (Abaixo) Espectro de Fourier do pulso  $\eta(x, 0)$ .

Se o pulso inicial for uma onda monocromática, então  $\eta(x, 0) = \eta_0 e^{-ik_0 x} + \text{c.c.}$ , de onde resulta que  $A(k) = 2\pi\delta(k - k_0)$ , de acordo com (4.62b), e, portanto,

$$\eta(x, t) = e^{i(k_0 x - \omega_{k_0} t)} + \text{c.c.}$$

Isto é, uma onda monocromática propaga-se sem dispersão pelo meio. Porém, se o pulso inicial apresentar uma extensão finita, representada pela curva modulatória tracejada ilustrada na figura 4.20, então o seu espectro de Fourier  $A(k)$  não será uma delta de Dirac, mas apresentará uma distribuição de largura  $\Delta k$  centrada em um determinado valor máximo  $k_0$  do número de onda, correspondente ao comprimento de onda predominante no pulso. É possível mostrar, usando teoremas associados a transformadas de Fourier, que

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}.$$

Será assumido agora que a extensão inicial  $\Delta x$  do pulso é relativamente grande, de tal forma que este não sofre uma dispersão acentuada à medida que se propaga pelo meio. Esta condição pode ser quantificada por

$$k_0 \Delta x \gg 1,$$

o que corresponde ao pulso exemplificado na esquerda da figura 4.19, o qual sofre uma deformação pequena com sua propagação. Neste caso, como  $\Delta k \simeq 1/2\Delta x$ , então

$$\Delta k \ll k_0,$$

ou seja, o espectro de Fourier apresenta um pico acentuado em  $k = k_0$ .

Como somente valores de  $k$  próximos a  $k_0$  irão contribuir significativamente para  $\eta(x, t)$ , pode-se realizar a seguinte aproximação para  $\omega(k)$ :

$$\omega(k) \approx \omega(k_0) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} (k - k_0),$$

de onde resulta em (4.62a)

$$\eta(x, t) \approx \frac{1}{2\pi} e^{-i[\omega(k_0) - (d\omega/dk)|_{k_0} k_0]t} \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) e^{i[x - (d\omega/dk)|_{k_0} t]k}.$$

O resultado acima mostra que, a menos de um fator de fase que deve ser cancelado com o complexo conjugado, o pulso propaga-se sem distorção significativa como

$$\eta(x, t) \approx \eta(x', 0) e^{-i[\omega(k_0) - (d\omega/dk)|_{k_0} k_0]t},$$

onde

$$x' = x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t.$$

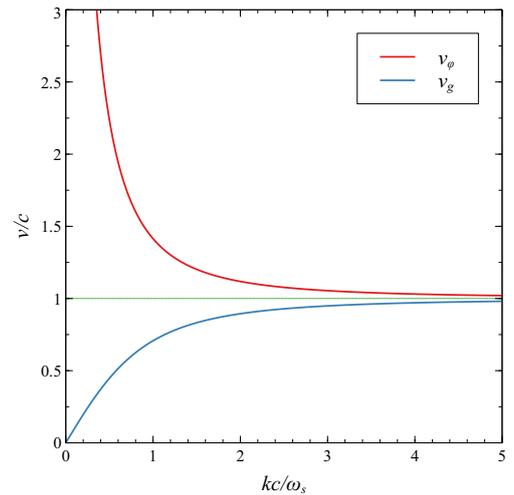
Isto significa que a frente de onda localizada em  $x' = 0$  propaga-se com a *velocidade de grupo*

$$v_g \doteq \frac{\partial \omega}{\partial k}. \tag{4.63a}$$

Se a relação de dispersão é fornecida pelo **índice de refração**  $n(\omega) \doteq kc/\omega$ , então

$$v_g = \frac{c}{n(\omega) + \omega \partial n / \partial \omega}. \tag{4.63b}$$

Um exemplo de aplicação da fórmula (4.63a) é fornecido pelo modelo do colchão de molas, cuja relação de dispersão é (4.57). A figura 4.21 mostra tanto a velocidade de fase  $v_\phi$  quanto a velocidade de grupo para este sistema. Observa-se que a velocidade de fase, para qualquer número de onda, é sempre maior que a velocidade de propagação de um pulso em um meio não dispersivo, enquanto que com a velocidade de grupo ocorre justamente o oposto. Em situações como esta, a velocidade de grupo é considerada a melhor medida para a velocidade de propagação de um pulso por um meio fracamente dispersivo.



**Figura 4.21:** Velocidades de fase ( $v_\phi$ ) e de grupo ( $v_g$ ) para o modelo do colchão de molas, obtidas a partir da relação de dispersão (4.57).

A definição (4.63a) para a velocidade de grupo é muitas vezes aceita e empregada mesmo para pulsos propagando-se em meios nos quais a relação de dispersão não pode ser aproximada por  $\omega_k \simeq \omega_0 + v_g(k - k_0)$ . O caso discutido nas seção 4.9.4 é um exemplo disto.

Finalmente, se o pulso se propaga no espaço  $E^3$ , a generalização de (4.63a) fica simplesmente

$$v_g(\mathbf{k}) = \nabla_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}. \tag{4.63c}$$

Uma dedução detalhada da expressão (4.63c) para um gás ionizado dispersivo, inhomogêneo e não estacionário pode ser vista em (BERNSTEIN, 1975).

### 4.9.6 ENERGIA TRANSPORTADA POR UM PULSO LOCALIZADO EM MEIO DISPERSIVO

A discussão realizada na seção 4.7.2 a respeito da energia total contida na oscilação de uma corda homogênea será refeita agora no contexto de pulsos propagantes em meios dispersivos.

Será assumido que a corda possui extensão infinita, mas que o pulso é suficientemente localizado para que faça sentido integrar as densidades de energia cinética e potencial (respectivamente  $dT/dx$  e  $dU/dx$ ) ao longo de toda extensão da corda. Neste caso, integrando as densidades de energia cinética e potencial dadas por (4.43a,b) ao longo de toda a extensão da corda, resulta

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 dx$$

$$U(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \tau \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Com a solução para  $\eta(x, t)$  dada por (4.52), as expressões acima ficam

$$T(t) = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \sum_{\sigma, \sigma'} \int_{-\infty}^{\infty} dx \lambda \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dk' \omega_k^\sigma \omega_{k'}^{\sigma'} \mathcal{U}_\sigma(k) \mathcal{U}_{\sigma'}(k') e^{i[(k+k')x - (\omega_k^\sigma + \omega_{k'}^{\sigma'})t]}$$

$$U(t) = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \sum_{\sigma, \sigma'} \int_{-\infty}^{\infty} dx \tau \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dk' k k' \mathcal{U}_\sigma(k) \mathcal{U}_{\sigma'}(k') e^{i[(k+k')x - (\omega_k^\sigma + \omega_{k'}^{\sigma'})t]},$$

as quais são expressões bastante complicadas em geral. Entretanto, se a corda for homogênea, pode-se realizar as integrações em  $x$ , empregando a identidade

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k+k')x} = 2\pi \delta(k+k'),$$

resultando daí, após alguma álgebra,

$$T(t) = \frac{1}{2\pi} \lambda \left[ \sum_{\sigma} \int_0^{\infty} dk |\omega_k^\sigma \mathcal{U}_\sigma(k)|^2 + \operatorname{Re} \sum_{\substack{\sigma, \sigma' \\ (\sigma' \neq \sigma)}} \int_0^{\infty} dk \omega_k^\sigma \omega_k^{\sigma'} \mathcal{U}_\sigma(k) \mathcal{U}_{\sigma'}^*(k) e^{-i(\omega_k^\sigma - \omega_k^{\sigma'})t} \right]$$

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \tau \left[ \sum_{\sigma} \int_0^{\infty} dk k^2 |\mathcal{U}_\sigma(k)|^2 + \operatorname{Re} \sum_{\substack{\sigma, \sigma' \\ (\sigma' \neq \sigma)}} \int_0^{\infty} dk k^2 \mathcal{U}_\sigma(k) \mathcal{U}_{\sigma'}^*(k) e^{-i(\omega_k^\sigma - \omega_k^{\sigma'})t} \right],$$

onde foi empregada também a condição de realidade.

As expressões obtidas para  $T(t)$  e  $U(t)$  ainda dependem fortemente da forma específica da relação de dispersão  $\omega_k^\sigma$ . Para os exemplos de meios dispersivos discutidos na seção 4.9.3, a relação  $c = \sqrt{\tau/\lambda}$  ainda é válida, mas as relações de dispersão diferem substancialmente daquela obtida para um meio não dispersivo, *i.e.*,  $\omega_k^\sigma = \sigma k c$ . A relação de dispersão específica do meio pode apresentar frequências de corte ou, no caso, de uma corda oscilando em um meio viscoso, pode apresentar uma parte imaginária, responsável pela dissipação da energia transportada pelo pulso. Neste caso,

$$E = T(t) + U(t) \neq \text{cte.}$$

Por outro lado, para o caso de um meio não dispersivo ou sem amortecimento, pode-se mostrar que  $E = T + U = \text{cte}$ . Em particular, na primeira situação,

$$E = \sum_{\sigma} \int_0^{\infty} dk \mathcal{E}_k^\sigma, \text{ sendo } \mathcal{E}_k^\sigma = \frac{1}{\pi} \lambda (\omega_k^\sigma)^2 |\mathcal{U}_\sigma(k)|^2. \quad (4.64)$$

A quantidade  $\mathcal{E}_k^\sigma$  pode ser interpretada como a *densidade espectral de energia* associada ao modo normal  $\sigma$ .

## 4.10 EQUAÇÃO DA ONDA EM MEIOS NÃO UNIFORMES

Quando a corda não é uniforme, surge um caso extremo de meio dispersivo. Nesta seção será discutido brevemente o tratamento geral deste problema, bem como alguns exemplos de casos simples.

### 4.10.1 REFLEXÃO E TRANSMISSÃO NA INTERFACE ENTRE MEIOS DISTINTOS

Um tratamento geral para o caso de meios não uniformes será apresentado na seção 4.10.2. Nesta seção será tratado um caso mais simples do que o caso geral, porém que ainda apresenta fenômenos típicos de meios não uniformes.

Considera-se uma corda infinita composta por duas cordas com densidades distintas  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Coloca-se a origem do eixo  $x$  no ponto de junção das cordas. Escreve-se a solução geral da equação da onda dada por (4.52) como

$$\begin{aligned}\eta(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\sigma} \int_0^{\infty} dk \left[ \mathcal{U}_{\sigma}(k) e^{i(kx - \omega_k^{\sigma} t)} + \mathcal{U}_{\sigma}(-k) e^{i(-kx - \omega_{-k}^{\sigma} t)} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\sigma} \int_0^{\infty} dk \left[ \mathcal{U}_{\sigma}(k) e^{i(kx - \omega_k^{\sigma} t)} + \mathcal{U}_{\sigma}^*(k) e^{-i(kx - \omega_k^{\sigma} t)} \right].\end{aligned}$$

Se  $\omega_k^{\sigma} = \sigma \omega_k$ ,

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dk \left[ \mathcal{U}_+(k) e^{i(kx - \omega_k t)} + \mathcal{U}_-^*(k) e^{-i(kx + \omega_k t)} \right] + c.c.,$$

onde  $c.c.$  denota o complexo conjugado do termo anterior. As ondas parciais com amplitude  $\mathcal{U}_+(k)$  são aquelas que se propagam com velocidade de fase  $v_{\phi} > 0$ , ao passo que as ondas com amplitude  $\mathcal{U}_-(k)$  têm velocidade  $v_{\phi} < 0$ .

Supõe-se então um pacote de ondas de largura finita que incide sobre a interface entre as cordas diferentes vindo da esquerda (i. e., incidindo sobre  $x \rightarrow 0^-$ ). Será mostrado que este pacote pode sofrer reflexão parcial na interface, de modo que

$$\eta_1(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dk \left[ \mathcal{U}_{1+}(k) e^{i(kx - \omega_{1k} t)} + \mathcal{U}_{1-}^*(k) e^{-i(kx + \omega_{1k} t)} \right] + c.c. \quad (x < 0),$$

sendo que  $\omega_{1k} = kc_1$ . Este pacote sofre também uma transmissão parcial, de modo que

$$\eta_2(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dk \mathcal{U}'_{2+}(k) e^{i(kx - \omega_{2k} t)} + c.c. \quad (x > 0),$$

isto é,  $\mathcal{U}_{2-} = 0$  por não existirem ondas incidentes sobre  $x = 0$  vindas da direita. Nesta expressão,  $\omega_{2k} = kc_2$ . Ou seja,

$$\begin{aligned}\eta_1(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dk \left[ \mathcal{U}_{1+}(k) e^{ik(x - c_1 t)} + \mathcal{U}_{1-}^*(k) e^{-ik(x + c_1 t)} \right] + c.c., \\ \eta_2(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dk \mathcal{U}'_{2+}(k) e^{ik(x - c_2 t)} + c.c..\end{aligned}$$

As condições de contorno em  $x = 0$  devem ser, portanto

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} \eta_1(x, t) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \eta_2(x, t) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\partial \eta_2}{\partial x}.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\int_0^{\infty} dk_1 \left[ \mathcal{U}_{1+}(k_1) + \mathcal{U}_{1-}^*(k_1) \right] e^{-ic_1 k_1 t} = \int_0^{\infty} dk_2 \mathcal{U}'_{2+}(k_2) e^{-ic_2 k_2 t},$$

onde as variáveis de integração foram identificadas como  $k_1$  para  $x = 0^-$  e  $k_2$  para  $x = 0^+$ . Contudo, se no lado direito for definida a nova variável

$$k_2 = \frac{c_1}{c_2} k_1,$$

pode-se juntar ambos os lados em uma única integração,

$$\int_0^{\infty} dk_1 \left[ \mathcal{U}_{1+}(k_1) + \mathcal{U}_{1-}^*(k_1) - \frac{c_1}{c_2} \mathcal{U}'_{2+}\left(\frac{c_1}{c_2} k_1\right) \right] e^{-ic_1 k_1 t} = 0.$$

A nova variável de integração estabelece também a relação entre os comprimentos de onda das oscilações nos dois meios,

$$\lambda_2 = \frac{c_2}{c_1} \lambda_1.$$

Da mesma forma,

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dk k \left[ \mathcal{U}_{1+}(k) e^{ik(x - c_1 t)} - \mathcal{U}_{1-}^*(k) e^{-ik(x + c_1 t)} \right] + c.c.,$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk k \mathcal{U}'_{2+}(k) e^{ik(x-c_2t)} + c.c.$$

De onde resulta

$$\int_0^\infty dk_1 k_1 \left[ \mathcal{U}_{1+}(k_1) - \mathcal{U}_{1-}^*(k_1) - \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 \mathcal{U}'_{2+}\left(\frac{c_1}{c_2}k_1\right) \right] e^{-ic_1k_1t} = 0.$$

Portanto, pode-se estabelecer as seguintes relações entre as amplitudes espectrais,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{1+}(k) + \mathcal{U}_{1-}^*(k) &= \mathcal{U}_{2+}(k) \\ \mathcal{U}_{1+}(k) - \mathcal{U}_{1-}^*(k) &= \frac{c_1}{c_2} \mathcal{U}_{2+}(k), \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{U}_{2+}(k) = (c_1/c_2)\mathcal{U}'_{2+}(c_1k/c_2)$ . A partir das mesmas, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{2+}(k) &= \frac{2\mathcal{U}_{1+}(k)}{1 + c_1/c_2} \\ \mathcal{U}_{1-}^*(k) &= \frac{1 - c_1/c_2}{1 + c_1/c_2} \mathcal{U}_{1+}(k). \end{aligned} \tag{4.65}$$

Assim, tanto a amplitude do modo normal refletido quanto a amplitude do modo transmitido são determinadas pela amplitude do modo incidente. Como  $c_1/c_2 > 0$ , o modo transmitido estará sempre em fase com o modo incidente. Porém, a fase relativa entre  $\mathcal{U}_{1+}$  e  $\mathcal{U}_{1-}^*$  tem as possibilidades:

- $c_2 > c_1$ :  $\mathcal{U}_{1-}^*$  e  $\mathcal{U}_{1+}$  estão em fase.
- $c_2 < c_1$ :  $\mathcal{U}_{1-}^*$  e  $\mathcal{U}_{1+}$  estão em oposição de fase.

Esta relação entre as fases dos modos incidentes e refletidos também é típica de fenômenos ondulatórios, ocorrendo também com ondas eletromagnéticas ou com ondas de probabilidade quânticas.

Em termos da energia transportada ao longo da corda, como não há agente de amortecimento atuando na reflexão, toda a energia que incide na junção em  $x = 0$  deve se dividir sem perdas entre os pulsos refletido e transmitido. De acordo com (4.64), isto implica que

$$E_{\text{incidente}} = E_{\text{refletida}} + E_{\text{transmitida}}, \text{ ou seja,}$$

$$\int_0^\infty dk_1 |k_1 \mathcal{U}_{1+}(k_1)|^2 = \int_0^\infty dk_1 |k_1 \mathcal{U}_{1-}(k_1)|^2 + \int_0^\infty dk_2 |k_2 \mathcal{U}'_{2+}(k_2)|^2,$$

onde foi introduzida a densidade espectral de energia por modo

$$\mathcal{E}_k^\sigma = \frac{1}{\pi} \lambda (\omega_k^\sigma)^2 |\mathcal{U}_\sigma(k)|^2 \xrightarrow{\omega_k^\sigma = \sigma k c} \mathcal{E}_k^\sigma = \frac{1}{\pi} \lambda c^2 |k \mathcal{U}_\sigma(k)|^2.$$

Inserindo na equação acima as relações entre as intensidades espectrais (4.65), esta se reduz à equação

$$|\mathcal{U}_{1+}(k)|^2 = |\mathcal{U}_{1-}(k)|^2 + \frac{c_1}{c_2} |\mathcal{U}_{2+}(k)|^2,$$

a partir da qual verifica-se facilmente que, de fato, ocorre conservação de energia no processo reflexão + transmissão.

Isto permite definir os coeficientes de reflexão ( $R$ ) e transmissão ( $T$ ), tais que

$$\begin{aligned} R + T &= 1, \\ R &= \left| \frac{\mathcal{U}_{1-}(k)}{\mathcal{U}_{1+}(k)} \right|^2 = \left( \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \right)^2 \\ T &= \frac{c_1}{c_2} \left| \frac{\mathcal{U}_{2+}(k)}{\mathcal{U}_{1+}(k)} \right|^2 = \frac{4c_1c_2}{(c_1 + c_2)^2}. \end{aligned}$$

Relações semelhantes são obtidas no estudo da reflexão e transmissão de ondas eletromagnéticas na interface entre dois meios com distintos índices de refração.

### 4.10.2 TRATAMENTO GERAL

No caso geral de uma corda não homogênea, tanto a densidade linear de massa quanto a tensão da corda podem depender de posição, isto é,  $\lambda = \lambda(x)$  e  $\tau = \tau(x)$ . Esta possibilidade já havia sido prevista na dedução da densidade Lagrangiana (4.36), a qual fica então

$$\mathcal{L} \{ \eta_x, \eta_t; x \} = \frac{1}{2} \lambda(x) \eta_t^2 - \frac{1}{2} \tau(x) \eta_x^2.$$

Aplicando a equação de campo (4.38) a  $\mathcal{L}$ , resulta a equação da onda em um meio inhomogêneo,

$$\lambda(x) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \tau(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] = 0. \quad (4.66)$$

Um dos métodos existentes para o tratamento da equação (4.66) é o método da transformação de Laplace, discutido brevemente a seguir.

#### MÉTODO DA TRANSFORMAÇÃO DE LAPLACE

A solução de (4.66) é normalmente difícil de ser obtida. Um método que pode ser empregado para fornecer pelo menos uma informação parcial a respeito de sua solução consiste no uso da transformação de Laplace no tempo, ao invés da transformação de Fourier.

Dada a solução formal  $\eta = \eta(x, t)$  da equação da onda, define-se

$$\eta(x, s) \equiv \mathcal{L} \{ \eta(x, t) \} = \int_0^\infty dt \eta(x, t) e^{-st}, \quad (4.67)$$

onde é assumido que a integral existe. Dadas agora as seguintes propriedades

$$\mathcal{L} \{ \eta_t(x, t) \} = s\eta(x, s) - \eta(x, 0), \quad \mathcal{L} \{ \eta_{tt}(x, t) \} = s^2\eta(x, s) - s\eta(x, 0) - \eta_t(x, 0),$$

as quais supõe o conhecimento das condições iniciais, a transformação  $\mathcal{L} \{ \dots \}$  será agora aplicada à equação (4.66).

Realizando esta aplicação, resulta

$$\frac{d}{dx} \left[ \tau(x) \frac{d}{dx} \eta(x, s) \right] - s^2 \lambda(x) \eta(x, s) = -\lambda(x) [s\eta(x, 0) + \eta_t(x, 0)], \quad (4.68a)$$

a qual está na forma de uma equação de Sturm-Liouville não homogênea, cuja solução está submetida às condições de contorno de Dirichlet

$$\eta(0, t) = 0 \quad \eta(\ell, t) = 0. \quad (4.68b)$$

A solução do problema de contorno (4.68) pode ser obtida a partir do método da função de Green. Contudo, para isto, é necessário primeiro conhecer as formas de  $\tau(x)$  e  $\lambda(x)$ .

No caso mais simples de uma corda não uniforme, supõe-se

$$\tau(x) = \tau_0 + \epsilon_\tau x, \quad \lambda(x) = \lambda_0 + \epsilon_\lambda x.$$

Então, a equação fica

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ (\tau_0 + \epsilon_\tau x) \frac{d}{dx} \eta(x, s) \right] - s^2 (\lambda_0 + \epsilon_\lambda x) \eta(x, s) &= -(\lambda_0 + \epsilon_\lambda x) [s\eta(x, 0) + \eta_t(x, 0)], \\ (\tau_0 + \epsilon_\tau x) \eta'' + \epsilon_\tau \eta' - s^2 (\lambda_0 + \epsilon_\lambda x) \eta &= -(\lambda_0 + \epsilon_\lambda x) [s\eta(x, 0) + \eta_t(x, 0)]. \end{aligned}$$

No caso mais simples onde  $\epsilon_\tau = 0$ , esta equação se reduz a

$$\tau_0 \eta'' - s^2 (\lambda_0 + \epsilon_\lambda x) \eta = -(\lambda_0 + \epsilon_\lambda x) [s\eta(x, 0) + \eta_t(x, 0)].$$

Considerando a sua forma homogênea,

$$\tau_0 \eta_h'' - s^2 (\lambda_0 + \epsilon_\lambda x) \eta_h = 0$$

e realizando a transformação de variável

$$\zeta = \left( \frac{s^2}{\tau_0 \epsilon_\lambda} \right)^{\frac{1}{3}} (\lambda_0 + \epsilon_\lambda x) \implies \frac{d^2}{dx^2} = \left( \frac{\epsilon_\lambda s^2}{\tau_0} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{d^2}{d\zeta^2},$$

obtém-se

$$\frac{d^2 \eta}{d\zeta^2} - \zeta \eta_h = 0.$$

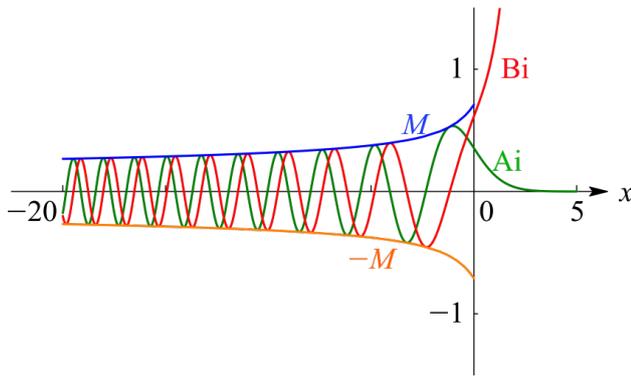


Figura 4.22: Gráficos das funções  $Ai(x)$  e  $Bi(x)$ .

A equação acima é a conhecida equação de Airy,<sup>9</sup> cuja solução geral é escrita como

$$\eta_h(\zeta, s) = c_1 Ai(\zeta) + c_2 Bi(\zeta),$$

sendo que as funções  $Ai(\zeta)$  e  $Bi(\zeta)$  são obtidas a partir de séries de potências. Gráficos destas funções são apresentados na figura 4.22.

Portanto, a solução geral da parte homogênea fica escrita

$$\eta_h(x, s) = c_1 Ai\left(\sqrt[3]{\frac{s^2}{\tau_0 \epsilon_\lambda^2}}(\lambda_0 + \epsilon_\lambda x)\right) + c_2 Bi\left(\sqrt[3]{\frac{s^2}{\tau_0 \epsilon_\lambda^2}}(\lambda_0 + \epsilon_\lambda x)\right).$$

A função  $\eta_h(x, s)$  é empregada na derivação da função de Green deste problema, a qual não será aqui obtida, devido à complexidade matemática de sua derivação. Contudo, algumas consequências importantes podem ser inferidas a partir desta solução.

A forma matemática da solução homogênea, ilustrada na figura 4.22, mostra que  $\eta_h(x, s)$  possui duas regiões com comportamento distinto: uma região onde a solução está na forma oscilante com comprimento de onda variável ( $\zeta < 0$ ) e outra onde a solução tem a forma exponencial ( $\zeta > 0$ ). Este comportamento dual da solução homogênea será transferido para a solução completa  $\eta(x, s)$  da equação não homogênea e, por fim, irá determinar a solução final do problema,  $\eta(x, t)$ , quando for aplicada a transformação inversa de Laplace a (4.67).

A transição observada na figura 4.22 mostra que quando a corda tem densidade e tensão não uniformes, podem existir pontos ou regiões ao longo da mesma que são inacessíveis a um determinado modo normal, como um modo propagante. A existência dessas regiões é responsável pelo surgimento de diversos fenômenos típicos de propagação de ondas em meios não uniformes: **reflexão parcial de modos normais**, que ocorre quando modos propagantes se aproximam de uma região proibida, sendo progressivamente refletidos ao se aproximar desta região; **tunelamento de um modo normal**, que ocorre quando o modo é propagante em ambos os lados de uma região proibida. Um modo oscilante incide sobre a região proibida, tornando-se não propagante no interior da mesma e tendo a sua amplitude exponencialmente reduzida. Contudo, como o modo é novamente propagante na outra extremidade, uma fração da energia incidente pode assim ser transmitida (ou tunelada) para a região acessível. Finalmente, também pode ocorrer uma **conversão de modos normais**, quando parte da energia de um determinado modo é transferida, nas vizinhanças da região proibida, para outro modo normal que é propagante nesta região. Estes fenômenos são típicos para ondas propagando-se em meios não uniformes e são observados também com ondas eletromagnéticas ou com as densidades de probabilidades derivadas pelas equações da mecânica quântica. Uma discussão detalhada destes fenômenos em plasmas pode ser vista em (SWANSON, 1998).

<sup>9</sup>Ver, por exemplo, <<http://dlmf.nist.gov/9>>.