

A DINÂMICA DOS CORPOS RÍGIDOS

UM CORPO RÍGIDO é um sistema de partículas cujas distâncias relativas permanecem inalteradas, independente das forças e vínculos que atuam sobre o sistema. É claro que tais corpos não existem na natureza, uma vez que todos os objetos são compostos por partículas que estão ligadas entre si por forças internas restauradoras que permitem a existência de movimentos relativos, como vibrações em torno do equilíbrio, por exemplo. Contudo, tais movimentos são microscópicos e podem, em algumas situações, ser desprezados quando se deseja realizar a descrição do movimento macroscópico do corpo. Casos onde esta suposição é inválida compreendem colisões inelásticas entre corpos ou a atuação de forças tais que provocam uma deformação macroscópica dos mesmos. Tais situações extremas não serão consideradas neste capítulo e o corpo será considerado indeformável.

O conceito de um corpo rígido empregado neste capítulo será tanto de uma coleção de partículas discretas quanto de uma distribuição contínua de matéria. Neste caso, quando a soma sobre partículas for envolvida, esta será substituída por integrações sobre distribuições contínuas de massas. As equações de movimento resultantes serão válidas em qualquer um dos casos considerados.

3.1 REFERENCIAIS PARA A DINÂMICA DO CORPO RÍGIDO

Apesar de um corpo rígido ser, em geral, composto por um grande número de partículas, as forças internas que mantêm as distâncias entre as mesmas fixas introduzem um conjunto de vínculos tal que o corpo possui, no máximo, 06 (seis) graus de liberdade. Três desses graus de liberdade correspondem à translação do corpo, enquanto que os demais correspondem às possíveis rotações do mesmo.

Uma maneira simples de compreender a relação entre o número de partículas de um corpo rígido e o número de graus de liberdade é a seguinte. Imagina-se que o corpo é composto por um certo número $N \geq 2$ de partículas discretas conectadas entre si por barras rígidas de massas nulas. Essas barras rígidas fazem o papel das forças internas que mantêm a estrutura do corpo. Se $N = 2$ (partículas 1 e 2), há um total de 06 (seis) coordenadas, mas como a distância entre as partículas é fixa, isto introduz o vínculo holônomo $r_{12} = |r_2 - r_1| = \text{cte}$. Portanto, há um total de 05 (cinco) graus de liberdade. Se $N = 3$, desde que as partículas não sejam colineares, há um total de 09 (nove) coordenadas com 03 (três) vínculos, resultando em 06 (seis) graus de liberdade. Esta situação é ilustrada na figura 3.1. Introduzindo uma quarta partícula ao sistema, são introduzidas mais três coordenadas e mais três vínculos, mantendo-se $n = 6$. Qualquer nova partícula introduzida no sistema introduz três novas coordenadas, mas terá necessariamente três novos vínculos para manter sua posição fixa em relação às demais. Portanto, um corpo rígido com $N \geq 3$ partículas sempre terá um total de $m = 3N - 6$ vínculos holônomos, resultando

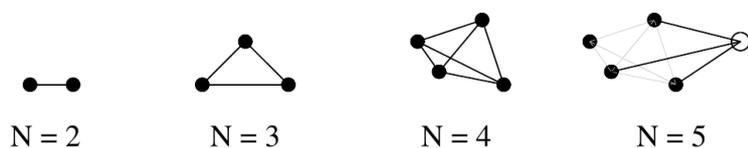


Figura 3.1: Corpos rígidos simples. Para $N \geq 3$, um total de $m = 3N - 6$ vínculos são necessários para garantir a rigidez do corpo.

em $n = 6$ graus de liberdade.

O procedimento usual para a descrição da dinâmica de um corpo rígido emprega um conjunto de até três referenciais, os quais estão representados na figura 3.2. Nesta figura, o contorno fechado representa uma região confinada no espaço, a qual pode representar a superfície de uma distribuição contínua de matéria ou um contorno imaginário que delimita o conjunto de partículas que compõe o corpo rígido.

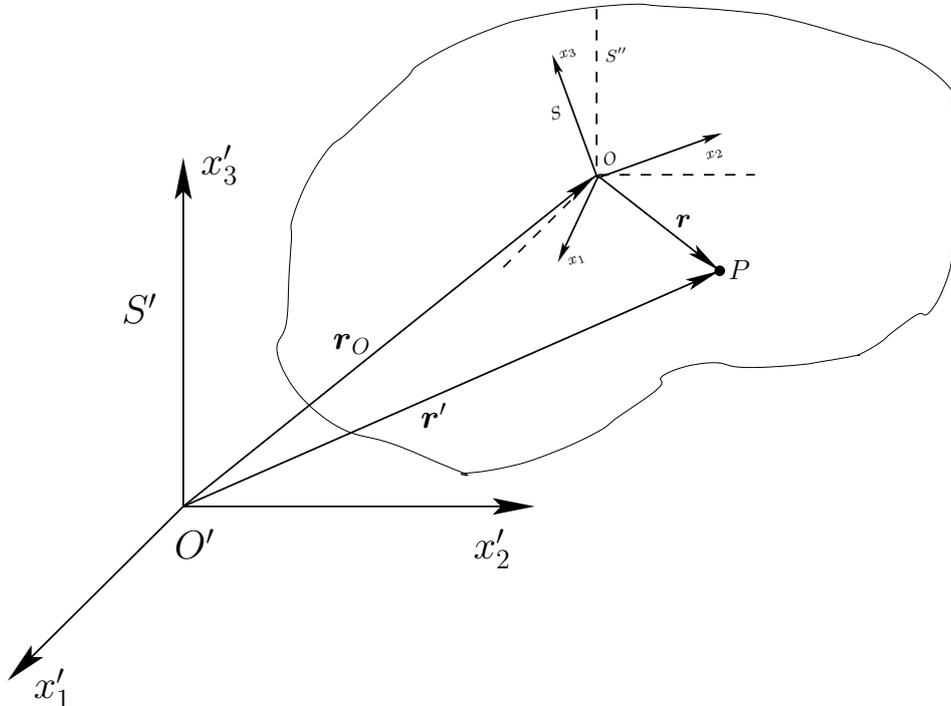


Figura 3.2: Referenciais empregados na descrição da dinâmica de um corpo rígido.

Na figura 3.2 estão representadas as seguintes definições:

- S' : Referencial inercial, denominado também como **referencial fixo** ou **referencial do espaço**, o qual possui coordenadas Cartesianas (x'_1, x'_2, x'_3) , com os correspondentes vetores ortonormais $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$ e com origem no ponto O' . Este referencial pode ser também considerado como o referencial de laboratório.
- S : Referencial preso ao corpo rígido, denominado **referencial do corpo**. Este referencial possui coordenadas Cartesianas (x_1, x_2, x_3) com os correspondentes vetores unitários $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ e com origem no ponto O . Por se mover junto com o corpo, S é em geral um referencial não inercial.
- S'' : Referencial inercial com eixos paralelos a S' . Este referencial é sempre tal que sua origem coincide com a origem de S em um dado instante de tempo.
- P : Um ponto qualquer do espaço. Pode representar a posição instantânea de uma das partículas do corpo rígido ou do seu centro de massa.
- r_O : Posição instantânea de O em relação à origem do referencial S' (ponto O').
- r' : Posição instantânea do ponto P em relação a O' .
- r : Posição instantânea do ponto P em relação à origem do referencial S (ponto O).

3.1.1 ROTAÇÕES DE EIXOS E TRANSFORMAÇÕES ORTOGONAIS

Como o movimento geral do corpo irá envolver tanto translações quanto rotações, o referencial S estará sempre em movimento em relação a S' . É importante estudar-se primeiro como as quantidades dinâmicas (posições, velocidades, acelerações, etc) observadas em um desses

referenciais estão relacionadas com as mesmas quantidades observadas em relação ao outro. Estas relações são importantes principalmente quando houver rotações envolvidas. Por esta razão, serão consideradas inicialmente as rotações dos eixos de S em relação a S' . Como as translações não serão consideradas neste momento, um procedimento equivalente consiste em considerar rotações arbitrárias de S em relação a S'' , uma vez que este último é inercial e tem seus eixos sempre paralelos a S' .

A figura 3.3 ilustra rotações arbitrárias do referencial S (do corpo) em relação ao referencial S'' (inercial). Considera-se primeiro o caso mais simples onde os referenciais possuem um eixo em comum e uma rotação arbitrária é estabelecida em torno do mesmo, como é observado na figura 3.3(a). Esta figura mostra que os eixos (x_1, x_2) de S estão rotados por um ângulo θ em relação aos correspondentes eixos de S'' .

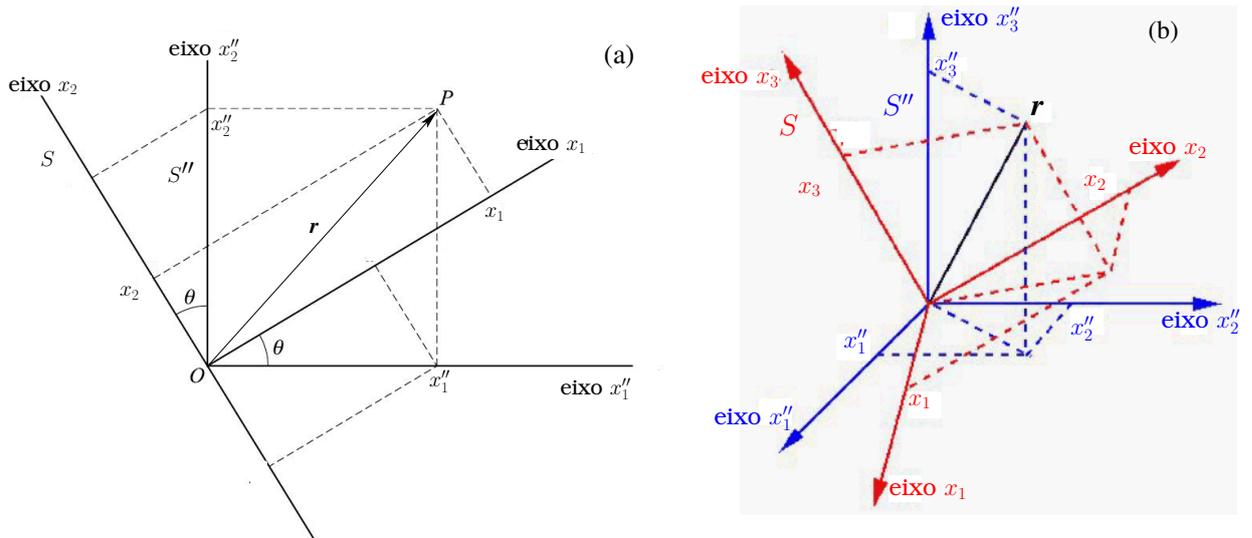


Figura 3.3: (a) Rotação sobre o plano (x''_1, x''_2) (em torno do eixo $x''_3 = x_3$) por um ângulo θ . (b) Rotação arbitrária de eixos do referencial S em torno da origem do referencial S'' . Pode-se observar que em ambos os casos as rotações mantêm a norma do vetor r invariante.

A mesma figura mostra também um ponto P qualquer do espaço (com $x_3 = x''_3 = 0$), o qual é localizado em relação às origens de ambos os referenciais pelo vetor posição r . Em um determinado referencial, este vetor pode ser expresso em termos de suas *componentes* (suas coordenadas Cartesianas) nas diferentes direções do espaço como

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^2 x_i \hat{e}_i \text{ (em } S), \text{ ou } \mathbf{r}'' = \sum_{i=1}^2 x''_i \hat{e}''_i \text{ (em } S''). \tag{3.1a}$$

Atribuindo-se uma realidade física ao vetor r (por se tratar da posição instantânea de uma partícula do sistema, por exemplo) e assumindo que o espaço é isotrópico (*i. e.*, não há direções preferenciais no espaço), então a posição instantânea de P não pode depender da orientação do sistema de referências. Em outras palavras,

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{r} \implies \sum_{i=1}^2 x''_i \hat{e}''_i = \sum_{i=1}^2 x_i \hat{e}_i. \tag{3.1b}$$

A equação acima permite obter a relação entre as coordenadas de P em um dos referenciais em relação ao outro. Para se obter essa relação, parte-se da seguinte relação entre os vetores unitários de S e S'' :

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= \cos \theta \hat{e}''_1 + \sin \theta \hat{e}''_2 \\ \hat{e}_2 &= -\sin \theta \hat{e}''_1 + \cos \theta \hat{e}''_2. \end{aligned} \tag{3.1c}$$

Esta relação pode ser verificada pela inspeção visual da figura 3.3(a).

Neste ponto, é conveniente introduzir-se uma notação matricial, a qual tem a vantagem de compactar a notação e as expressões. Isto é realizado pela definição da matriz K ,

$$K \doteq \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

com a qual pode-se escrever (3.1c) como

$$\hat{e}_i = \sum_{j=1}^2 K_{ji} \hat{e}_j'', \quad (i = 1, 2).$$

A notação torna-se ainda mais compacta se os vetores unitários também forem organizados na forma matricial através das matrizes coluna e linha

$$\hat{e} \doteq \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{e} \equiv \hat{e}^T = (\hat{e}_1 \ \hat{e}_2),$$

sendo $\tilde{A} \equiv A^T$ a transposta da matriz A . Com esta notação, as relações (3.1c) podem ser escritas

$$\hat{e} = \tilde{K} \hat{e}'', \quad \hat{e}'' = \tilde{K}^{-1} \hat{e}, \quad (3.1d)$$

sendo A^{-1} a inversa da matriz A . Condições para a existência dessa matriz inversa serão discutidas mais adiante.

Seguindo com esta notação matricial, as coordenadas Cartesianas de r em (3.1a) podem ser organizadas agora como

$$r \doteq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ e } r'' \doteq \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix},$$

de modo que (3.1b) fica escrita

$$r = \tilde{r} \hat{e} = \tilde{r}'' \hat{e}''.$$

Introduzindo agora a relação entre os vetores de base (3.1d), resulta então

$$\begin{aligned} \tilde{r}'' \hat{e}'' = \tilde{r} \tilde{K} \hat{e}'' &\implies \tilde{r}'' = \tilde{r} \tilde{K} \xrightarrow{(\tilde{A}B) = \tilde{B}A} r'' = K r \iff r = K^{-1} r'' \\ &\rightsquigarrow \begin{cases} x_1'' = x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta \\ x_2'' = x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1e)$$

A última expressão em (3.1e) mostra como as coordenadas Cartesianas no referencial S'' se relacionam com as coordenadas em S . Por outro lado, as coordenadas em S se relacionam com as coordenadas em S'' através da inversa da matriz K .

Considera-se agora o caso mais geral de uma rotação arbitrária de S em relação a S'' , conforme representado na figura 3.3(b). Para uma rotação em torno de um eixo, somente um ângulo se faz necessário. Já no caso geral, dois ou mais ângulos são necessários, mas sempre é possível expressar-se as coordenadas de r em um referencial em relação ao outro por meio de uma matriz, exatamente como foi realizado no caso particular acima. Nota-se que como $\hat{e}_i'' \parallel \hat{e}_i'$ ($i = 1, 2, 3$), pois S'' e S' têm seus eixos sempre paralelos entre si, as transformações de referenciais podem ser discutidas diretamente entre S e S' quando somente rotações estão envolvidas. Esta suposição será adotada nos desenvolvimentos realizados a seguir, até o ponto em que translações serão incluídas.

A generalização da relação (3.1d) entre os vetores de base de S e os correspondentes vetores de S' também pode ser escrita como $\hat{e} = \tilde{K} \hat{e}'$ e $\hat{e}' = \tilde{K}^{-1} \hat{e}$, sendo que agora K é uma matriz (3×3) e

$$\hat{e} \doteq \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{e} \equiv \hat{e}^T = (\hat{e}_1 \ \hat{e}_2 \ \hat{e}_3).$$

Da mesma forma como se estabeleceram as relações (3.1c e 3.1d), se

$$\begin{aligned} \hat{e} = \tilde{K} \hat{e}' \iff \hat{e}_i = \sum_{j=1}^3 K_{ji} \hat{e}_j', \quad (i = 1, 2, 3), \text{ então} \\ \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j' = \sum_{k=1}^3 K_{ki} \hat{e}_k' \cdot \hat{e}_j' = K_{ji}. \end{aligned} \quad (3.2a)$$

Ou seja,

$$K_{ij} = \hat{e}_j \cdot \hat{e}'_i \doteq \cos \theta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (3.2b)$$

A quantidade K_{ij} é denominada o **coseno diretor** do eixo x_j em relação ao eixo x'_i e consiste na projeção de \hat{e}_j na direção de \hat{e}'_i .

A relação (3.2a) descreve a **mudança de bases** na transformação $S' \rightarrow S$: passou-se da base $\{\hat{e}'_i\}$ para a base $\{\hat{e}_i\}$. A transformação inversa $S \rightarrow S'$ é realizada pela mudança de bases $\{\hat{e}_i\} \rightarrow \{\hat{e}'_i\}$. Esta transformação é operacionalizada por

$$\hat{e}' = \tilde{K}^{-1} \hat{e}.$$

Com a mesma imposição de equivalência na determinação do vetor posição r em ambos os referenciais, a generalização de (3.1e) resulta novamente em

$$r = K^{-1} r', \quad \text{onde agora } r = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (3.2c)$$

Definindo-se por fim a matriz

$$R \doteq K^{-1} \implies R_{ij} = (K^{-1})_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

denominada de **matriz de rotação**, pode-se então escrever

$$r = R r' \implies x_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x'_j, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Observa-se que este último resultado pode ser interpretado como uma lei de transformação de coordenadas do tipo $x_i = x_i(\{x'_j\})$, a qual é uma transformação linear, pois os elementos da matriz R são constantes nesta transformação. De acordo com esta interpretação, os elementos de R também podem ser escritos como

$$x_i = \sum_{k=1}^3 R_{ik} x'_k \implies \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} = \sum_{k=1}^3 R_{ik} \frac{\partial x'_k}{\partial x'_j} \implies R_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j}.$$

Pode-se finalmente escrever as relações obtidas na transformação de referenciais $S' \rightarrow S$ como

$$\begin{cases} \hat{e} = \tilde{K} \hat{e}' \\ \hat{e}' = \tilde{K}^{-1} \hat{e} \end{cases} \iff \begin{cases} r = R r' \\ r' = R^{-1} r, \end{cases} \quad (3.2d)$$

ou, de forma explícita,

$$\begin{cases} \hat{e}_i = \sum_{j=1}^3 K_{ji} \hat{e}'_j \\ \hat{e}'_i = \sum_{j=1}^3 (K^{-1})_{ji} \hat{e}_j \end{cases} \iff \begin{cases} x_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x'_j \\ x'_i = \sum_{j=1}^3 (R^{-1})_{ij} x_j, \end{cases} \quad (3.2e)$$

uma vez que $(\tilde{A})^{-1} = \widetilde{(A^{-1})}$.

3.1.2 PROPRIEDADES DA MATRIZ DE ROTAÇÃO

Embora a matriz de rotação R (ou K) tenha um total de 09 (nove) componentes, somente três destes são realmente independentes, sendo os demais dependentes dos mesmos. Isto pode ser prontamente verificado a partir da condição de isotropia do espaço ($r_{em S'} = r_{em S}$), já empregada anteriormente, em conjunto com a exigência adicional de invariância da **norma** do espaço; isto é,

$$\|r\| = \|r'\|, \quad \text{onde } \|r\| \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^3 x_i^2}.$$

Esta medida de $\|\mathbf{r}\|$ coincide com a interpretação geométrica e com a noção intuitiva de distância entre dois pontos no espaço Euclidiano, a qual corresponde à distância do ponto P à origem do referencial. Na linguagem da geometria e da topologia, a invariância da norma mostra que a *métrica* do espaço não muda frente a transformação $S' \rightarrow S$.

Impondo-se esta condição à relação (3.2e) entre os componentes Cartesianos de ambos os referenciais, resulta

$$\sum_{i=1}^3 x_i'^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 \implies \sum_{i=1}^3 x_i'^2 = \sum_{i,j,k=1}^3 R_{ij} R_{ik} x'_j x'_k.$$

Esta identidade somente pode ser satisfeita em geral se a seguinte **condição de ortogonalidade** for satisfeita:

$$\sum_{k=1}^3 R_{ki} R_{kj} = \delta_{ij} \text{ ou } \sum_{k=1}^3 R_{ik} R_{jk} = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (3.3a)$$

a qual também pode ser escrita em termos da matriz transposta como

$$\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{R} = \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{I}_3,$$

sendo \mathbf{I}_3 **matriz identidade** de ordem 3

$$\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\mathbf{I}_3)_{ij} = \delta_{ij}.$$

Comparando esta condição com a definição da matriz inversa de \mathbf{R} ,

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I}_3,$$

conclui-se então que

$$\mathbf{R}^{-1} = \tilde{\mathbf{R}}. \quad (3.3b)$$

Ou seja, a inversa da matriz de rotação é a sua transposta. Uma matriz que satisfaz esta condição é denominada **matriz ortogonal**.

Este resultado permite escrever as relações de transformação (3.2e) somente em termos da matriz \mathbf{R} como

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} \hat{\mathbf{e}}'_j \\ \hat{\mathbf{e}}'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ji} \hat{\mathbf{e}}_j \end{cases} \iff \begin{cases} x_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x'_j \\ x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ji} x_j, \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{R}\hat{\mathbf{e}}' \\ \hat{\mathbf{e}}' = \tilde{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{e}} \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{R}\mathbf{r}' \\ \mathbf{r}' = \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{r}, \end{cases} \quad (3.4a)$$

sendo que os elementos da matriz \mathbf{R} são dados por

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}'_j = \cos \theta_{ji} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \\ R_{ji} &= \hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (3.4b)$$

A condição de ortogonalidade (3.3) leva a uma classificação quanto a dois tipos possíveis de rotações. Empregando-se as identidades

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}), \quad \det(\tilde{\mathbf{A}}) = \det(\mathbf{A}),$$

sendo $\det(\mathbf{A})$ o determinante da matriz \mathbf{A} , a condição de ortogonalidade de \mathbf{R} implica em

$$\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{R} = \mathbf{I}_3 \implies \det(\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{R}) = \det(\mathbf{R}) \det(\tilde{\mathbf{R}}) = [\det(\mathbf{R})]^2 = \det(\mathbf{I}_3) = 1.$$

Ou seja, $\det(\mathbf{R}) = \pm 1$.

Classificam-se então os dois tipos possíveis de rotações:

$$\begin{aligned} \det(R) = +1 &: \textbf{Rotações próprias} \\ \det(R) = -1 &: \textbf{Rotações impróprias.} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Uma rotação própria é aquela na qual a transformação $S' \rightarrow S$ pode ser executada por uma sequência de rotações infinitesimais. Já uma rotação imprópria corresponde a uma reflexão ou inversão dos eixos do referencial (também denominada *transformação de paridade*), seguida por uma rotação própria.

Ainda sobre a condição de ortogonalidade (3.3), observa-se que a mesma estabelece um total de 06 (seis) relações distintas entre os elementos da matriz R , o que implica em que dos nove elementos da matriz, somente 03 (três) são realmente independentes entre si. Em outras palavras, uma rotação qualquer no espaço pode ser executada empregando-se, no máximo, três ângulos distintos em torno de três eixos de rotação, os quais correspondem aos três graus de liberdade do corpo rígido frente a rotações. Há infinitas maneiras de se definir esses ângulos. Uma das definições mais empregadas são os *ângulos de Euler*, os quais serão discutidos mais adiante, na seção 3.9.

Seja agora uma quantidade vetorial $g = g(t)$ qualquer, a qual corresponde a alguma quantidade dinâmica do corpo (tal como velocidade, aceleração, etc) e que varia com o tempo. A imposição de isotropia e equivalência dos referenciais também é imposta às medidas realizadas do valor instantâneo da quantidade g ; ou seja, se $g_{S'}$ for a medida do valor instantâneo de g do ponto de vista de um observador em S' e g_S sua medida em S , então

$$g_{S'} = g_S \implies \sum_{i=1}^3 g'_i \hat{e}'_i = \sum_{i=1}^3 g_i \hat{e}_i, \quad (3.6)$$

sendo (g_1, g_2, g_3) as componentes de g no referencial S .

Em consequência, na transformação $S' \rightarrow S$ as componentes de g seguem a mesma lei de transformação (3.4) do vetor posição; ou seja,

$$\begin{aligned} g_i &= \sum_{j=1}^3 R_{ij} g'_j, \text{ sendo } R_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \\ g'_i &= \sum_{j=1}^3 R_{ji} g_j, \text{ sendo } R_{ji} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Estas relações, de fato, consistem na própria definição do que é um vetor, como aquele objeto matemático composto por uma terna (n -upla para o caso com n dimensões) de números, cujos componentes transformam-se entre sistemas de coordenadas de acordo com (3.7).¹

Uma outra importante propriedade das matrizes ortogonais merece ser mencionada. Denota-se por $O(3)$ o conjunto de todas as matrizes ortogonais de ordem 3 e, por conseguinte, o conjunto $O(n)$ é composto por todas as matrizes ortogonais de ordem n . Considere agora as matrizes do $O(n)$. Estas satisfazem as seguintes propriedades:

1. Dadas $R_1, R_2 \in O(n)$, a matriz resultante do produto matricial $R_1 R_2$ também pertence a $O(n)$. Isto pode ser prontamente demonstrado, pois

$$(R_1 R_2)^{-1} = R_2^{-1} R_1^{-1} = \widetilde{R_2} \widetilde{R_1} = \widetilde{(R_1 R_2)}.$$

Ou seja, a inversa de $R_1 R_2$ também é a sua transposta.

2. Dadas $R_1, R_2, R_3 \in O(n)$, a seguinte propriedade, denominada *associatividade*,

$$(R_1 R_2) R_3 = R_1 (R_2 R_3)$$

é satisfeita pois o produto matricial é associativo.

3. Existe uma única matriz identidade $I_n \in O(n)$ tal que, para qualquer $R \in O(n)$,

$$R I_n = I_n R = R.$$

Isto segue da própria definição de matriz identidade.

¹Para uma discussão mais detalhada a respeito de vetores e tensores, ver, por exemplo, [Apostila de Física-Matemática](#), capítulo 6.

4. Dada uma matriz $R \in O(n)$, existe uma única matriz $R^{-1} \in O(n)$, denominada *elemento inverso*, tal que

$$RR^{-1} = R^{-1}R = I_n.$$

Esta propriedade vem da própria definição de uma matriz ortogonal, pois $R^{-1} = \tilde{R}$.

O cumprimento das condições 1 – 4 acima mostram que o conjunto $O(n)$ com a multiplicação matricial compõe uma estrutura algébrica denominada de *grupo*. A existência e as propriedades de grupos são importantes para o desenvolvimento das teorias física modernas, tais como as eletrodinâmica e cromodinâmica quânticas e a teoria quântica de campos.²

Uma propriedade importante do grupo $O(n)$, que será relevante na próxima seção, diz respeito à comutatividade das transformações geradas pelas suas matrizes. Se forem realizadas somente rotações em torno de um eixo fixo, então essas transformações podem ser implementadas por matrizes pertencentes ao grupo $O(2)$ (composto por matrizes 2×2). Neste caso, se $R_1, R_2 \in O(2)$ são duas matrizes de rotação aplicadas consecutivamente um determinado sistema de coordenadas, então $R_1R_2 \equiv R_2R_1$, isto é, a orientação final do sistema independe da ordem de aplicação das rotações. Grupos que satisfazem esta condição de comutatividade são denominados *Abelianos*. Por outro lado, se $n \geq 3$ esta condição em geral não é válida; ou seja, se agora $R_1, R_2 \in O(3)$, por exemplo, em cuja situação essas matrizes realizam rotações genéricas no espaço, então, em geral, $R_1R_2 \neq R_2R_1$. Grupos não comutativos são denominados *não Abelianos*.

Por fim, retornando à classificação das rotações próprias ou impróprias em (3.5), é interessante mencionar que o subconjunto das matrizes $R \in O(n)$ que possuem a propriedade $\det(R) = +1$, isto é, que executam rotações próprias, forma um grupo por si próprio (um *subgrupo* do $O(n)$), denominado *grupo ortogonal especial* $SO(n)$.

3.2 CINEMÁTICA DOS CORPOS RÍGIDOS

Retornando aos referenciais definidos na figura 3.2, como o sistema de coordenadas S está fixo ao corpo, este referencial é, em geral, não inercial, devido ao movimento resultante do corpo rígido. Por esta razão, é necessário estudar antes como as variações das grandezas física observadas por S se relacionam com o referencial inercial S' , onde as leis da mecânica são realmente válidas.

3.2.1 TAXA DE VARIAÇÃO TEMPORAL DE VETORES DINÂMICOS

Será estudado agora como a variação de um vetor dinâmico qualquer $\mathbf{g}(t)$ é observada nos referenciais definidos na figura 3.2. Para o estudo inicial, será considerada a relação entre S e S'' novamente, para mais adiante a relação $S \leftrightarrow S'$ ser estabelecida.

Os referenciais S e S'' compartilham sempre a mesma origem. Por esta razão e pela condições de isotropia e equivalência dos referenciais expressa em (3.6), o valor instantâneo de $\mathbf{g}(t)$ é o mesmo em S e S'' . Porém, como S'' é inercial, enquanto que S não o é, a variação de $\mathbf{g}(t)$ será observada de maneira distinta em cada referencial. Isto ocorre pela seguinte razão: dada a identidade (3.6) no instante t , a taxa de variação de \mathbf{g} , observada a partir do referencial inercial S'' e usando as componentes do vetor no mesmo referencial, será calculada por

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^3 g_i'' \hat{e}_i'' \implies \left. \frac{d\mathbf{g}}{dt} \right|_{S''} \equiv \left. \frac{d\mathbf{g}}{dt} \right|_{\text{inercial}} = \sum_{i=1}^3 \frac{dg_i''}{dt} \hat{e}_i'',$$

uma vez que os vetores $\{\hat{e}_1'', \hat{e}_2'', \hat{e}_3''\}$ são fixos em um referencial inercial com coordenadas Cartesianas.

Por outro lado, os vetores $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ sofrem rotações e/ou translações em conjunto com o corpo. Devido a isto, a taxa de variação de \mathbf{g} , observada também a partir do referencial inercial S'' , mas empregando as componentes do referencial do corpo S , será agora calculada por

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^3 g_i \hat{e}_i \implies \left. \frac{d\mathbf{g}}{dt} \right|_{S''} = \sum_{i=1}^3 \frac{dg_i}{dt} \hat{e}_i + \sum_{i=1}^3 g_i \frac{d\hat{e}_i}{dt}.$$

²Para uma discussão mais detalhada a respeito de grupos e suas propriedades, ver, por exemplo, [Apostila de Física-Matemática](#), capítulos 3 e 5.

O primeiro termo do lado direito corresponde à taxa de variação de g medida por um observador na origem de S e em repouso com o mesmo. Por esta razão, este termo será identificado como

$$\left. \frac{dg}{dt} \right|_{\text{corpo}} = \sum_{i=1}^3 \frac{dg_i}{dt} \hat{e}_i.$$

Portanto, resulta que

$$\left. \frac{dg}{dt} \right|_{\text{inercial}} = \left. \frac{dg}{dt} \right|_{\text{corpo}} + \sum_{i=1}^3 g_i \frac{d\hat{e}_i}{dt}. \quad (3.8)$$

É necessário agora obter-se a taxa de variação dos vetores de base de S .

3.2.2 A MATRIZ DE ROTAÇÕES INFINITESIMAIS

Ainda considerando rotações do referencial S em relação a S'' , esta situação descreverá o movimento completo do corpo rígido se este possuir um ponto fixo no espaço (como um pêndulo físico ou um pão, por exemplo) e as origens O e O'' coincidirem com o mesmo. Neste caso, o seu movimento mais geral é determinado pelo teorema de Euler abaixo.

Teorema 3.1 (Euler). *O deslocamento mais geral de um corpo rígido com um ponto fixo é uma rotação em torno de algum eixo.*

A demonstração deste teorema pode ser vista em (LE MOS, 2007).

A rotação mencionada pelo teorema de Euler consiste justamente nas transformações realizadas pelas matrizes de rotação discutidas nas seções 3.1.1 e 3.1.2. Em particular, concluiu-se que qualquer matriz do $O(3)$ possui no máximo três cossenos diretores independentes. Ou seja, uma rotação genérica no espaço sempre pode ser realizada com, no máximo, três ângulos de rotação. É necessário, portanto, verificar como uma rotação genérica destes ângulos promove a variação das matrizes de rotação.

Uma rotação genérica no espaço sempre pode ser realizada com até três ângulos de rotação, cada um destes correspondendo a uma rotação em torno de um eixo. Visualiza-se esta rotação genérica na figura 3.3(b). Suponha que o referencial S encontra-se inicialmente coincidente com S''' e após esta rotação genérica a sua orientação muda para a situação ilustrada na figura. Há infinitas escolhas de eixos e ângulos de rotação que levam o referencial S à sua orientação final. Usualmente, esta transformação é operacionalizada por rotações em torno dos eixos coordenados, com a possível definição de referenciais intermediários.

As rotações em torno dos eixos coordenados são implementadas por matrizes bem conhecidas. Uma destas matrizes já foi apresentada na seção 3.1.1. Sendo $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ e $R^{(3)}$ as matrizes de rotação em torno dos eixos x_1 , x_2 e x_3 , respectivamente, então

$$R^{(1)}(\theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}, \quad R^{(2)}(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}, \quad R^{(3)}(\theta_3) = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

sendo $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ os ângulos de rotação em torno dos respectivos eixos.

Nas definições acima, as escolhas dos sinais nos elementos das matrizes se devem à convenção de que rotações realizadas por ângulos positivos são realizadas no sentido anti-horário. Com esta convenção, considera-se o intervalo de variação dos ângulos como sendo $0 \leq \theta_i < 2\pi$, embora também possa ser considerado o intervalo $-\pi < \theta_i \leq \pi$.

Além disso, nota-se que as matrizes são realmente ortogonais e pertencem ao grupo $SO(3)$, por possuírem determinante unitário. Ou seja, elas realizam rotações próprias dos referenciais. Uma das propriedades das rotações próprias é a conservação da *quiralidade* do referencial. Se o referencial for *dextrógiro*,³ uma rotação própria realizada sobre o mesmo conserva esta

³Uma orientação dextrógiro é determinada pela mão direita. Um referencial dextrógiro é aquele cujos vetores de base satisfazem a relação

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{e}_k, \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

sendo ϵ_{ijk} o símbolo de Levi-Civita. Ver [Apostila de Física-Matemática](#), capítulo 6.

orientação, ao contrário de uma rotação imprópria, que leva um referencial dextrógiro a um referencial levógiro.⁴

As matrizes $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ e $R^{(3)}$, embora pertençam ao $SO(3)$, possuem a seguinte propriedade. Sejam $R^{(i)}(\theta_i)$ e $R^{(i)}(\phi_i)$ duas matrizes que realizam duas rotações distintas (θ_i e ϕ_i) em torno do eixo x_i ($i = 1, 2, 3$). Então,

$$R^{(i)}(\theta_i)R^{(i)}(\phi_i) = R^{(i)}(\phi_i)R^{(i)}(\theta_i) = R^{(i)}(\theta_i + \phi_i). \quad (3.10)$$

Isto é consistente com a discussão realizada ao final da seção 3.1.2. As matrizes acima, eliminando-se as linhas e colunas compostas por “0” e “1”, podem ser interpretadas como pertencentes ao $SO(2)$, o qual forma um grupo Abelian.

Contudo, em geral

$$R^{(i)}(\theta_i)R^{(j)}(\theta_j) \neq R^{(j)}(\theta_j)R^{(i)}(\theta_i), \text{ para } i \neq j,$$

se os ângulos θ_i e θ_j forem finitos. Porém, uma determinada rotação por um ângulo finito sempre pode ser composta, de acordo com (3.10), por duas ou mais rotações em torno do mesmo eixo. Assim, pode-se escrever

$$R^{(i)}(\theta_i) = \prod_{j=1}^N R^{(i)}(\Delta\theta_j), \text{ onde } \sum_{j=1}^N \Delta\theta_j = \theta_i.$$

Se $\Delta\theta_j = \delta\theta_j$, com $|\delta\theta_j| \ll 1$, pode-se aproximar $\cos \delta\theta_j \approx 1$ e $\sin \delta\theta_j \approx \delta\theta_j$, de tal maneira que

$$R^{(i)} \simeq I_3 + \delta R^{(i)},$$

onde I_3 é a matriz unitária e

$$\delta R^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta\theta_1 \\ 0 & -\delta\theta_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta R^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \delta\theta_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta R^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & \delta\theta_3 & 0 \\ -\delta\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nesta situação, as rotações são **infinitesimais** se os ângulos $\{\delta\theta_i\}$ satisfizerem

$$\lim_{\substack{\delta\theta_i \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{j=1}^N \delta\theta_j = \theta_i.$$

Observa-se que os elementos das matrizes de rotação infinitesimal podem ser agora escritos de uma maneira compacta da seguinte maneira. Se $R_{ij}^{(k)}$ ($i, j, k = 1, 2, 3$) identifica os elementos da matriz $R^{(k)}$, então

$$R_{ij}^{(k)} = \delta_{ij} + \epsilon_{ijk}\delta\theta_k.$$

No limite de rotações infinitesimais, a comutatividade das rotações é satisfeita, mesmo entre matrizes do $SO(3)$, pois

$$\begin{aligned} \left[R^{(k)}(\delta\theta_k) R^{(\ell)}(\delta\theta_\ell) \right]_{ij} &= \sum_{m=1}^3 (\delta_{im} + \epsilon_{imk}\delta\theta_k) (\delta_{mj} + \epsilon_{mj\ell}\delta\theta_\ell) \\ &= \sum_{m=1}^3 (\delta_{im}\delta_{mj} + \delta_{im}\epsilon_{mj\ell}\delta\theta_\ell + \epsilon_{imk}\delta_{mj}\delta\theta_k) \\ &= \delta_{ij} + \epsilon_{ij\ell}\delta\theta_\ell + \epsilon_{ijk}\delta\theta_k = \delta_{ij} + \epsilon_{ijk}\delta\theta_k + \epsilon_{ij\ell}\delta\theta_\ell, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left[R^{(k)}(\delta\theta_k) R^{(\ell)}(\delta\theta_\ell) \right]_{ij} = \left[R^{(\ell)}(\delta\theta_\ell) R^{(k)}(\delta\theta_k) \right]_{ij} \implies R^{(k)}(\delta\theta_k) R^{(\ell)}(\delta\theta_\ell) = R^{(\ell)}(\delta\theta_\ell) R^{(k)}(\delta\theta_k).$$

Pode-se construir então uma matriz que executa uma rotação infinitesimal genérica pela composição de rotações infinitesimais consecutivas em torno de cada eixo. Esta matriz é obtida por

$$R(\delta\theta) \doteq R^{(1)}(\delta\theta_1) R^{(2)}(\delta\theta_2) R^{(3)}(\delta\theta_3) = I_3 + \delta R(\delta\theta), \quad (3.11a)$$

⁴Orientação determinada pela mão esquerda.

ou por qualquer outra permutação na ordem das rotações. Os elementos da matriz $R(\delta\theta)$ são escritos de forma compacta como

$$R_{ij}(\delta\theta) = \delta_{ij} + \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \delta\theta_k, \text{ sendo } \delta\theta \doteq (\delta\theta_1, \delta\theta_2, \delta\theta_3), \quad (3.11b)$$

enquanto que a matriz $\delta R(\delta\theta)$ é dada por

$$[\delta R(\delta\theta)]_{ij} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \delta\theta_k, \quad (3.11c)$$

ou seja,

$$\delta R(\delta\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \delta\theta_3 & -\delta\theta_2 \\ -\delta\theta_3 & 0 & \delta\theta_1 \\ \delta\theta_2 & -\delta\theta_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.11d)$$

Dadas duas matrizes $R_1(\delta\theta_1)$ e $R_2(\delta\theta_2)$ que executam rotações infinitesimais, as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. As rotações infinitesimais são comutativas, uma vez que

$$\begin{aligned} R_1(\delta\theta_1) R_2(\delta\theta_2) &= R_2(\delta\theta_2) R_1(\delta\theta_1), \\ [I_3 + \delta R_1(\delta\theta_1)] [I_3 + \delta R_2(\delta\theta_2)] &= [I_3 + \delta R_2(\delta\theta_2)] [I_3 + \delta R_1(\delta\theta_1)] \\ &\rightsquigarrow \delta R_1(\delta\theta_1) + \delta R_2(\delta\theta_2) = \delta R_2(\delta\theta_2) + \delta R_1(\delta\theta_1). \end{aligned}$$

Esta propriedade é garantida devido à comutatividade da soma matricial.

2. As matrizes de rotação são ortogonais; portanto,

$$R(\delta\theta) \widetilde{R}(\delta\theta) = I_3 \implies \delta R(\delta\theta) + \widetilde{\delta R}(\delta\theta) = \widetilde{\delta R}(\delta\theta) + \delta R(\delta\theta) = 0.$$

Ou seja,

$$\widetilde{\delta R}(\delta\theta) = -\delta R(\delta\theta) \implies (\delta R)_{ji} = -(\delta R)_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Uma matriz que satisfaz esta propriedade é dita **antissimétrica**. Esta propriedade é claramente verificada em (3.11).

3.2.3 A LEI DE TRANSFORMAÇÃO DA TAXA DE VARIAÇÃO TEMPORAL DE UM VETOR E A VELOCIDADE ANGULAR

Com o desenvolvimento realizado na seção anterior, é possível agora determinar a forma que deve ser assumida pelo último termo na relação (3.8).

Assumindo que o referencial S tem seus eixos concordantes com S'' no instante t , em um instante $t + dt$ posterior os eixos de S sofrem uma rotação infinitesimal resultante da dinâmica do corpo rígido ao qual S é afixado. De acordo com a discussão realizada na seção 3.2.2, essa rotação genérica sempre pode ser descrita pela composição de até três rotações infinitesimais $d\theta = (d\theta_1, d\theta_2, d\theta_3)$, cada uma em torno de um eixo coordenado. Assim, de acordo com a lei de transformação (3.4) e a definição da matriz de rotação infinitesimal (3.11), os vetores de base de S transformam-se de acordo com

$$\hat{e}(t + dt) = R(d\theta) \hat{e}(t) = \hat{e}(t) + dR(d\theta) \hat{e}(t),$$

onde foi empregada novamente a representação matricial $\hat{e} = (\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3)^T$. Dessa forma, devido ao movimento do corpo rígido, os vetores de base sofrem uma variação infinitesimal $d\hat{e}$ definida por

$$d\hat{e} \doteq \hat{e}(t + dt) - \hat{e}(t) = dR(d\theta) \hat{e}(t).$$

Escrevendo-se explicitamente esta relação para cada vetor de base, com o uso de (3.11), obtém-se

$$d\hat{e}_i = \sum_{j=1}^3 [dR(d\theta)]_{ij} \hat{e}_j = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} d\theta_k \hat{e}_j. \quad (3.12)$$

Retornando agora à relação (3.8), esta pode ser escrita na forma diferencial como

$$d\mathbf{g}|_{\text{inercial}} = d\mathbf{g}|_{\text{corpo}} + d\mathbf{g}|_{\text{rot}},$$

sendo que o último termo é definido como

$$d\mathbf{g}|_{\text{rot}} \doteq \sum_{i=1}^3 g_i d\hat{e}_i,$$

correspondendo à variação do vetor \mathbf{g} devida à rotação do corpo (e de S , por consequência). Mas, de acordo com (3.12),

$$d\mathbf{g}|_{\text{rot}} = \sum_{i,j,k=1}^3 g_i \epsilon_{ijk} d\theta_k \hat{e}_j = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} d\theta_j g_k \hat{e}_i = d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{g}.$$

Portanto,

$$d\mathbf{g}|_{\text{inercial}} = d\mathbf{g}|_{\text{corpo}} + d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{g}.$$

Dividindo-se ambos os lados por dt , obtém-se finalmente a lei de transformação da taxa de variação temporal do vetor \mathbf{g} entre os referenciais S e S'' ,

$$\left. \frac{d\mathbf{g}}{dt} \right|_{\text{inercial}} = \left. \frac{d\mathbf{g}}{dt} \right|_{\text{corpo}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}, \text{ onde } \boldsymbol{\omega} \doteq \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}. \quad (3.13a)$$

A quantidade $\boldsymbol{\omega}$ é denominada **velocidade angular** e suas propriedades serão discutidas a seguir. Esta relação pode ser escrita na forma de um operador diferencial como

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\text{inercial}} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{\text{corpo}} + \boldsymbol{\omega} \times. \quad (3.13b)$$

3.2.3.1 VETORES POLARES, AXIAIS E A VELOCIDADE ANGULAR

É importante discutir agora a interpretação física da velocidade angular $\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\theta}/dt$. A quantidade $\delta\boldsymbol{\theta} = (\delta\theta_1, \delta\theta_2, \delta\theta_3)$ foi introduzida em (3.11) para indicar uma composição arbitrária de rotações infinitesimais em torno de três eixos mutuamente ortogonais.

Se for atribuído livremente um caráter vetorial a $\delta\boldsymbol{\theta}$, então o mesmo pode ser escrito como

$$\delta\boldsymbol{\theta} = \sum_{i=1}^3 \delta\theta_i \hat{e}_i,$$

em termos dos vetores de base de um determinado referencial. Contudo, é necessário deduzir-se as propriedades matemáticas deste novo vetor.

O vetor $\delta\boldsymbol{\theta}$ está relacionado com a rotação ativa de um ponto P , localizado pelo vetor posição \mathbf{r} , em torno de um eixo no espaço. Esta situação já foi discutida no contexto das leis de conservação no formalismo Lagrangiano e está visualizada na figura 1.22, a qual é repetida aqui na figura 3.4 por conveniência.

O vetor $\delta\boldsymbol{\theta}$ é escrito agora em termos de seu módulo e do vetor unitário \hat{e}_n , o qual indica sua direção e sentido, como

$$\delta\boldsymbol{\theta} = \delta\theta \hat{e}_n.$$

O vetor \hat{e}_n é definido da seguinte maneira. Ao sofrer uma rotação infinitesimal ativa, no sentido anti-horário, por um ângulo $\delta\theta$ em torno de um eixo no espaço, conforme é visto na figura 3.4, o vetor \mathbf{r} sofre a transformação $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$. Se o vetor \hat{e}_n (e, por conseguinte, o vetor $\delta\boldsymbol{\theta}$) for orientado ao longo do eixo de rotação, conforme está na figura, então a seguinte relação é válida:

$$\delta\mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}.$$

É fácil mostrar que o vetor $\delta\theta$ satisfaz as condições de adição vetorial e multiplicação por escalar, como exigido para pertencer a um espaço vetorial (i. e., para ser um vetor).

Deste ponto de vista, a velocidade angular ω , introduzida em (3.13), passa a possuir também um caráter vetorial. Dividindo-se a relação acima por dt , observa-se então que

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \hat{e}_n = \omega \hat{e}_n. \quad (3.14)$$

Ou seja, a velocidade angular consiste na taxa de variação temporal do vetor $\delta\theta$. A definição (3.14) mostra também que $\omega \parallel \delta\theta$. Da mesma forma, todos os vetores obtidos pela derivação de ω também serão paralelos ao mesmo.

Os vetores $\delta\theta$, ω e todos os outros obtidos a partir deste último, pertencem a um tipo especial de objeto matemático denominado um *vetor axial* ou *pseudovetor*. Estes distinguem-se dos vetores “verdadeiros”, denominados *vetores polares*, por se transformarem de forma distinta aos mesmos. Um vetor polar é invertido frente a um tipo especial de transformação ativa, denominada *inversão espacial*, e que consiste em realizar a operação

$$r \rightarrow -r.$$

Ao se realizar esta inversão nos vetores r , r' e δr da figura 3.4, estes se transformam como $r \rightarrow -r$, $r' \rightarrow -r'$ e $\delta r \rightarrow -\delta r$. O mesmo ocorrerá com outros vetores obtidos a partir destes por derivação, tais como velocidade e aceleração. Todos os vetores que se transformam desta maneira são vetores polares ou “vetores verdadeiros.”

Já o vetor $\delta\theta$, frente à transformação $r \rightarrow -r$ transforma-se como

$$\delta\theta \rightarrow \delta\theta,$$

ou seja, não sofre inversão. O mesmo ocorre com ω e todos os demais vetores axiais derivados. Isto pode ser verificado diretamente a partir da relação $\delta r = \delta\theta \times r$. Para que esta reproduza as inversões de r e δr , é necessário que $\delta\theta$ permaneça invariante.⁵

3.2.3.2 A UNICIDADE DA VELOCIDADE ANGULAR

O vetor velocidade angular possui algumas propriedades que o tornam único dentre as quantidades dinâmicas de um corpo rígido. Em primeiro lugar, a sua taxa instantânea de variação, a **aceleração angular**, é a mesma, quer seja do ponto de vista do referencial fixo ou em relação ao referencial do corpo. Isto é prontamente verificado aplicando-se o operador (3.13) ao vetor ω :

$$\left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{\text{inercial}} = \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{\text{corpo}} + \omega \times \omega \overset{0}{=} \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{\text{inercial}} = \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{\text{corpo}}. \quad (3.15)$$

Uma outra característica própria do vetor velocidade angular é a sua unicidade frente a diferentes referenciais, posicionados em distintos locais do corpo rígido. Isto pode ser verificado a partir da figura 3.5. Nesta figura, o ponto P é um ponto qualquer do corpo rígido. O ponto O' é a origem de um referencial S' inercial e O_1 e O_2 são as origens de dois referenciais distintos (S_1 e S_2) fixos ao corpo. Os demais vetores são identificáveis na figura.

A relação entre as taxas de variação de qualquer vetor dinâmico g entre os referenciais S' e S_1 ou entre S' e S_2 são dadas pela relação (3.13). Em particular, para o vetor r , dado por

$$r = R_1 + r_1 = R_2 + r_2,$$

⁵Uma discussão mais aprofundada a respeito de vetores e pseudovetores, no contexto da análise tensorial, é realizada em [Apostila de Física-Matemática](#), capítulo 6.

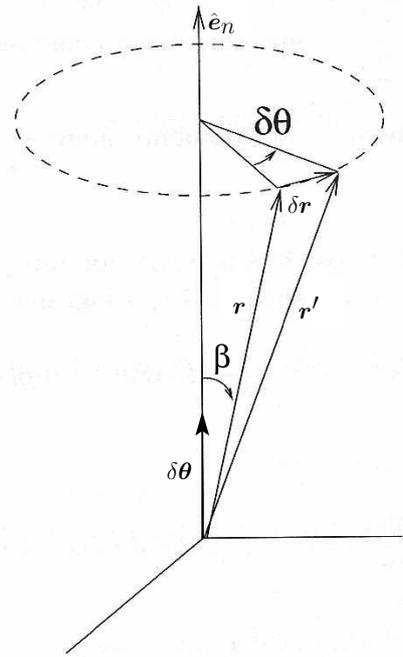


Figura 3.4: Rotação infinitesimal ativa do vetor r produzida pela rotação no sentido anti-horário em torno do eixo \hat{e}_n .

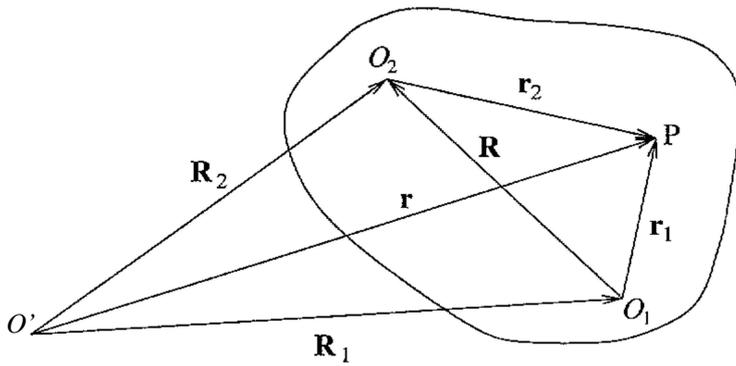


Figura 3.5: O Ponto P é localizado pelo referencial inercial com origem em O' e por dois referenciais do corpo, com origens O_1 e O_2 .

tem sua taxa temporal de variação dada por

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{S'} = \left. \frac{d\mathbf{R}_1}{dt} \right|_{S'} + \left. \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \right|_{S'} = \left. \frac{d\mathbf{R}_2}{dt} \right|_{S'} + \left. \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \right|_{S'}.$$

Mas,

$$\left. \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \right|_{S'} = \left. \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \right|_{S''} \quad \text{e} \quad \left. \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \right|_{S'} = \left. \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \right|_{S''},$$

lembrando que o referencial S'' (ver figura 3.2) também é inercial e pode, sem perda de generalidade, ser considerado em repouso em relação a S' .

Porém, de acordo com (3.13), a relação entre as taxas de variação do vetor posição para os distintos referenciais fica escrita

$$(S'' \leftrightarrow S_1): \quad \left. \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \right|_{S''} = \left. \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \right|_{S_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1,$$

onde $\boldsymbol{\omega}_1$ é a velocidade angular de rotação do ponto P em relação a O_1 . O termo cancelado na relação acima corresponderia à taxa de variação de \mathbf{r}_1 em relação ao referencial S_1 . Como os pontos O_1 e P são ambos mantidos fixos ao corpo, então o termo em questão é nulo, pois, do ponto de vista de um observador em O_1 , o ponto P permanece em repouso.

Da mesma forma,

$$(S'' \leftrightarrow S_2): \quad \left. \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \right|_{S''} = \left. \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \right|_{\text{corpo}} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2,$$

sendo $\boldsymbol{\omega}_2$ a velocidade angular de rotação do ponto P em relação a O_2 .

Sendo agora $\mathbf{R} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$, observa-se que

$$\left. \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right|_{S'} = \left. \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \right|_{S'} - \left. \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \right|_{S'} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1 - \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2.$$

Mas, do ponto de vista da relação $S'' \leftrightarrow S_1$,

$$\left. \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right|_{S'} = \left. \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right|_{S_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{R} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{R},$$

pois o ponto O_2 também está em repouso em relação a S_1 . Como as duas últimas relações são idênticas, resulta que, necessariamente,

$$\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1 - \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{R}.$$

Mas, como $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, resulta que

$$\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1 - \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1 - \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_2 \implies (\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1) \times \mathbf{r}_2 = 0.$$

Como os pontos P , O_1 e O_2 são arbitrários, então o vetor \mathbf{r}_2 também o é. Portanto, conclui-se que para o resultado acima ser satisfeito para qualquer escolha destes pontos particulares, é necessário e suficiente que

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_1.$$

A conclusão é que a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ será sempre a mesma, independente da escolha para a origem do referencial do corpo.

3.3 A DINÂMICA EM REFERENCIAIS NÃO INERCIAIS

Será deduzida aqui a forma correspondente à segunda lei de Newton em um referencial não inercial. As expressões aqui obtidas são gerais, descrevendo o movimento de uma única partícula sob a ação de uma força resultante; por conseguinte, estas serão posteriormente particula- rizadas para o movimento de um corpo rígido.

Retornando à figura 3.2, supõe-se agora que o ponto P corresponde à posição instantânea de uma partícula de massa m , sendo esta a única partícula do sistema. Assumindo que sua massa não varia, a dinâmica da partícula é descrita pela segunda lei de Newton, a qual é válida no referencial inercial S' ; ou seja,

$$m \left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_{S'} \equiv m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F},$$

sendo \mathbf{F} a força resultante sobre a partícula.

A relação entre a posição instantânea da partícula, observada em relação ao referencial fixo S' , e a mesma quantidade em relação ao referencial do corpo S é, simplesmente,

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_O + \mathbf{r}.$$

Por outro lado, a relação entre o *vetor* velocidade instantânea, visto dos referenciais S' ou S , depende do fato de que S é não inercial e, por isso, a taxa instantânea de variação da posição, vista em ambos os referenciais, estará relacionada através do operador (3.13); ou seja,

$$\mathbf{v}' \doteq \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{S'} = \left. \frac{d\mathbf{r}_O}{dt} \right|_{S'} + \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{S'} = \left. \frac{d\mathbf{r}_O}{dt} \right|_{S'} + \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_S + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \doteq \mathbf{v}'_O + \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

sendo \mathbf{v}'_O a velocidade do ponto O em relação a S' e \mathbf{v} a velocidade da partícula vista do ponto de vista do referencial não inercial S .

Derivando-se mais uma vez a expressão acima em relação ao tempo, obtém-se a aceleração,

$$\mathbf{a}' \doteq \left. \frac{d\mathbf{v}'}{dt} \right|_{S'} = \underbrace{\left. \frac{d\mathbf{v}'_O}{dt} \right|_{S'}}_{\mathbf{a}'_O} + \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_{S'} + \left. \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \right|_{S'}.$$

O primeiro termo (\mathbf{a}'_O) é a aceleração do ponto O em relação a S' . Já nos dois outros termos, é necessário aplicar-se novamente o operador (3.13), de onde resulta

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_{S'} &= \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_S + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \doteq \mathbf{a} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \\ \left. \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \right|_{S'} &= \left. \frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}{dt} \right|_S + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \left. \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right|_S \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \end{aligned}$$

sendo agora \mathbf{a} a aceleração da partícula, vista do referencial S . Lembrando finalmente da unicidade da aceleração angular (propriedade 3.15), resulta então

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}'_O + \mathbf{a} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

Sabendo que $m\mathbf{a}' = \mathbf{F}$, pode-se escrever a expressão equivalente $m\mathbf{a} = \mathbf{F}_S$, sendo \mathbf{F}_S a “força” total aplicada à partícula, conforme observada a partir do referencial S . Esta “força” é expressa por

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_S \doteq \mathbf{F} - \underbrace{m\mathbf{a}'_O}_{F_{\text{Cor}}} + \underbrace{2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}}_{F_{\text{cent}}} + \underbrace{m\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})}_{F_{\text{Euler}}} + \underbrace{m\mathbf{r} \times \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}}_{F_{\text{Euler}}}. \quad (3.16)$$

A expressão (3.16) mostra que um observador em repouso com o ponto O (observador em S) registra o movimento da partícula como se esta fosse submetida a um conjunto de até cinco forças distintas. A primeira força (\mathbf{F}) é a única força “verdadeira,” no sentido de que esta é realmente a força no sentido Newtoniano, observada a partir de um referencial inercial. O segundo termo surge devido à aceleração do ponto O em relação a S' . Esta aceleração pode ser

causada, por exemplo, por outras forças que atuam sobre o referencial S , caso este esteja preso a algum objeto material (como um corpo rígido).

Os três termos restantes em (3.16) correspondem a efeitos resultantes da rotação do referencial S em relação a S' . Estes objetos são denominados **forças fictícias**, pois embora tenham a dimensão física de forças, estes não correspondem à definição Newtoniana de uma força, por se tratarem de efeitos observados em um referencial não inercial. O termo F_{Cor} é denominado *força de Coriolis*. A visualização mais comum do efeito da força de Coriolis consiste na observação do movimento de um projétil. Em um referencial inercial, a trajetória do projétil é planar, mas se o referencial está girando em torno de um eixo de rotação, a força de Coriolis faz surgir uma “força” perpendicular que acaba removendo o corpo desse plano.

O termo F_{cent} é a conhecida *força centrífuga*, a qual atua no sentido oposto à força centrípeta, sendo que esta última de fato é uma força no sentido Newtoniano. Finalmente, o termo F_{Euler} é denominado *força de Euler*, a qual surge quando o referencial gira também com aceleração angular.

Os efeitos dessas forças fictícias sobre o movimento de um corpo rígido serão estudados na próxima seção.

3.4 DINÂMICA DE UM CORPO RÍGIDO. EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

A partir dos desenvolvimentos realizados nas seções anteriores, relacionados à cinemática de um corpo rígido, será desenvolvida nesta seção a dinâmica deste corpo. Grandezas essenciais para a compreensão dessa dinâmica são o *momentum* angular do corpo e sua energia cinética rotacional, ambas as grandezas relacionadas com o conceito de *momento de inércia* do corpo, o qual também será abordado. A maior parte dos exemplos e casos estudados neste capítulo o serão feitos empregando-se o formalismo Lagrangiano, desenvolvido no capítulo 1.

3.4.1 O MOMENTUM ANGULAR DE UM CORPO RÍGIDO E O SEU TENSOR DE INÉRCIA

Dado um corpo rígido, pensado como um conjunto de N partículas com 06 (seis) graus de liberdade, as suas equações de movimento, no formalismo Newtoniano, são:

1. A equação (1.6a), que descreve a taxa de variação do *momentum* linear total do sistema,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{(e)},$$

sendo $\mathbf{F}^{(e)}$ a força resultante devida às forças externas ao sistema.

2. A equação que descreve a taxa de variação do *momentum* angular total do sistema. Conforme discutido na seção 1.1.2.2, a equação de movimento propriamente dita depende da cinética do ponto P em relação ao qual está se calculando o *momentum* angular. Se este ponto coincide com centro de massa do sistema, ou se o mesmo se movimenta sem aceleração, então (1.7b) é a equação para a evolução do *momentum* angular,

$$\frac{d\mathbf{L}_P}{dt} = \mathbf{N}_P^{(e)}, \quad (3.17)$$

sendo $\mathbf{N}_P^{(e)}$ o torque total submetido ao sistema, em relação a P . Se estas condições não se cumprirem, então $d\mathbf{L}/dt$ será dada pela equação (1.7a), a qual contém o efeito da cinética do ponto P .

Como (3.17) descreve, como um importante caso particular, a dinâmica do corpo que possui um ponto fixo, esta será a situação a ser inicialmente abordada.

Considera-se então a situação representada na figura 3.6. Nesta, S' é o referencial inercial fixo e O é um determinado ponto do corpo rígido, o qual ou está em repouso em relação a S' (ponto fixo) ou é o centro de massa do corpo. Na mesma figura, r_k é a posição instantânea de

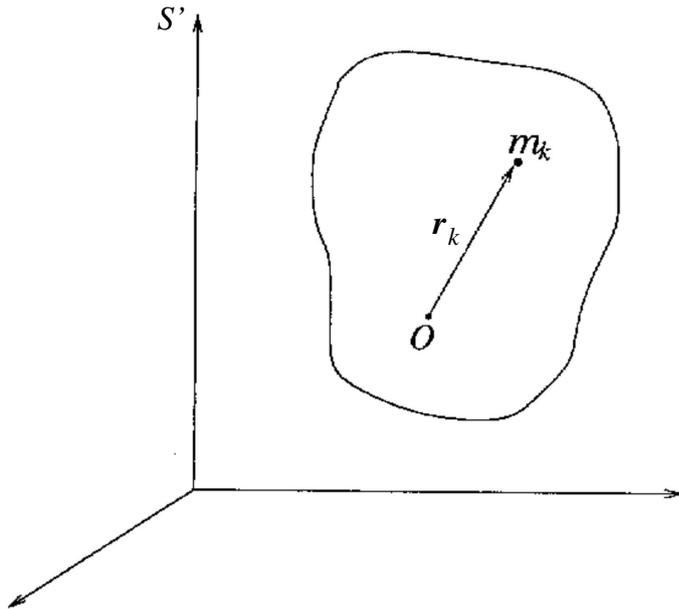


Figura 3.6: Ilustração do *momentum* angular de uma partícula de massa m_k em relação ao ponto O , o qual é um ponto fixo em relação ao referencial inercial S' ou é o centro de massa do corpo rígido.

uma partícula do corpo com massa m_k , a qual pode ser pensada como uma massa infinitesimal, caso o corpo seja extenso.

Nas condições de validade da figura 3.6, a variação do *momentum* angular da massa m_k em relação ao ponto O será descrito pela equação (3.17). Supondo inicialmente que o corpo rígido seja composto por um conjunto de N partículas discretas, então o *momentum* angular total sobre O será

$$L = \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{p}'_k = \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{v}'_k, \quad (3.18a)$$

onde \mathbf{v}'_k (\mathbf{p}'_k) é a velocidade (*momentum* linear) da k -ésima partícula em relação ao ponto O , do ponto de vista do referencial fixo S' ; ou seja,

$$\mathbf{v}'_k = \left. \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} \right|_{S'}.$$

O ponto O , por sua vez, pode ser pensado como a origem do referencial do corpo S . Neste caso, para se encontrar \mathbf{v}_k , a velocidade de m_k em relação a O , é necessário empregar-se novamente (3.13), de onde resulta

$$\mathbf{v}'_k = \left. \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} \right|_{S'} = \left. \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} \right|_S + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k \implies \mathbf{v}'_k = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k, \quad (3.18b)$$

uma vez que \mathbf{r}_k é um vetor fixo em relação a O . Portanto,

$$L = \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{r}_k \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k) = \sum_{k=1}^N m_k [r_k^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_k \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_k],$$

onde foi empregada a identidade $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$. Escrevendo-se esta expressão em termos de componentes de um sistema Cartesiano, resulta

$$L_i = \sum_{k=1}^N m_k \left(r_k^2 \omega_i - \sum_{j=1}^3 x_{k,i} x_{k,j} \omega_j \right) = \sum_{j=1}^3 \left[\sum_{k=1}^N m_k (r_k^2 \delta_{ij} - x_{k,i} x_{k,j}) \right] \omega_j, \quad (i = 1, 2, 3).$$

A partir desta última expressão, define-se uma matriz (3×3) I, denominada **matriz de inércia**, cujos elementos são dados por

$$I_{ij} \doteq \sum_{k=1}^N m_k (r_k^2 \delta_{ij} - x_{k,i} x_{k,j}), \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (3.19a)$$

Se o corpo rígido em estudo é formado por uma distribuição contínua de massa, então pelo processo de limite $x_{k,i} \rightarrow x_i$, $m_k \rightarrow dm = \rho(\mathbf{r}) d^3r$, $N \rightarrow \infty$ e

$$\sum_{k=1}^N m_k \rightarrow \int_V \rho(\mathbf{r}) d^3r,$$

sendo $\rho = \rho(\mathbf{r})$ a densidade de massa (ou massa específica) do corpo rígido, os elementos da matriz \mathbf{l} passam a ser dados por

$$I_{ij} = \int_V d^3r (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \rho(\mathbf{r}). \quad (3.19b)$$

Os elementos da matriz \mathbf{l} são os componentes do **tensor de inércia** do corpo rígido. Esta designação será empregada a partir de agora, deixando-se a demonstração de que esta quantidade é de fato um tensor para a seção 3.4.3.

Pode-se escrever a relação entre as componentes Cartesianas de \mathbf{L} em termos do tensor de inércia como

$$L_i = \sum_{j=1}^3 I_{ij} \omega_j, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.20a)$$

Ou, usando a mesma notação matricial já empregada para as componentes do vetor posição (em 3.2c), como

$$\mathbf{L} = \mathbf{l}\boldsymbol{\omega}, \text{ sendo } \mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \text{ e } \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}. \quad (3.20b)$$

Finalmente, uma notação vetorial também é possível:

$$\mathbf{L} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (3.20c)$$

sendo $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}$ propriamente o tensor de inércia, o qual é um tensor de posto 2.

3.4.2 MOMENTOS E PRODUTOS DE INÉRCIA

As seguintes características da matriz de inércia, definida em (3.19), merecem ser ressaltadas:

1. A matriz de inércia é *real*, uma vez que todos os seus elementos, tanto para sistemas discretos quanto para contínuos, são reais.
2. A matriz de inércia é *simétrica*, uma vez que ela é real e

$$I_{ij} = I_{ji},$$

como pode ser trivialmente verificado.

3. **Momentos de inércia.** Tratam-se dos elementos da diagonal da matriz de inércia: $\{I_{11}, I_{22}, I_{33}\}$. Observa-se que os momentos de inércia sempre existem e são positivos, independente da forma da distribuição de massa, pois

$$I_{ii} = \int_V d^3r (r^2 - x_i^2) \rho(\mathbf{r}) = \int_V d^3r (x_j^2 + x_k^2) \rho(\mathbf{r}) > 0, \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3 \\ j \neq i \neq k = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Como o integrando é positivo-definido, a integral também é positiva. Esta propriedade foi verificada empregando-se a forma contínua, mas ela pode ser facilmente corroborada na forma discreta.

4. **Produtos de inércia.** Tratam-se dos elementos fora da diagonal principal. Neste caso,

$$I_{ij} = - \int_V d^3r x_i x_j \rho(\mathbf{r}), \quad (i \neq j = 1, 2, 3).$$

Os produtos de inércia não são necessariamente positivos e podem não existir.

Uma observação importante é que os valores que os momentos e produtos de inércia tomam, para uma dada distribuição de massa, dependem da posição da origem do referencial do corpo e da orientação de seus eixos coordenados.

Mais adiante, na seção 3.7, será demonstrado como é sempre possível (em teoria) diagonalizar a matriz de inércia através de uma rotação dos eixos do sistema. Nesta nova orientação, os produtos de inércia são nulos e a matriz se torna diagonal.

Exercício 3.1 (Matriz de inércia de um cubo homogêneo). Obtenha a matriz de inércia de um cubo homogêneo de densidade ρ , massa M e lado b . Considere a origem do referencial em um dos vértices do cubo e seus eixos alinhados ao longo de suas arestas, conforme está ilustrado na figura 3.7.

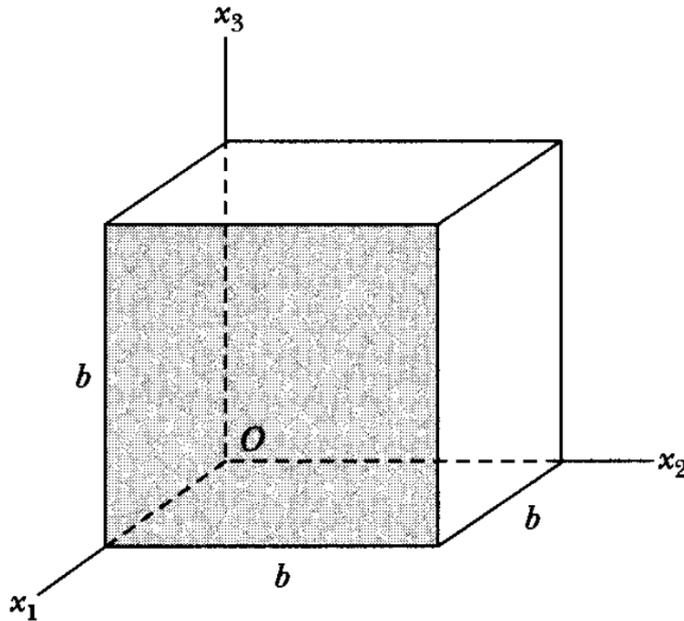


Figura 3.7: Um cubo homogêneo de lado b com a origem do referencial em um de seus vértices.

Resolução. Os elementos da matriz de inércia neste caso são dados por (3.19b). Calculando-se inicialmente os momentos de inércia,

$$\begin{aligned} I_{ii} \stackrel{(j \neq k \neq i)}{=} \rho \int_V d^3r (x_j^2 + x_k^2) &= 2\rho \int_V d^3r x_j^2 \\ &= 2\rho \int_0^b dx_i \int_0^b dx_k \int_0^b dx_j x_j^2, \\ I_{ii} = 2\rho (b^2) \left(\frac{1}{3}b^3\right) &= \frac{2}{3}\rho b^5 = \frac{2}{3}Mb^2, \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Ou seja, todos os momentos de inércia têm o mesmo valor.

Calculando agora os produtos de inércia,

$$\begin{aligned} I_{ij} \stackrel{j \neq i}{=} -\rho \int_V d^3r x_i x_j &= -\rho \int_0^b dx_i x_i \int_0^b dx_j x_j \int_0^b dx_k, \\ I_{ij} = -\rho \left(\frac{1}{2}b^2\right)^2 b &= -\frac{1}{4}\rho b^5 = -\frac{1}{4}Mb^2, \quad (i \neq j = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Portanto, a matriz de inércia do cubo, com o referencial posicionado conforme está na figura 3.7, fica

$$I_{\text{cubo}} = Mb^2 \begin{pmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

3.4.3 O TENSOR DE INÉRCIA E SUA LEI DE TRANSFORMAÇÃO

Nesta seção serão apresentadas algumas propriedades matemáticas de tensores relevantes para a dinâmica de corpos rígidos.

3.4.3.1 TENSORES

Um *tensor* é um objeto matemático ao qual são atribuídas certas propriedades algébricas e geométricas que o tornam singularmente importante na física-matemática.⁶

Um tensor usualmente forma uma coleção de objetos matemáticos, denominados as *componentes do tensor*, que são distintos, mas que se relacionam entre si por meio de certas propriedades (físicas e/ou matemáticas). Entretanto, para que esta coleção de objetos possa ser denominada um tensor, é necessário que as suas coordenadas obedeçam uma lei de transformação bem determinada, a qual será apresentada em breve. A distinção entre as distintas coordenadas do tensor é realizada através de um conjunto de índices inteiros (usualmente não negativos), o que leva à definição do **posto** do tensor, como sendo o número de diferentes índices necessários para a identificação das componentes do tensor. Os tensores mais comuns na física são:

Tensores de posto zero: os quais são as quantidades usualmente denominadas *escalares*, tais como massa, carga elétrica ou potencial elétrico. Um tensor de posto zero pode ser classificado como um **escalar** propriamente dito se este não muda frente a uma determinada transformação de coordenadas. Neste caso se enquadram os princípios de invariância da massa (de repouso) ou da carga elétrica. Por outro lado, tensores de posto zero que mudam frente a certas transformações (como rotações impróprias, por exemplo), são denominados **pseudoescalares**. Certos objetos formados a partir de vetores axiais são assim classificados.

Tensores de posto um: os quais são comumente conhecidos como *vetores*. Para a distinção entre as diferentes componentes de um vetor é necessário apenas um único índice. Na seção 3.2.3.1 mostrou-se que há dois tipos de vetores: polares (ou vetores “verdadeiros”) e axiais (ou pseudovetores). Seja

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^3 A_j \hat{e}_j$$

um vetor polar. Seja também $x_i \rightarrow x'_i (\{x_j\})$ ($i, j = 1, 2, 3$) uma determinada lei de transformação de coordenadas, a qual possui a transformação inversa $x'_i \rightarrow x_i$. Coletando-se as derivadas

$$L_{ij} \doteq \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$$

em uma matriz (3×3) L , como a matriz de rotação (3.4), então as coordenadas de \mathbf{A} devem se transformar de acordo com a lei

$$A_i \xrightarrow{x_i \rightarrow x'_i} A'_i = \sum_{j=1}^3 L_{ij} A_j = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} A_j, \quad (i = 1, 2, 3),$$

onde A'_i é a i -ésima coordenada de \mathbf{A} no referencial transformado. Já na transformação inversa é dada pelos elementos de matrizes $L_{ji} = \partial x_i / \partial x'_j$ tais que

$$A'_i \xrightarrow{x'_i \rightarrow x_i} A_i = \sum_{j=1}^3 L_{ji} A'_j = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} A'_j, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Posição, velocidade, aceleração, força e campo elétrico são todos exemplos de vetores polares.

Por outro lado, se \mathbf{B} for um vetor axial (um pseudovetor), este irá se transformar como

$$B_i \xrightarrow{x_i \rightarrow x'_i} B'_i = \sum_{j=1}^3 \det(L) L_{ij} B_j, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Se $L = R$ for uma rotação imprópria, então $\det(L) = \det(R) = -1$. Exemplos de pseudovetores com significado físico são: velocidade e aceleração angulares, *momentum* angular e campo magnético.

⁶Novamente, uma discussão mais aprofundada a respeito de tensores é realizada em [Apostila de Física-Matemática](#), capítulo 6.

Tensores de posto dois: objetos que necessitam de dois índices para distinguir suas componentes. Este tipo de tensor surge em todas as áreas da física, mas somente será aqui abordado o tensor de inércia. Se $\overset{\leftrightarrow}{T}$ representa um tensor de posto dois, então o conjunto $\{T_{ij}\}$ ($i, j = 1, 2, 3$) coleta os seus nove componentes. Assim como os vetores, um tensor de posto dois pode ser um tensor “verdadeiro” ou um **pseudotensor**. No primeiro caso, se $\overset{\leftrightarrow}{T}$ é um tensor, então suas componentes se transformam conforme

$$T_{ij} \xrightarrow{x_i \rightarrow x'_i} T'_{ij} = \sum_{k,\ell=1}^3 L_{ik} L_{j\ell} T_{k\ell} = \sum_{k,\ell=1}^3 \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x'_j}{\partial x_\ell} T_{k\ell}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (3.21)$$

Por outro lado se $\overset{\leftrightarrow}{U}$ for um pseudotensor de posto dois, então

$$U_{ij} \xrightarrow{x_i \rightarrow x'_i} U'_{ij} = \sum_{k,\ell=1}^3 \det(L) L_{ik} L_{j\ell} U_{k\ell}, \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Nota-se que a lei de transformação para cada posto também foi explicitada. Tensores de posto mais alto (três, quatro, etc) são possíveis e alguns exemplos existem na física, os quais não serão discutidos aqui. As leis de transformação de suas componentes são as extensões lógicas dos casos apresentados.

Para demonstrar que o tensor de inércia (3.19) é de fato um tensor (de posto dois) basta mostrar que suas componentes se transformam de acordo com (3.21) frente a uma rotação arbitrária dos eixos coordenados. Para tanto, dada a matriz l , cujos elementos são dados pelas coordenadas das partículas do corpo rígido em um sistema Cartesiano S , define-se uma nova matriz l' ($\neq l$) cujos elementos são dados por

$$I'_{ij} \doteq \sum_{k=1}^N m_k (r_k'^2 \delta_{ij} - x'_{k,i} x'_{k,j}), \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

sendo $\{x'_i\}$ as coordenadas em um sistema rotado S' (conforme ilustrado na figura 3.3b). Mas, se as relações entre as coordenadas de S e S' são dadas por (3.4), então

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j.$$

Com isso, pode-se escrever

$$r_k'^2 = \sum_{\ell=1}^3 x_{k,\ell}'^2 = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \underbrace{\sum_{\ell=1}^3 R_{\ell m} R_{\ell n}}_{(3.3a) \rightarrow \delta_{mn}} x_{k,m} x_{k,n} = \sum_{m=1}^3 x_{k,m}^2 = r_{k,m}^2, \text{ e}$$

$$I'_{ij} = \sum_{k=1}^N m_k \left(r_k'^2 \delta_{ij} - \sum_{m,n=1}^3 R_{im} R_{jn} x_{k,m} x_{k,n} \right).$$

Mas, também devido à propriedade (3.3a),⁷

$$\delta_{ij} = \sum_{m,n=1}^3 R_{im} R_{jn} \delta_{mn}.$$

Portanto,

$$I'_{ij} = \sum_{m,n=1}^3 R_{im} R_{jn} \left[\sum_{k=1}^N m_k (r_k^2 \delta_{mn} - x_{k,m} x_{k,n}) \right] = \sum_{m,n=1}^3 R_{im} R_{jn} I_{mn}, \quad (3.22)$$

e os elementos da matriz l transformam-se como um tensor de posto dois, o que demonstra que a mesma compõe as componentes do tensor de inércia $\overset{\leftrightarrow}{I}$.

⁷De fato, a delta de Kronecker também é um elemento de um tensor de posto dois.

Se os nove componentes do tensor de posto 2 $\overset{\leftrightarrow}{T}$ forem organizados como os elementos da matriz $T \doteq [T_{ij}]$ ($i, j = 1, 2, 3$), a lei de transformação (3.21), pode ser escrita como

$$T'_{ij} = \sum_{k,\ell=1}^3 L_{ik} T_{k\ell} L_{j\ell} \xrightarrow{L_{j\ell} = (\tilde{L})_{\ell j}} \sum_{k,\ell=1}^3 L_{ik} T_{k\ell} (\tilde{L})_{\ell j} = (LT\tilde{L})_{ij},$$

sendo $L = [L_{ij}]$ a matriz de transformação. Ou seja,

$$T' = LT\tilde{L},$$

sendo $T' = [T'_{ij}]$ a matriz que contém os componentes de $\overset{\leftrightarrow}{T}$ no novo referencial. Da mesma forma, se for realizada a rotação $S \xrightarrow{R} S'$ por intermédio da matriz de rotação R , então a transformação dos componentes do tensor de inércia $\overset{\leftrightarrow}{I}$, dada por (3.22), pode ser escrita na forma matricial como

$$I' = RI\tilde{R}.$$

Uma representação útil e frequentemente empregada do tensor de inércia é na forma de uma **diádica**, a qual consiste na justaposição, ou no *produto externo*⁸ de dois vetores. Nesta representação, o tensor $\overset{\leftrightarrow}{I}$ fica escrito

$$\overset{\leftrightarrow}{I} = \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j = I_{11} \hat{e}_1 \hat{e}_1 + I_{12} \hat{e}_1 \hat{e}_2 + I_{13} \hat{e}_1 \hat{e}_3 + \cdots + I_{32} \hat{e}_3 \hat{e}_2 + I_{33} \hat{e}_3 \hat{e}_3,$$

sendo os elementos de matriz $\{I_{ij}\}$ dados por (3.19).

Representado na forma de uma diádica, o tensor de inércia definido em (3.19) pode ser escrito

$$\overset{\leftrightarrow}{I} = \sum_{k=1}^N m_k \left(r_k^2 \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{1}} - \mathbf{r}_k \mathbf{r}_k \right) \quad (\text{caso discreto}), \text{ ou} \quad (3.23a)$$

$$\overset{\leftrightarrow}{I} = \int_V d^3r \left(r^2 \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{1}} - \mathbf{r} \mathbf{r} \right) \rho(\mathbf{r}) \quad (\text{caso contínuo}), \quad (3.23b)$$

onde $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{1}} = \sum_{i,j} \delta_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j$ é a diádica unitária. Esta notação tem a vantagem de ser independente do sistema de coordenadas empregado.

3.4.3.2 O TENSOR DE INÉRCIA E O VETOR MOMENTUM ANGULAR

Com a representação do tensor de inércia na forma de uma diádica, fica claro o significado da notação vetorial em (3.20c); trata-se do produto escalar (ou *produto interno*) pela direita

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = \overset{\leftrightarrow}{I} \cdot \boldsymbol{\omega} &= \left(\sum_{i,j=1}^3 I_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j \right) \cdot \left(\sum_{\ell=1}^3 \omega_\ell \hat{e}_\ell \right) = \sum_{i,j,\ell=1}^3 I_{ij} \omega_\ell (\hat{e}_i \hat{e}_j) \cdot \hat{e}_\ell \\ &= \sum_{i,j,\ell=1}^3 I_{ij} \omega_\ell \hat{e}_i \underbrace{(\hat{e}_j \cdot \hat{e}_\ell)}_{\delta_{j\ell}} = \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} \omega_j \hat{e}_i, \end{aligned}$$

o qual se reduz à notação por componentes dada por (3.20a).

A notação diádica ilustra o fato de que o produto escalar de um tensor de posto dois ($\overset{\leftrightarrow}{I}$) com um vetor ($\boldsymbol{\omega}$) tem como resultado um novo vetor (\mathbf{L}).

Nota-se também que

$$I_{ij} = \hat{e}_i \cdot \overset{\leftrightarrow}{I} \cdot \hat{e}_j = \sum_{m,n=1}^3 I_{mn} (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_m) (\hat{e}_n \cdot \hat{e}_j),$$

ou seja, as componentes de $\overset{\leftrightarrow}{I}$ são obtidas pelos produtos internos deste pela esquerda e pela direita por vetores de base.

⁸Ver [Apostila de Física-Matemática](#), seção 6.4.4.

Por outro lado, a notação por componentes mostra que, em geral, o vetor resultante (L) não é colinear ao vetor-pai (ω). Por exemplo, lembrando da expressão (3.14) que relaciona ω com a direção do eixo de rotação, dada por \hat{e}_n , se o corpo sofre uma rotação instantânea em torno de um certo eixo e o referencial S está orientado de tal forma que $\hat{e}_3 \parallel \hat{e}_n$, então, pelo menos neste instante, $\omega = (0, 0, \omega)$. Porém, se a distribuição de massa do corpo for tal que sua matriz de inércia (para S) possuir pelo menos um produto de inércia, então, de (3.20a), o *momentum* angular do corpo irá possuir pelo menos um componente $L_i = I_{i3}\omega_3$, com $i \neq 3$; em consequência, L não é colinear a ω .

Isto fica evidenciado pelo exemplo simples mostrado na figura 3.8. Um corpo rígido é composto por um haltere, formado por duas massas (m_1 e m_2) conectadas por uma barra rígida com massa desprezível. Este corpo sofre uma rotação a uma taxa constante em torno do eixo vertical mostrado na figura, com a consequente orientação da velocidade angular. A figura mostra também as velocidades instantâneas de cada partícula. O ponto O (origem de S) é um ponto fixo e, por isso, o desenvolvimento realizado nesta seção pode ser aplicado neste caso.

Assim, usando (3.18a,b),

$$L = \sum_{k=1}^2 m_k r_k \times v'_k, \text{ sendo } v'_k = \omega \times r_k.$$

Destas expressões, observa-se claramente que $L \perp r_k, v'_k$, sendo sempre perpendicular ao eixo do haltere e não colinear a ω .

Observa-se também que à medida que o haltere gira em torno do eixo de rotação, o *momentum* angular muda de orientação, i. e., $\dot{L} \neq 0$, o que implica (de 3.17) que existe um torque sendo continuamente aplicado ao sistema para manter o seu movimento rotacional.

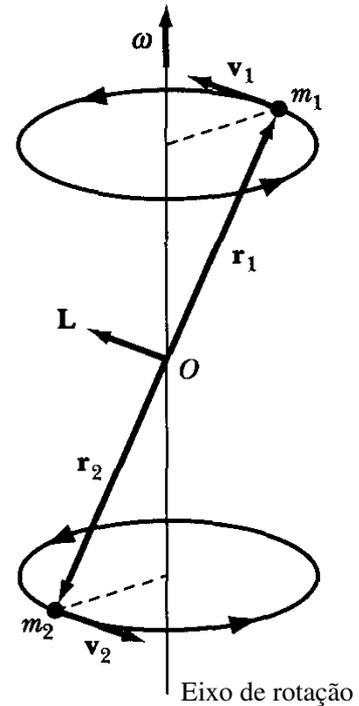


Figura 3.8: Um haltere formado pelas massas m_1 e m_2 conectadas por um cabo rígido e leve. Nota-se que ω não está ao longo do cabo e que L não é colinear a ω .

3.5 ENERGIA CINÉTICA ROTACIONAL E O MOMENTO DE INÉRCIA DO CORPO RÍGIDO

A energia cinética total de um sistema de partículas foi definida em (1.5d). Para se deduzir a expressão da energia cinética total de um corpo rígido que se movimenta com um ponto fixo, é útil realizar primeiro o seguinte exercício.

Partindo da expressão (3.20a), que relaciona os componentes do *momentum* angular do corpo com os componentes do tensor de inércia, multiplica-se ambos os lados por $\frac{1}{2}\omega_i$ e soma-se sobre o índice i , resultando assim

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{2}\omega_i L_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 I_{ij}\omega_i\omega_j \doteq T_{\text{rot}}.$$

Uma análise dimensional da quantidade definida acima (T_{rot}) mostra que esta tem a dimensão de energia. Esta quantidade é denominada a **energia cinética rotacional** do corpo, pois está relacionada com a sua inércia rotacional (via \overleftrightarrow{T}) e a sua velocidade angular ω .

A dedução rigorosa desta expressão pode ser realizada da seguinte maneira. Retornando a (1.5d), a energia cinética total de um sistema com N partículas (sistema discreto), do ponto de vista do referencial fixo S' , é

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k v_k'^2.$$

Porém, nas condições consideradas neste caso, o vetor v'_k é dado por (3.18b). Lembrando agora de toda a discussão realizada nas seções 3.1 – 3.3, o vetor v'_k pode ser considerado de duas maneiras equivalentes: como o valor instantâneo do vetor velocidade ou como a taxa temporal

de variação da posição da i -ésima partícula do sistema. Sendo assim, é possível escrever

$$v_k'^2 = \mathbf{v}'_k \cdot \mathbf{v}'_k \stackrel{(3.18b)}{=} \mathbf{v}'_k \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k).$$

Empregando a identidade vetorial $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$, resulta para a energia cinética

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k [\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_k \times \mathbf{v}'_k)] = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \left[\sum_{k=1}^N (\mathbf{r}_k \times \mathbf{p}'_k) \right] \stackrel{(3.18a)}{\longrightarrow} T \equiv T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}.$$

Finalmente, de (3.20c) conclui-se que

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} \omega_i \omega_j, \quad (3.24a)$$

como se havia previsto.

Outras relações equivalentes são obtidas de (3.24a). Retornando à expressão (3.14) para $\boldsymbol{\omega}$, escreve-se

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2, \text{ sendo} \quad (3.24b)$$

$$I \doteq \hat{\mathbf{e}}_n \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n.$$

A quantidade I é denominada o **momento de inércia em relação ao eixo de rotação**.

Inserindo a expressão (3.23) em I , escreve-se

$$I = \sum_{k=1}^N m_k \left[r_k^2 \hat{\mathbf{e}}_n \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{1}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n - (\hat{\mathbf{e}}_n \cdot \mathbf{r}_k) (\mathbf{r}_k \cdot \hat{\mathbf{e}}_n) \right]$$

$$= \sum_{k=1}^N m_k \left[r_k^2 - (\hat{\mathbf{e}}_n \cdot \mathbf{r}_k)^2 \right],$$

uma vez que

$$\hat{\mathbf{e}}_n \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{1}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n = \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij} (\hat{\mathbf{e}}_n \cdot \hat{\mathbf{e}}_i) (\hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_n) = \sum_{i=1}^3 (\hat{\mathbf{e}}_n \cdot \hat{\mathbf{e}}_i)^2 = |\hat{\mathbf{e}}_n|^2 = 1.$$

Observando a figura 3.9, constata-se claramente que

$$d_k^2 \doteq r_k^2 - (\hat{\mathbf{e}}_n \cdot \mathbf{r}_k)^2 = r_k^2 (1 - \cos^2 \theta_k)$$

$$= r_k^2 \sin^2 \theta_k = (\hat{\mathbf{e}}_n \times \mathbf{r}_k)^2,$$

sendo d_k a distância perpendicular do eixo de rotação da k -ésima partícula do corpo. Portanto, pode-se escrever

$$I = \sum_{k=1}^N m_k d_k^2. \quad (3.25a)$$

Repetindo os passos acima, porém agora para uma distribuição contínua de massa, realiza-se primeiro as transformações

$$m_k \rightarrow dm_k = \rho(\mathbf{r}) d^3r, \quad \sum_{k=1}^N m_k \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{m_k \rightarrow dm_k} \int d^3r \rho(\mathbf{r}),$$

de onde se obtém

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \left(\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{S'} \right)^2 = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \left(\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{S'} \right) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$I = \hat{\mathbf{e}}_n \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n = \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) \left[r^2 - (\hat{\mathbf{e}}_n \cdot \mathbf{r})^2 \right]. \quad (3.25b)$$

A expressão (3.24b) para a energia cinética rotacional é a forma comumente encontrada para esta quantidade nos textos de física básica. Da mesma maneira, a expressão (3.25) é a forma

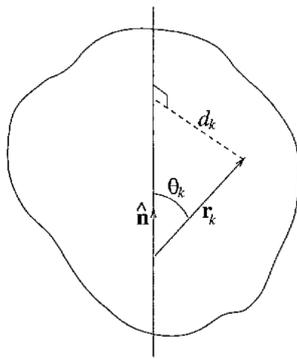
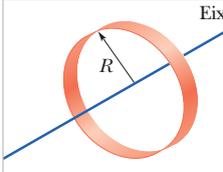
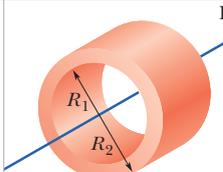
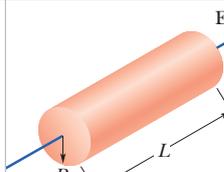
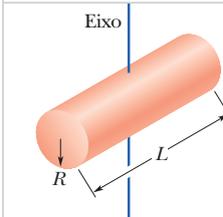
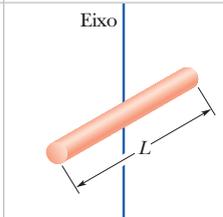
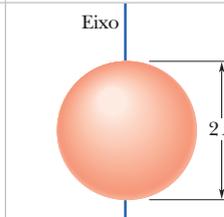
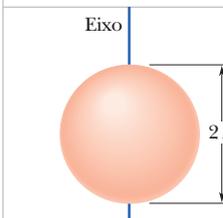
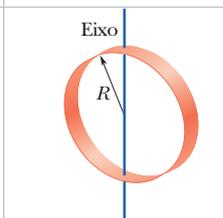
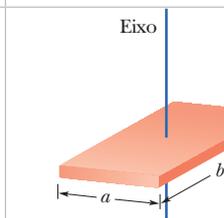


Figura 3.9: Relação entre os vetores $\hat{\mathbf{e}}_n$ e \mathbf{r}_k e a distância perpendicular d_k .

Tabela 3.1: Momentos de inércia de alguns sólidos de revolução. Uma lista mais completa pode ser encontrada em https://pt.wikipedia.org/wiki/Lista_de_momentos_de_inércia.

 <p>Anel fino em torno de um eixo central</p> <p>$I = MR^2$</p> <p>(a)</p>	 <p>Cilindro oco (ou anel grosso) em torno de um eixo central</p> <p>$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$</p> <p>(b)</p>	 <p>Cilindro (ou disco) maciço em torno do eixo central</p> <p>$I = \frac{1}{2}MR^2$</p> <p>(c)</p>
 <p>Cilindro (ou disco) maciço em torno de um diâmetro central</p> <p>$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$</p> <p>(d)</p>	 <p>Barra fina em torno de um eixo central perpendicular à maior dimensão</p> <p>$I = \frac{1}{12}ML^2$</p> <p>(e)</p>	 <p>Esfera maciça em torno de um diâmetro</p> <p>$I = \frac{2}{5}MR^2$</p> <p>(f)</p>
 <p>Casca esférica fina em torno de um diâmetro</p> <p>$I = \frac{2}{3}MR^2$</p> <p>(g)</p>	 <p>Anel fino em torno de um diâmetro</p> <p>$I = \frac{1}{2}MR^2$</p> <p>(h)</p>	 <p>Placa fina em torno de um eixo perpendicular passando pelo centro</p> <p>$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$</p> <p>(i)</p>

comumente encontrada nos mesmos textos para o momento de inércia dos corpos rígidos. A tabela 3.1 apresenta uma breve lista com momentos de inércia de alguns sólidos de revolução. Observa-se que os eixos de rotação nos exemplos ilustrados sempre passam pelo centro de massa dos corpos e com uma orientação tal que a distribuição de massa em torno do eixo é simétrica.

Finalmente, é importante ressaltar que I contém somente parte da informação contida no tensor $\overset{\leftrightarrow}{I}$. Além disso, no movimento mais geral do corpo, o eixo de rotação pode variar no tempo; em consequência, o momento de inércia em relação ao eixo de rotação não será constante. Por outro lado, se o movimento do corpo rígido envolver pelo menos um ponto fixo, sempre é possível encontrar um eixo de rotação que permanece constante no tempo.

Exercício 3.2. Considere o pêndulo ilustrado na figura 3.10, o qual é composto por uma barra rígida e leve de extensão b e com as massas m_1 e m_2 afixadas nos pontos mostrados. Encontre a frequência de pequenas oscilações se a oscilação do pêndulo é planar.

Resolução. Na figura estão ilustrados os referenciais do espaço (S') e do corpo (S), os quais compartilham suas origens que é também o ponto fixo no movimento do sistema. O eixo de rotação está orientado ao longo de $x'_3 = x_3$ ($\hat{e}'_3 = \hat{e}_3$). Então, a velocidade angular fica

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_3 \hat{e}_3 = \dot{\theta} \hat{e}_3.$$

De acordo com (3.19a), a matriz de inércia do corpo é dada por

$$I_{ij} = m_1 (r_1^2 \delta_{ij} - x_{1,i} x_{1,j}) + m_2 (r_2^2 \delta_{ij} - x_{2,i} x_{2,j}), \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Como $x_{k,2} = x_{k,3} = 0$ ($k = 1, 2$), resulta que todos os produtos de inércia são nulos, bem como o elemento I_{11} . Mas,

$$I_{22} = I_{33} = m_1 x_{1,1}^2 + m_2 x_{2,1}^2 = \left(m_1 + \frac{1}{4} m_2 \right) b^2.$$

Ou seja,

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(m_1 + \frac{1}{4} m_2 \right) b^2.$$

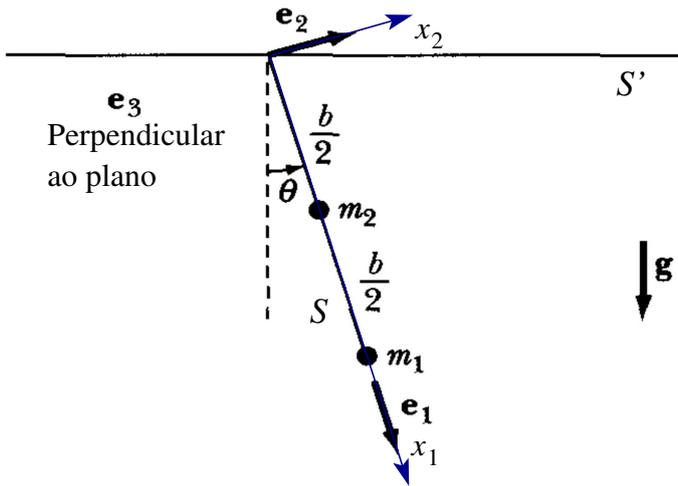


Figura 3.10: Uma barra rígida e leve, que fixa as massas m_1 e m_2 nos pontos ilustrados, oscila como um pêndulo físico.

Como o movimento do corpo tem um ponto fixo, então o seu *momentum* angular é dado por (3.20a),

$$L = I\omega = \left(m_1 + \frac{1}{4}m_2\right) b^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} L_1 = L_2 = 0 \\ L_3 = \left(m_1 + \frac{1}{4}m_2\right) b^2 \dot{\theta}. \end{cases}$$

A taxa de variação de L é dada por (3.17), em termos do torque total atuando sobre o corpo. Do ponto de vista de S' , este torque é $N^{(e)} = \sum_{k=1}^2 \mathbf{r}_k \times (m_k \mathbf{g})$. Escrevendo \mathbf{g} em termos de S ,

$$\mathbf{g} = g \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_1 - g \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_2.$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \times (m_1 \mathbf{g}) &= m_1 b \hat{\mathbf{e}}_1 \times (g \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_1 - g \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_2) = -m_1 b g \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \mathbf{r}_2 \times (m_2 \mathbf{g}) &= \frac{1}{2} m_2 b \hat{\mathbf{e}}_1 \times (g \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_1 - g \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_2) = -\frac{1}{2} m_2 b g \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_3. \end{aligned}$$

Portanto, de (3.17) resulta que $\dot{L}_1 = \dot{L}_2 = 0$ e

$$\begin{aligned} \dot{L}_3 &= \left(m_1 + \frac{1}{4}m_2\right) b^2 \ddot{\theta} = -\left(m_1 + \frac{1}{2}m_2\right) b g \sin \theta \\ &\Rightarrow \left(m_1 + \frac{1}{4}m_2\right) b \ddot{\theta} + \left(m_1 + \frac{1}{2}m_2\right) g \sin \theta = 0. \end{aligned}$$

Realizando a aproximação de oscilações de pequena amplitude, obtém-se a equação de oscilador harmônico

$$\ddot{\theta} + \Omega^2 \theta = 0,$$

cuja frequência (angular) de oscilação é

$$\Omega^2 = \frac{m_1 + \frac{1}{2}m_2}{m_1 + \frac{1}{4}m_2} \frac{g}{b}.$$

3.6 O TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS

Este importante teorema mostra como a matriz de inércia, calculada a partir de um eixo de rotação que passa por um ponto qualquer do corpo rígido, se relaciona à mesma matriz de inércia obtida em relação a um outro eixo que passa pelo centro de massa do corpo e que é paralelo ao eixo inicial. Este teorema é também conhecido como *teorema de Steiner*.

Teorema 3.2 (de Steiner ou dos eixos paralelos). *O momento de inércia em relação a um dado eixo de rotação é igual ao momento de inércia relativo a um eixo paralelo passando pelo centro de massa do corpo, acrescido do momento de inércia em relação ao eixo original, calculado como se o corpo estivesse inteiramente concentrado no centro de massa.*

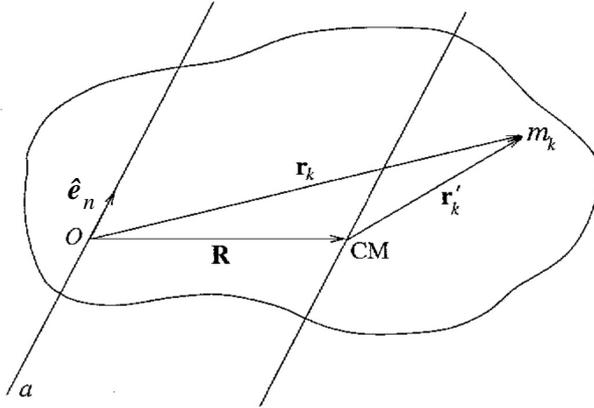


Figura 3.11: Figura empregada na demonstração do teorema de Steiner.

Demonstração. Fazendo-se referência à figura 3.11, o eixo a é um eixo instantâneo de rotação, orientado na direção e sentido do vetor \hat{e}_n , e que passa pelo ponto O . O centro de massa do corpo está no ponto CM, sendo \mathbf{R} o vetor posição em relação a O . Se m_k é a massa da k -ésima partícula do corpo, então $\mathbf{r}_k = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_k$. Denominando I_a o momento de inércia do corpo em relação ao eixo a , este é dado por (3.25a),

$$\begin{aligned} I_a &= \sum_{k=1}^N m_k d_k^2 = \sum_{k=1}^N m_k (\hat{e}_n \times \mathbf{r}_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^N m_k (\hat{e}_n \times \mathbf{R} + \hat{e}_n \times \mathbf{r}'_k)^2 \\ &= \underbrace{\left(\sum_{k=1}^N m_k \right)}_M (\hat{e}_n \times \mathbf{R})^2 + \underbrace{\sum_{k=1}^N m_k (\hat{e}_n \times \mathbf{r}'_k)^2}_{I_{CM}} + 2(\hat{e}_n \times \mathbf{R}) \cdot \left(\hat{e}_n \times \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{r}'_k \right), \end{aligned}$$

sendo que o último termo é nulo pelas mesma razão já discutida em (1.8b).

Portanto,

$$I_a = I_{CM} + M (\hat{e}_n \times \mathbf{R})^2. \quad (3.26a)$$

Comparando os termos do lado direito com (3.25a), constata-se que I_{CM} nada mais é senão o momento de inércia em relação ao ponto CM, enquanto que o último termo é simplesmente o momento de inércia (em relação ao eixo a) de uma partícula com massa M posicionada no centro de massa. Assim, este resultado prova o teorema de Steiner. \square

Pode-se facilmente provar também a generalização do teorema de Steiner para o tensor de inércia. Substituindo $\mathbf{r}_k = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_k$ em (3.23a), resulta

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\mathbf{I}}_O &= \sum_{k=1}^N m_k \left[(\mathbf{R} + \mathbf{r}'_k)^2 \overleftrightarrow{\mathbf{1}} - (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_k)(\mathbf{R} + \mathbf{r}'_k) \right] \\ &= \sum_{k=1}^N m_k \left[(R^2 + r_k'^2 + 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}'_k) \overleftrightarrow{\mathbf{1}} - \mathbf{R}\mathbf{R} - \mathbf{R}\mathbf{r}'_k - \mathbf{r}'_k\mathbf{R} - \mathbf{r}'_k\mathbf{r}'_k \right] \\ &= \sum_{k=1}^N m_k \left(r_k'^2 \overleftrightarrow{\mathbf{1}} - \mathbf{r}'_k\mathbf{r}'_k \right) + M \left(R^2 \overleftrightarrow{\mathbf{1}} - \mathbf{R}\mathbf{R} \right) \\ &\quad + 2\mathbf{R} \cdot \left(\sum_{k=1}^N m_k \mathbf{r}'_k \right) \overleftrightarrow{\mathbf{1}} - \mathbf{R} \left(\sum_{k=1}^N m_k \mathbf{r}'_k \right) - \left(\sum_{k=1}^N m_k \mathbf{r}'_k \right) \mathbf{R}, \end{aligned}$$

resultando então

$$\overleftrightarrow{I}_O = \overleftrightarrow{I}_{CM} + M \left(R^2 \overleftrightarrow{1} - \mathbf{R}\mathbf{R} \right), \text{ sendo } \overleftrightarrow{I}_{CM} = \sum_{k=1}^N m_k \left(r_k'^2 \overleftrightarrow{1} - \mathbf{r}'_k \mathbf{r}'_k \right), \text{ ou} \quad (3.26b)$$

$$(I_O)_{ij} = (I_{CM})_{ij} + M \left(R^2 \delta_{ij} - R_i R_j \right), \text{ sendo } (I_{CM})_{ij} = \sum_{k=1}^N m_k \left(r_k'^2 \delta_{ij} - x'_{k,i} x'_{k,j} \right).$$

A quantidade $\overleftrightarrow{I}_{CM}$ nada mais é senão o tensor de inércia em relação ao centro de massa, enquanto que o segundo termo é o tensor de inércia em relação a O , de uma partícula com massa M localizada no centro de massa. Nesta expressão, o teorema de Steiner assume uma forma independente do sistema de coordenadas particular adotado.

Exercício 3.3. Encontre o tensor de inércia do cubo do exercício 3.1, porém agora em relação a um sistema de coordenadas com origem no centro de massa do cubo.

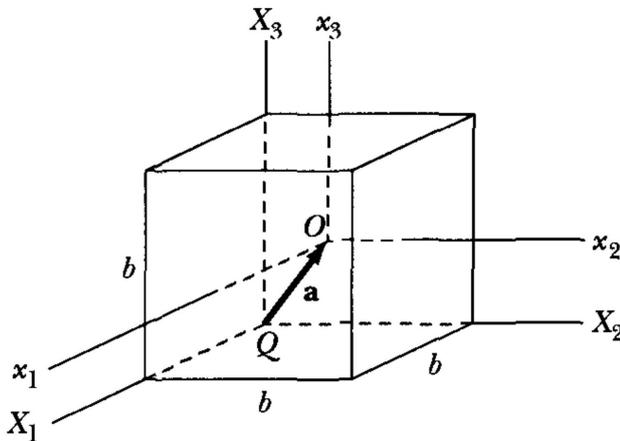


Figura 3.12: O referencial com eixos $\{X_1, X_2, X_3\}$ possui origem no vértice do cubo (ponto Q), enquanto que o referencial $\{x_1, x_2, x_3\}$ tem origem no centro de massa (ponto O).

Resolução. A situação está ilustrada na figura 3.12. O vetor $\mathbf{a} = (b/2, b/2, b/2)$ localiza o centro de massa do cubo, o qual é também o seu centro geométrico. Então, de acordo com (3.26b),

$$(I_O)_{ij} = (I_Q)_{ij} - M \left(a^2 \delta_{ij} - a_i a_j \right) = (I_Q)_{ij} - \frac{1}{4} M b^2 (3\delta_{ij} - 1),$$

sendo I_Q a matriz de inércia obtida na solução do exercício 3.1. Daí resulta que

$$(I_O)_{11} = (I_O)_{22} = (I_O)_{33} = \frac{2}{3} M b^2 - \frac{1}{2} M b^2 = \frac{1}{6} M b^2$$

$$(I_O)_{12} = (I_O)_{13} = (I_O)_{21} = \dots = -\frac{1}{4} M b^2 - \frac{1}{4} M b^2 (-1) = 0.$$

Portanto,

$$I_O = \frac{1}{6} M b^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observa-se que em relação ao centro de massa, a matriz de inércia é diagonal.

Será apresentado agora um teorema adicional, envolvendo os elementos da matriz de inércia.

Teorema 3.3 (Teorema do eixo perpendicular). *Dada uma placa plana de formato e distribuição de massa arbitrários, a soma de seus momentos de inércia em relação a quaisquer dois eixos perpendiculares contidos no plano da placa é igual ao momento de inércia em relação ao eixo perpendicular à placa e que parte da intersecção dos eixos no plano.*

3.7 DIAGONALIZAÇÃO DO TENSOR DE INÉRCIA

As componentes do tensor de inércia dependem da origem e da orientação do referencial do corpo. Nos exemplos já apresentados, mostrou-se que uma orientação generalizada deste

referencial resulta em uma matriz de inércia que possui tanto momentos quanto produtos de inércia não nulos. Uma das consequências disto está no fato de que o *momentum* angular não é paralelo à velocidade angular do corpo.

Caso existisse uma orientação do referencial no qual a matriz de inércia fosse diagonal (embora com elementos distintos, em geral), então tanto o *momentum* angular quanto a energia cinética rotacional assumiriam as formas relativamente mais simples

$$I_{ij} = I_i \delta_{ij} \implies L_i = I_i \omega_i \text{ e } T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i^2. \quad (3.27)$$

Felizmente, sempre é possível realizar-se uma rotação dos eixos do referencial S tal que no novo referencial a matriz I é diagonal. Isto porque é sempre possível diagonalizar uma matriz real e simétrica, de acordo com o teorema espectral.⁹ Este procedimento será agora apresentado.

Fazendo referência à figura 3.3(b), o referencial azul agora representa a orientação original de S e o referencial vermelho representa a nova orientação, em relação à qual o tensor de inércia é diagonal. O tensor de inércia é o mesmo objeto matemático, independente do referencial adotado, mas suas componentes (os elementos da matriz I) mudam conforme o referencial. Ou seja,

$$\overset{\leftrightarrow}{I} = \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j = \sum_{i=1}^3 I_i \hat{\xi}_i \hat{\xi}_i,$$

sendo $\{I_{ij}\}$ as componentes do tensor na orientação original de S (com a base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$) e $\{I_i\}$ as suas componentes no referencial rotado (com a base $\{\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3\}$). Os elementos $\{I_1, I_2, I_3\}$ da matriz de inércia diagonal são chamados os **momentos principais de inércia**, enquanto que os eixos ao longo dos vetores da base $\{\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3\}$ são chamados **eixos principais de inércia**.

Caso os momentos e eixos principais fossem conhecidos, então

$$\overset{\leftrightarrow}{I} \cdot \hat{\xi}_k = \sum_{i=1}^3 I_i \hat{\xi}_i \underbrace{\hat{\xi}_i \cdot \hat{\xi}_k}_{\delta_{ik}} = I_k \hat{\xi}_k, \quad (k = 1, 2, 3).$$

Mas, do ponto de vista do referencial original,

$$\overset{\leftrightarrow}{I} \cdot \hat{\xi}_k = \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} \hat{e}_i \underbrace{(\hat{e}_j \cdot \hat{\xi}_k)}_{\xi_{kj}} = \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} \xi_{kj} \hat{e}_i,$$

sendo ξ_{kj} a componente do k -ésimo vetor da nova base ao longo do j -ésimo vetor da base original. Como ambos os resultados acima são os mesmos, então, necessariamente,

$$\sum_{i,j=1}^3 I_{ij} \xi_{kj} \hat{e}_i = I_k \hat{\xi}_k \implies \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} \xi_{kj} \hat{e}_i = \sum_{i=1}^3 I_k \xi_{ki} \hat{e}_i \implies \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 I_{ij} \xi_{kj} - I_k \xi_{ki} \right) \hat{e}_i = 0.$$

A última relação corresponde a um vetor nulo. Portanto, ignorando-se o índice k ,

$$\sum_{j=1}^3 I_{ij} \xi_j = I \xi_i, \quad (i = 1, 2, 3).$$

O resultado acima corresponde a um sistema de três equações lineares para I , o qual pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{pmatrix} I_{11} - I & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - I & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (3.28a)$$

Para que este sistema tenha uma solução não trivial, é necessário que

$$\det \begin{pmatrix} I_{11} - I & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - I & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - I \end{pmatrix} = 0. \quad (3.28b)$$

⁹Apostila de Física-Matemática, seção 4.10.

Esta condição resulta em uma equação cúbica para I , denominada **equação característica** ou **secular** e cujas soluções corresponderão aos momentos principais de inércia procurados.

Uma vez encontrados os momentos principais de inércia como as soluções de (3.28b), retorna-se a (3.28a) e insere-se na mesma cada momento por vez. Para cada momento, resulta um sistema superdeterminado de equações que fornece as projeções do vetor $\hat{\xi}$ do correspondente eixo principal ao longo dos eixos originais. Cada equação fornecerá então duas dessas componentes em termos de uma terceira, a qual pode finalmente ser determinada pela condição de normalização de $\hat{\xi}$.

O processo descrito acima nada mais é que o processo usual de determinação dos autovalores e autovetores de uma matriz quadrada não singular. Em geral esses autovalores são complexos, mas como a matriz de inércia é real e simétrica, os autovalores são necessariamente reais e positivos (porque os momentos de inércia são sempre positivos).

Exemplo 3.1 (Momentos e eixos principais de inércia de uma placa homogênea). Dada a placa triangular homogênea com massa M mostrada na figura 3.13(a), a qual mostra também a orientação inicial do referencial S , a densidade (constante) da placa pode ser escrita como

$$\rho = \sigma \delta(z), \text{ sendo } \sigma = \frac{2M}{a^2}.$$

A quantidade σ é a densidade superficial de massa e $\delta(z)$ é a “função” delta de Dirac.¹⁰

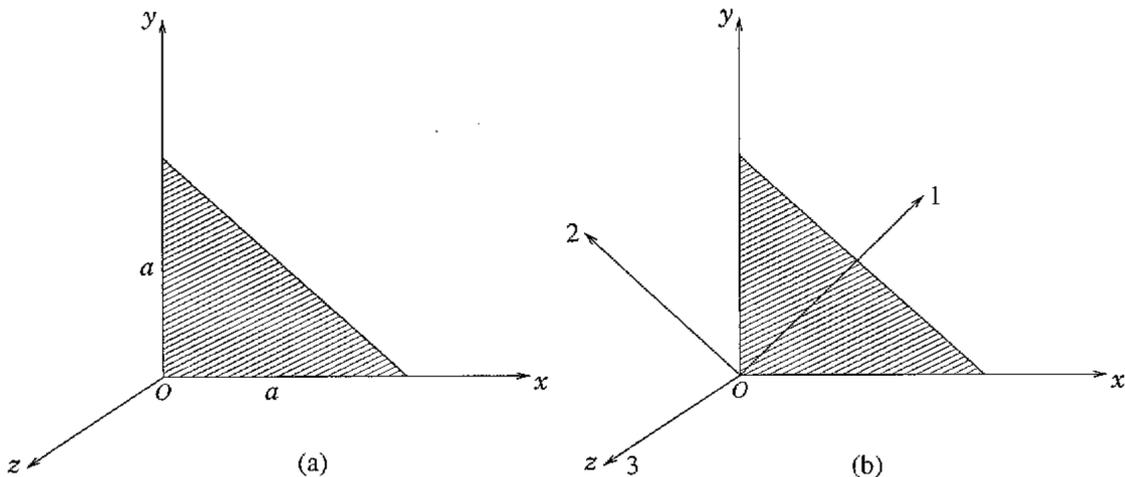


Figura 3.13: Tensor de inércia de uma placa triangular homogênea. (a) Referencial S original. (b) Referencial rotado contendo os eixos principais de inércia.

Então, os elementos da matriz de inércia ficam

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_V \rho (y^2 + z^2) dx dy dz = \sigma \int_V \delta(z) (y^2 + z^2) dx dy dz \\ &= \sigma \left(\int_0^a dy y^2 \int_0^{a-y} dx \underbrace{\int_0^a dz \delta(z)}_1 + \int_0^a dy y^2 \int_0^{a-y} dx \int_0^a dz \delta(z) z^2 \right) \\ &= \sigma \int_0^a dy y^2 (a - y) = \frac{1}{12} \sigma a^4 = \frac{1}{6} M a^2. \end{aligned}$$

Mostra-se que $I_{yy} = I_{xx}$ e

$$I_{zz} = \int_V \rho (x^2 + y^2) dx dy dz = I_{xx} + I_{yy} = \frac{1}{6} \sigma a^4 = \frac{1}{3} M a^2.$$

Já os produtos de inércia ficam

$$I_{xy} = I_{yx} = - \int_V \rho xy dx dy dz = -\sigma \int_0^a dy y \int_0^{a-y} dx x = -\frac{\sigma a^4}{24} = -\frac{M a^2}{12}$$

¹⁰Para propriedades da delta de Dirac, inclusive para integrais múltiplas em qualquer sistema de coordenadas, ver [Apostila de Física-Matemática](#), apêndice A.

$$I_{iz} = I_{zi} = - \int_V \rho x_i z dx dy dz = -\sigma \int_A d^2r x_i \int dz z \delta(z) = 0, \quad (i = 1, 2).$$

Portanto,

$$I_a = \frac{Ma^2}{12} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Observa-se que, de acordo com (3.20a), o *momentum* angular da placa somente será paralelo à velocidade angular se $\omega = \omega \hat{z}$, ou seja, se o eixo de rotação for z .

Para obter agora os momentos e eixos principais de inércia, primeiro aplica-se (3.28b), a qual resulta na equação

$$\det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \implies (4 - \lambda) [(2 - \lambda)^2 - 1] = 0, \quad \text{onde } \lambda = \frac{12}{Ma^2} I,$$

$$\begin{cases} \lambda = 2 \pm 1 \\ \lambda = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} I_1 = \frac{Ma^2}{12} \\ I_2 = \frac{1}{4} Ma^2 \\ I_3 = \frac{1}{3} Ma^2. \end{cases}$$

Portanto,

$$I_b = \frac{Ma^2}{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

mostra os momentos principais de inércia.

Para determinar os eixos principais, retorna-se a (3.28a) e emprega-se cada momento sucessivamente:

1. Para $I_1 = \frac{1}{12} Ma^2$, sendo $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{cases} (2 - \lambda_1) \xi_x - \xi_y = 0 \\ -\xi_x + (2 - \lambda_1) \xi_y = 0 \\ (4 - \lambda_1) \xi_z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\xi_{1,z}=0} \xi_{1,x} - \xi_{1,y} = 0 \implies \xi_{1,x} = \xi_{1,y}.$$

Ou seja,

$$\hat{\xi}_1 = \xi_{1,x} (\hat{x} + \hat{y}) \xrightarrow{|\hat{\xi}|=1} 2\xi_{1,x}^2 = 1 \implies \hat{\xi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + \hat{y}).$$

2. Para $I_2 = \frac{1}{4} Ma^2$, sendo $\lambda_2 = 3$,

$$\begin{cases} -\xi_{2,x} - \xi_{2,y} = 0 \\ -\xi_{2,x} - \xi_{2,y} = 0 \\ \xi_{2,z} = 0 \end{cases} \implies \xi_{2,x} = -\xi_{2,y} \implies \hat{\xi}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\hat{x} + \hat{y}).$$

3. Para $I_3 = \frac{1}{3} Ma^2$, sendo $\lambda_3 = 4$,

$$\begin{cases} -2\xi_{3,x} - \xi_{3,y} = 0 \\ -\xi_{3,x} - 2\xi_{3,y} = 0 \\ (4 - \lambda_3) \xi_z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\xi_{3,x}=\xi_{3,y}=0} \xi_{3,z} \neq 0 \implies \hat{\xi}_3 = \hat{z}.$$

Os eixos principais, correspondendo a uma rotação de S por 45° em torno de z , são mostrados na figura 3.13(b). Nota-se que a escolha de sinais em $\hat{\xi}_2$ foi feita para que o novo sistema continue dextrógiro. Observa-se que agora $L \parallel \omega$, caso $\omega = \omega_i \hat{\xi}_i$.

SIMETRIAS E EIXOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA

A identificação dos eixos principais de inércia de um corpo rígido é simplificada caso o corpo possua algum tipo de simetria espacial. Essa simetria pode ser de diversos tipos; neste texto somente serão consideradas as simetrias *planar* ou *axial*.

Definição 3.1 (Simetria planar). Seja um corpo com uma distribuição de massa $\rho = \rho(\mathbf{r})$. Empregando-se um sistema de coordenadas Cartesianas, diz-se que o corpo possui *simetria planar* se existir uma orientação do sistema tal que

$$\rho(x_1, x_2, x_3) = \rho(x_1, x_2, -x_3).$$

Neste caso, diz-se que o plano $(x_1 - x_2)$ é o *plano de simetria* do corpo.

Para um corpo que possui simetria planar, vale o seguinte lema.

Lema 3.1 (Plano de simetria). Se um corpo rígido possui um plano de simetria que contém a origem do referencial do corpo, então um eixo principal de inércia é perpendicular a esse plano.

A outra simetria importante refere-se a uma simetria axial.

Definição 3.2 (Simetria axial). Seja um corpo com uma distribuição de massa $\rho = \rho(\mathbf{r})$. Empregando-se um sistema de coordenadas cilíndricas $\{r, \phi, z\}$, diz-se que o corpo possui *simetria axial* se existir uma orientação do sistema tal que

$$\rho(r, \phi, z) = \rho(r, z).$$

Neste caso, diz-se que o eixo z é o *eixo de simetria* do corpo.

Para corpos com simetria axial, vale o seguinte lema.

Lema 3.2 (Eixo de simetria). Se um corpo rígido possui um eixo de simetria passando pela origem do referencial do corpo, então este eixo é um eixo principal de inércia. Quaisquer dois eixos mutuamente ortogonais contidos no plano perpendicular ao eixo de simetria são também eixos principais de inércia e os momentos de inércia correspondentes são iguais entre si.

O exemplo a seguir aplica os lemas acima.

Exemplo 3.2 (Momentos e eixos principais de inércia de um cubo homogêneo). Fazendo referência novamente ao cubo abordado no exercício 3.1, verifica-se que o mesmo possui mais de um plano de simetria, para os quais valem o lema 3.1. Os planos determinados pelos pontos OABC ou ODBE, vistos na figura 3.14, são dois desses planos de simetria. Assim um eixo perpendicular a qualquer um desses planos será um eixo principal de inércia do cubo.

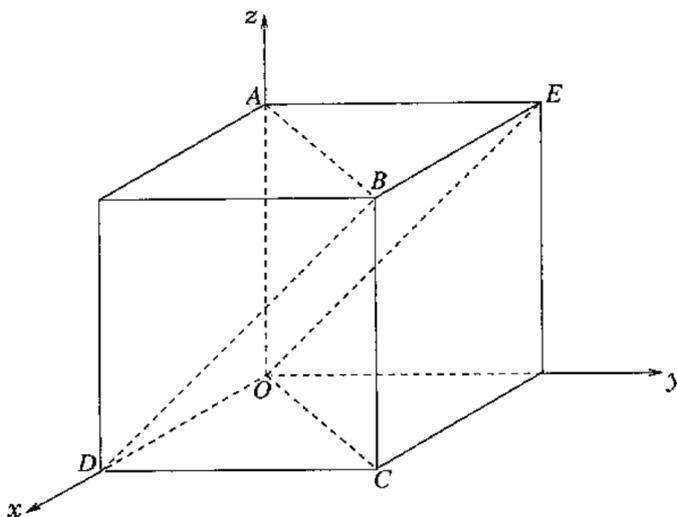


Figura 3.14: Planos de simetria de um cubo homogêneo em relação a um referencial cuja origem está no vértice e com eixos ao longo das arestas.

Para obter fórmulas genéricas que fornecerão os momentos e eixos principais de inércia, parte-se da matriz obtida no exercício 3.1 para obter a equação característica a partir de (3.28b). Então, sendo $\lambda = I/Mb^2$,

$$\det \begin{pmatrix} 2/3 - \lambda & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 - \lambda & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

O valor de um determinante não é alterado pela adição (ou subtração) de quaisquer pares de linhas (ou colunas) da matriz. Então, subtraindo a primeira linha da segunda, resulta

$$\det \begin{pmatrix} 2/3 - \lambda & -1/4 & -1/4 \\ -11/12 + \lambda & 11/12 - \lambda & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \implies \left(\frac{11}{12} - \lambda\right) \det \begin{pmatrix} 2/3 - \lambda & -1/4 & -1/4 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 - \lambda \end{pmatrix} = 0,$$

sendo que este último resultado é outra propriedade de determinantes. Calculando este determinante agora, resulta

$$\begin{aligned} \left(\frac{11}{12} - \lambda\right) \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{2}{3} - \lambda\right) \left[\left(\frac{2}{3} - \lambda\right) - \frac{1}{4}\right] \right\} &= 0, \\ \left(\frac{11}{12} - \lambda\right) \left[\left(\frac{2}{3} - \lambda\right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} - \lambda\right) - \frac{1}{8} \right] &= 0, \\ \left(\frac{11}{12} - \lambda\right)^2 \left(\frac{1}{6} - \lambda\right) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, os momentos principais de inércia são:

$$I_1 = I_2 = \frac{11}{12} Mb^2, \quad I_3 = \frac{1}{6} Mb^2.$$

Para a obtenção dos eixos principais, retorna-se a (3.28a), escrevendo esta como o sistema

$$\begin{cases} (2/3 - \lambda) \xi_1 - (1/4) \xi_2 - (1/4) \xi_3 = 0 \\ - (1/4) \xi_1 + (2/3 - \lambda) \xi_2 - (1/4) \xi_3 = 0 \\ - (1/4) \xi_1 - (1/4) \xi_2 + (2/3 - \lambda) \xi_3 = 0, \end{cases}$$

sendo que uma destas equações sempre pode ser obtida a partir de alguma combinação das outras duas. Substituindo primeiro o momento I_3 nas duas primeiras equações do sistema, resultam

$$\begin{cases} (1/2) \xi_{3,1} - (1/4) \xi_{3,2} - (1/4) \xi_{3,3} = 0 \\ - (1/4) \xi_{3,1} + (1/2) \xi_{3,2} - (1/4) \xi_{3,3} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2\xi_{3,1} - \xi_{3,2} - \xi_{3,3} = 0 \\ -\xi_{3,1} + 2\xi_{3,2} - \xi_{3,3} = 0. \end{cases}$$

Subtraindo agora as duas equações, resulta $\xi_{3,1} = \xi_{3,2}$. Substituindo este resultado na primeira, resulta finalmente

$$\xi_{3,1} = \xi_{3,2} = \xi_{3,3} \xrightarrow{|\hat{\xi}_3|=1} \hat{\xi}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3).$$

Substituindo agora $I_1 = I_2$, nas equações originais, resulta em qualquer uma $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$, onde agora $\xi_i = \xi_{1,i}$ ou $\xi_{2,i}$. Ou seja, pode-se escrever $\hat{\xi} = \xi_1 \hat{e}_1 + \xi_2 \hat{e}_2 - (\xi_1 + \xi_2) \hat{e}_3$. Usando a condição de normalização,

$$|\hat{\xi}| = 1 \implies \xi_1^2 + \xi_2^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2 = 1.$$

Este resultado mostra que ainda há um parâmetro livre (ξ_1 ou ξ_2), cujo valor irá determinar a orientação de um dos eixos principais restantes. Escolhendo-se arbitrariamente $\xi_{2,1} = \xi_{2,2}$, resulta então

$$\hat{\xi}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - 2\hat{e}_3).$$

O vetor de base restante ($\hat{\xi}_1$) será finalmente obtido pela regra dextrógrá

$$\hat{\xi}_1 = \hat{\xi}_2 \times \hat{\xi}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e}_1 - \hat{e}_2).$$

Na figura 3.14, observa-se que $\hat{\xi}_1$ é perpendicular ao plano de simetria formado por OABC, enquanto que $\hat{\xi}_2$ e $\hat{\xi}_3$ estão contidos neste plano. Uma outra escolha de parâmetros resulta em um novo conjunto de eixos principais, sendo um destes perpendicular ao plano de simetria ODBE.

3.8 A LAGRANGIANA DE UM CORPO RÍGIDO

Será agora construída a Lagrangiana de um corpo rígido a partir das definições e propriedades anteriormente apresentadas. A descrição da evolução dinâmica do corpo rígido, como um sistema de muitas partículas, irá levar agora em consideração tanto a rotação instantânea em torno de um determinado eixo quanto a translação do objeto como um todo.

Neste caso, o número total de graus de liberdade do corpo aumenta para 06 (seis), três destes correspondentes à rotação do corpo em torno de um eixo instantâneo e os outros três correspondentes à translação do centro de massa do sistema. Isto é garantido pelo teorema de Chasles, o qual é apresentado sem demonstração.¹¹

Teorema 3.4 (Chasles). *O deslocamento mais geral possível de um corpo rígido pode ser realizado por uma translação ao longo de uma dada direção, seguida (ou precedida) por uma rotação em torno desta direção.*

Para a descrição da dinâmica do corpo, será escolhido o formalismo Lagrangiano como o preferencial. Em seguida, será feita então a dedução da Lagrangiana “genérica” de um corpo rígido, levando em conta tanto a rotação quanto a translação deste.

Neste ponto é necessário enfatizar novamente que as equações de Euler-Lagrange, da mesma forma que as Leis de Newton, descrevem corretamente a evolução dinâmica do sistema somente se as quantidades forem medidas com relação a referenciais inerciais. Por esta razão, um cuidado especial deve ser tomada para cada termo da Lagrangiana.

3.8.1 A ENERGIA CINÉTICA

Para a derivação da energia cinética total (translacional e rotacional) de um corpo rígido, é necessário retomar a discussão envolvendo os referenciais S' (inercial ou fixo) e S (corpo). A figura 3.15 ilustra o corpo rígido, os referenciais S' e S e o centro de massa (CM) do corpo. Ilustra-se também o eixo instantâneo de rotação (curva tracejada), cuja direção e sentido são determinados pelo vetor unitário \hat{n} .

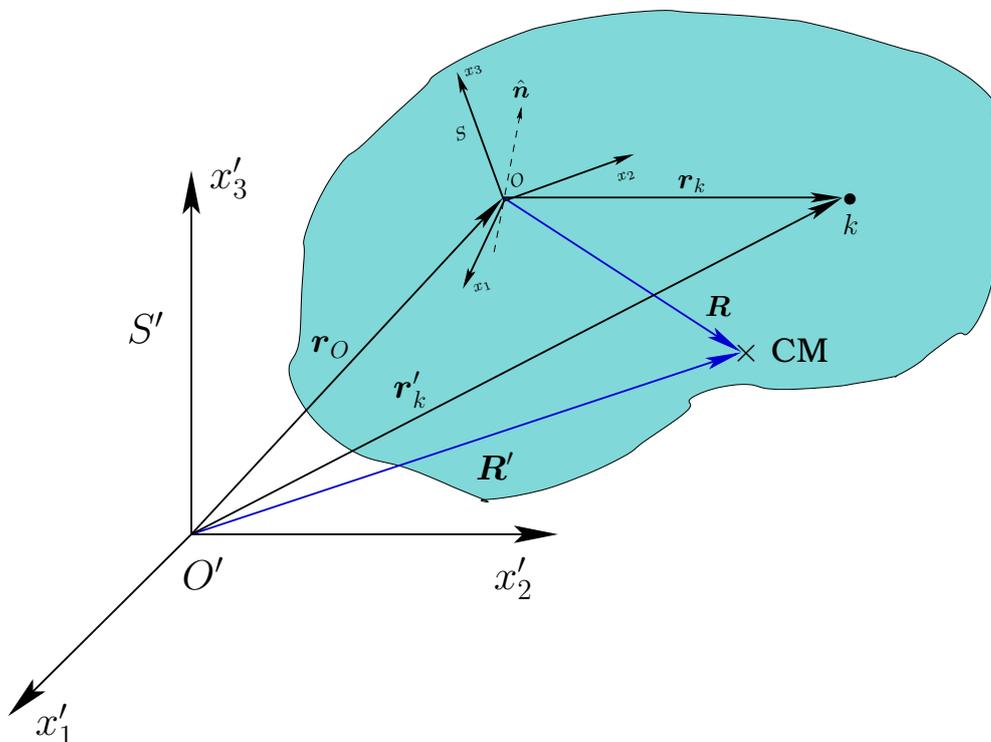


Figura 3.15: Representação de um corpo rígido com os referenciais S' (fixo) e S (corpo). Ilustram-se também a posição do centro de massa (CM) do corpo e o eixo instantâneo de rotação (\hat{n}) sobre O .

¹¹Demonstrações são fornecidas por (CORBEN; STEHLE, 1960) ou por Kumar (2018).

Sendo \mathbf{r}'_k a posição instantânea da k -ésima partícula do sistema, a sua energia cinética total, medida a partir do referencial fixo S' é

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k'^2 = \frac{1}{2} \sum_k m_k v_k'^2,$$

onde $\mathbf{v}'_k = d\mathbf{r}'_k/dt$. Na figura 3.15, observam-se as seguintes identidades vetoriais:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_k &= \mathbf{r}_O + \mathbf{r}_k & \mathbf{r}'_k &: \text{posição da } k\text{-ésima partícula em relação a } S'. \\ \mathbf{R}' &= \mathbf{r}_O + \mathbf{R} & \mathbf{r}_k &: \text{posição da } k\text{-ésima partícula em relação a } S. \\ M\mathbf{R}' &\doteq \sum_k m_k \mathbf{r}'_k & \mathbf{r}_O &: \text{posição da origem de } S \text{ em relação a } S'. \\ M\mathbf{R} &\doteq \sum_k m_k \mathbf{r}_k & \mathbf{R}' &: \text{posição do centro de massa em relação a } S'. \\ & & \mathbf{R} &: \text{posição do centro de massa em relação a } S. \\ & & M &: \text{massa total do sistema.} \end{aligned}$$

Derivando \mathbf{r}'_k e \mathbf{R}' em relação ao tempo,

$$\mathbf{v}'_k = \mathbf{v}_O|_{S'} + \dot{\mathbf{r}}_k|_{S'} \qquad \mathbf{V}' = \mathbf{v}_O|_{S'} + \dot{\mathbf{R}}|_{S'},$$

sendo ressaltado que as derivadas são realizadas em relação a S' . Substituindo as taxa temporais $\dot{\mathbf{r}}_k$ e $\dot{\mathbf{R}}$ conforme medidas em relação ao referencial S , o qual é não inercial, torna-se novamente necessário o emprego da identidade (3.13), de acordo com a discussão realizada na seção 3.2.3. Por consequência, estas quantidades são dadas por

$$\dot{\mathbf{r}}_k|_{S'} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k, \qquad \dot{\mathbf{R}}|_{S'} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}.$$

Desta maneira, a energia total do corpo rígido pode ser escrita

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_k m_k (\mathbf{v}_O + \dot{\mathbf{r}}_k)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_k m_k v_O^2 + \frac{1}{2} \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2 + \sum_k m_k \mathbf{v}_O \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k), \\ T &= \frac{1}{2} M v_O^2 + \frac{1}{2} \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2 + M \mathbf{v}_O \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}). \end{aligned}$$

O segundo termo na expressão acima pode ser manipulado, lembrando da relação (3.20c) entre o *momentum* angular e o tensor de inércia do corpo rígido:

$$\sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2 = \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \dot{\mathbf{r}}_k = \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k) = \boldsymbol{\omega} \cdot \left(\sum_k m_k (\mathbf{r}_k \times \dot{\mathbf{r}}_k) \right) = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = \boldsymbol{\omega} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Ou seja, como já havia sido obtido anteriormente, este termo é justamente a energia cinética rotacional sobre o ponto O .

Portanto,

$$T = \frac{1}{2} M v_O^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}_O \cdot \boldsymbol{\omega} + M \mathbf{v}_O \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}), \tag{3.29a}$$

onde $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}_O$ enfatiza que o tensor de inércia é obtido em relação ao ponto O .

Uma expressão mais conveniente para a energia cinética é obtida introduzindo a posição e velocidade do centro de massa do corpo através das identidades

$$\mathbf{r}_O = \mathbf{R}' - \mathbf{R} \qquad \mathbf{v}_O = \mathbf{V}' - \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}' - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}.$$

Substituindo as mesmas em (3.29a) resulta

$$T = \frac{1}{2} M (\mathbf{V}' - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}_O \cdot \boldsymbol{\omega} + M (\mathbf{V}' - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}),$$

$$T = \frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}_O \cdot \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}M(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})^2. \quad (3.29b)$$

Se agora a origem do referencial do corpo for posicionada sobre o seu centro de massa ($O = \text{CM}$), observa-se que $\mathbf{R} = 0$ e, neste caso, a energia cinética toma a sua expressão mais simples

$$T = \frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}_{\text{CM}} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (3.29c)$$

onde agora $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}_{\text{CM}}$ salienta que o tensor de inércia é obtido em relação ao centro de massa.

O resultado (3.29c) mostra que quando a origem do referencial do corpo situa-se sobre o centro de massa do mesmo, a energia cinética total é dividida em um termo translacional, que leva em conta o movimento do centro de massa em relação a S' , mais um termo rotacional, que leva em conta a rotação instantânea do corpo sobre o eixo \hat{n} , o qual passa pelo centro de massa. Este resultado é um caso particular da expressão (1.9), específica para um corpo rígido.

Cada uma das expressões (3.29a-c) pode ser empregada, dependendo do corpo, das forças externas aplicadas, bem como dos vínculos impostos ao mesmo.

3.8.2 A ENERGIA POTENCIAL

De acordo com o resultado (1.14), a energia potencial total de um sistema de partículas pode ser escrito como

$$U(\{\mathbf{r}_k\}, \{\dot{\mathbf{r}}_k\}) = U^{(\text{ext})}(\{\mathbf{r}_k\}, \{\dot{\mathbf{r}}_k\}) + \sum_{\substack{k, \ell \\ k < \ell}} U(\mathbf{r}_{k\ell}) \doteq U^{(\text{ext})} + U^{(\text{int})},$$

onde $U^{(\text{ext})}$ é a energia potencial externa, devida ao movimento das partículas do sistema em um campo de forças externas ao mesmo, e $U^{(\text{int})}$ é a energia potencial interna, *i. e.*, devida às interações entre as partículas do sistema. Como em um corpo rígido as posições relativas das partículas são sempre constantes por hipótese, a energia potencial interna também permanece constante durante a evolução dinâmica do corpo e é, por conseguinte, usualmente ignorada na construção da Lagrangiana.

Assim, somente a energia potencial $U^{(\text{ext})}$, devida às forças externas potenciais, que são computadas nas equações de Euler-Lagrange de um corpo rígido. Para esta, é usualmente assumido ser possível expressá-la como a soma de dois termos:

$$U^{(\text{ext})} = U_{\text{CM}}(\mathbf{R}') + U_{\text{rot}}(\mathbf{R}), \quad (3.30a)$$

sendo $U_{\text{CM}}(\mathbf{R}')$ a parte que depende da posição do centro de massa do corpo e $U_{\text{rot}}(\mathbf{R})$ a parte que depende da orientação instantânea do mesmo (determinada pela matriz de rotação \mathbf{R}) em relação ao campo de forças externas.

Uma situação bastante comum onde somente o termo $U_{\text{CM}}(\mathbf{R}')$ existe ocorre quando se deseja descrever o movimento de um corpo rígido devido ao seu peso. Neste caso é fácil verificar que a expressão (3.30a) realmente fornece a energia potencial total do corpo. De acordo com a figura 3.15, se o eixo x'_3 está orientado verticalmente e se é tomado $U_g(x'_3 = 0) = 0$,

$$U_g = \sum_k m_k g x'_{k,3} = \left(\sum_k m_k x'_{k,3} \right) g \implies U_g = U_{\text{CM}}(\mathbf{R}'_3) = MgR'_3. \quad (3.30b)$$

Ou seja, a energia potencial gravitacional do corpo rígido é idêntica ao potencial de uma partícula com a massa total do corpo, situada na posição do seu centro de massa.

Em certas situações, além dos termos de energias cinética e potencial discutidos nesta seção, pode ser também necessário incluir na Lagrangiana do corpo rígido termos adicionais. Esses termos podem se referir, por exemplo, às ações de forças generalizadas dissipativas e/ou motorizadas que também atuam sobre o corpo. Isto pode ser imprescindível se o corpo rígido estiver se deslocando no interior de um fluido viscoso, por exemplo, em cuja situação surgirão diversas forças relacionadas com a geometria do corpo e seu movimento de rotação. Nestes casos, as equações de Euler-Lagrange devem ser modificadas conforme a discussão realizada na seção 1.7.2.

Usualmente, a construção da Lagrangiana de um corpo rígido deve levar em conta também os vínculos impostos sobre o mesmo. A natureza desses vínculos depende do problema em estudo, mas existe um tipo de vínculo muito comum que ocorre quando o movimento do corpo envolve o contato com uma superfície. Este vínculo será discutido agora.

3.8.3 A CONDIÇÃO DE ROLAMENTO

Sempre que um corpo rígido se desloca em contato com alguma superfície (também rígida), o rolamento do corpo pode ocorrer devido às forças de atrito entre os objetos. Esta situação está ilustrada na figura 3.16.

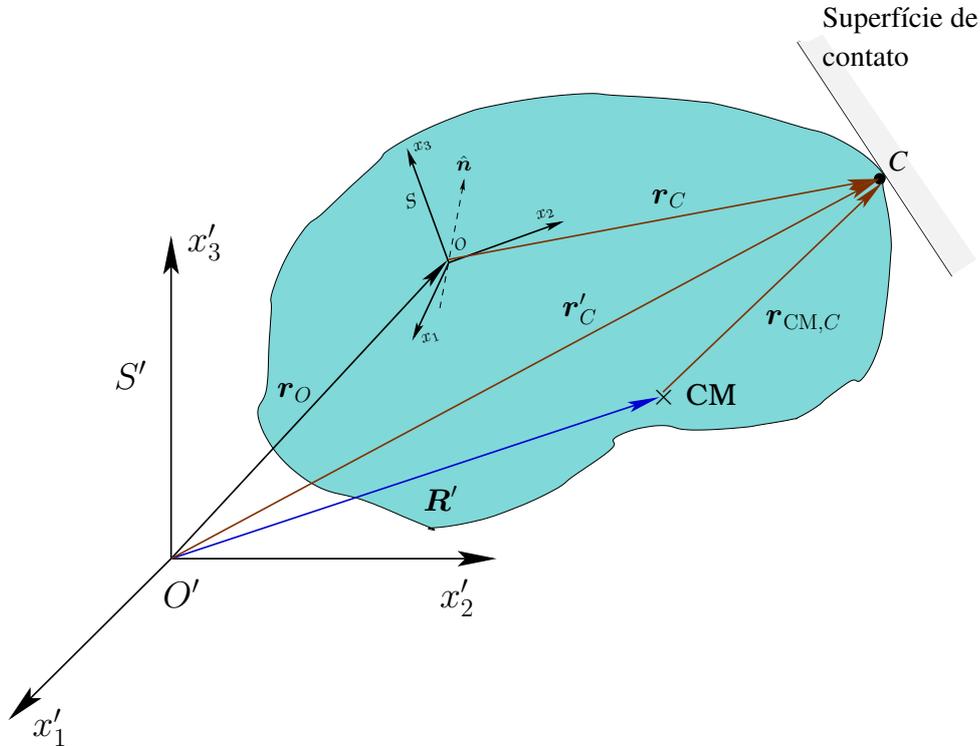


Figura 3.16: Representação de um corpo rígido que se desloca em contato com uma superfície. O ponto C está instantaneamente em repouso em relação à superfície e ao referencial fixo S' .

A dinâmica de um corpo rígido que está em contato com uma superfície áspera será discutida a partir das seguintes suposições:

1. Não ocorrem deformações nem do corpo nem da superfície, mesmo que existam forças de contato.
2. A superfície de contato está em repouso em relação ao referencial inercial S' .
3. Existe pelo menos um ponto do corpo rígido que está sempre em contato com a superfície.
4. No ponto de contato (C) ocorre a condição de *rolamento sem deslizamento*, isto é, o ponto C está instantaneamente em repouso sobre a superfície e, portanto, também em relação a S' .
A razão física para o rolamento está na força de atrito estático entre o corpo e a superfície.

Com base nas condições acima impostas e na inspeção das quantidades definidas na figura 3.16, a seguinte relação pode ser estabelecida,

$$\mathbf{r}'_C = \mathbf{r}_O + \mathbf{r}_C = \mathbf{R}' + \mathbf{r}_{CM,C}.$$

A taxa de variação temporal de \mathbf{r}'_C , medida a partir de S' , fica então

$$\dot{\mathbf{r}}'_C = \mathbf{v}_O + \dot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{V}' + \dot{\mathbf{r}}_{CM,C}.$$

Substituindo as expressões para $\dot{\mathbf{r}}_C$ e $\dot{\mathbf{r}}_{CM,C}$ que resultam a partir da aplicação do operador (3.13), *i. e.*, $\dot{\mathbf{r}}_C = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C$ e $\dot{\mathbf{r}}_{CM,C} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CM,C}$, sendo que esta última se deve ao fato de que o ponto C está em repouso também em relação a CM e da unicidade da velocidade angular (seção 3.2.3.2), resulta

$$\dot{\mathbf{r}}'_C = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C = \mathbf{V}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CM,C}.$$

Porém, como o ponto C está em repouso em relação a S' , impõe-se $\dot{r}'_C = 0$, resultando então duas condições equivalentes

$$v_O + \omega \times r_C = 0, \text{ ou } \mathbf{V}' + \omega \times r_{CM,C} = 0. \quad (3.31)$$

Em certos casos simples, a condição de rolamento (3.31) resulta em um vínculo holônomo. Este é o caso, por exemplo, do cilindro rolando sobre um plano inclinado, abordado no exercício 1.4. Porém, geralmente a condição de rolamento resulta em um vínculo não holônomo. Felizmente, os vínculos são lineares nas velocidades, o que permite o uso do método desenvolvido na seção 1.8.4.

Serão apresentados agora alguns exemplos de aplicação do formalismo desenvolvido nesta seção.

Exemplo 3.3 (O “iô-iô”). Uma corda é presa ao teto e enrolada em torno de um cilindro homogêneo de raio R e massa M . No instante $t = 0$ o cilindro é liberado e passa a cair sob a ação da força da gravidade e da tensão da corda, a qual provoca a rotação do disco do cilindro. Esta situação está representada na figura 3.17.

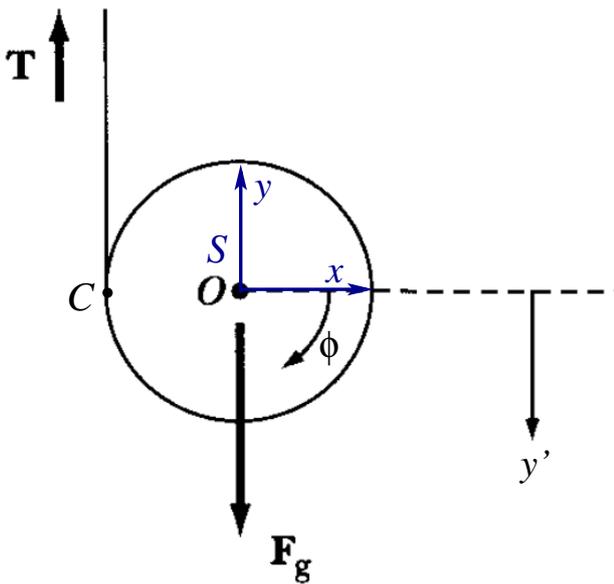


Figura 3.17: Uma corda presa ao teto e enrolada em torno do cilindro cria uma força de tensão que provoca a rotação do disco do cilindro à medida que o mesmo cai sob a ação da gravidade.

A resolução da dinâmica deste corpo inicia pelo cálculo da sua matriz de inércia. O referencial de corpo mais adequado para este sistema está representado na figura 3.17. O referencial S tem sua origem no centro geométrico do cilindro (o centro de massa), com o eixo z orientado ao longo do eixo do cilindro. Neste caso, z é um eixo de simetria e, de acordo com o Lema 3.2, o eixo z é um dos eixos principais de inércia. Além disso, os eixos x e y também são eixos principais e os seus momentos de inércia são os mesmos. Portanto, a matriz de inércia em relação a S é diagonal e para o cálculo de seus momentos principais é conveniente o emprego de um sistema de coordenadas cilíndrico (r, ϕ, z) . Neste caso, assumindo que a espessura do cilindro é h ($\ll R$), sua densidade é $\rho = M/\pi R^2 h$, e de (3.19b) resulta

$$I_x = I_y = \int_V d^3r (y^2 + z^2) \rho = \rho \int_0^R dr r \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-h/2}^{h/2} dz (r^2 \sin^2 \phi + z^2) = \frac{1}{4} M \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right) \approx \frac{1}{4} MR^2$$

$$I_z = \int_V d^3r (x^2 + y^2) \rho(r) = \rho \int_0^R dr r \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-h/2}^{h/2} dz r^2 = \frac{1}{2} MR^2,$$

sendo que o valor aproximado para I_x é adotado porque $h \ll R$. Portanto, a matriz de inércia é

$$I = \frac{1}{4} MR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para a construção da Lagrangiana deste sistema, parte-se da expressão (3.29c) para a sua energia cinética total. Para a determinação da parte rotacional, observa-se que enquanto o iô-iô

está caindo, o eixo de rotação do disco está sempre na direção e sentido $\hat{e}_n = -\hat{z}$ (com $z' = z$); ou seja, $\boldsymbol{\omega} = -\dot{\phi}\hat{z}$. Portanto,

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \overset{\leftrightarrow}{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} \omega_i \omega_j = \dot{\phi}^2 \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} \delta_{i3} \delta_{j3} = I_z \dot{\phi}^2 \implies T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_z \dot{\phi}^2.$$

Além disso, a velocidade do centro de massa do disco é $\mathbf{V}' = \dot{y}'\hat{y}'$. Assim, a energia cinética total do sistema é

$$T = \frac{1}{2} M \dot{y}'^2 + \frac{1}{2} I_z \dot{\phi}^2.$$

Já para a energia potencial, esta será somente a energia potencial gravitacional, que pode ser escrita como

$$U = -Mgy'.$$

Contudo, existe um vínculo holônomo entre y' e ϕ . Este vínculo pode ser construído de duas maneiras equivalentes. Primeiro, como a corda está sempre em repouso em relação a S' , então o ponto C ilustrado na figura 3.17 também está momentaneamente em repouso, o que permite o emprego da condição de rolamento (3.31), a qual fornece

$$\mathbf{V}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\text{CM},C} = 0 \implies \dot{y}'\hat{y}' + (-\dot{\phi}\hat{z}) \times (-R\hat{x}) \xrightarrow{\hat{y}=-\hat{y}'} \dot{y}' - R\dot{\phi} = 0 \implies y' - R\phi = 0,$$

sendo que a última expressão foi obtida após uma integração. A segunda dedução parte do fato de que quando o disco gira por um ângulo $\Delta\phi$, a extensão do arco compreendido na sua borda é simplesmente a distância percorrida durante a sua queda; ou seja, $R\Delta\phi = \Delta y'$, o que leva à mesma expressão para o vínculo.

Assim, a Lagrangiana do sistema pode ser escrita como

$$L\{y', \dot{y}'\} = \frac{1}{2} \left(M + \frac{I_z}{R^2} \right) \dot{y}'^2 + Mgy' = \frac{3}{4} M \dot{y}'^2 + Mgy'.$$

A equação de Euler-Lagrange e a equação de movimento são:

$$\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}'} = 0 \implies Mg - \frac{3}{2} M \ddot{y}' = 0 \implies \ddot{y}' = \frac{2}{3} g.$$

Ou seja, o centro de massa do disco cai com $2/3$ da aceleração da gravidade.

Usando o vínculo, resulta que

$$\ddot{\phi} = \frac{2}{3} \frac{g}{R}.$$

De acordo com (3.20c), o vetor *momentum* angular do disco é

$$\mathbf{L} = \overset{\leftrightarrow}{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = -\dot{\phi} \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} \hat{e}_i (\hat{e}_j \cdot \hat{e}_3) = -\dot{\phi} \sum_{i=1}^3 I_{iz} \hat{e}_i = -I_z \dot{\phi} \hat{z}.$$

Portanto, de acordo com (3.17), uma vez que o torque sobre o disco é provocado pela força de tensão da corda,

$$\mathbf{N}^{(e)} = \mathbf{r}_{\text{CM},C} \times \mathbf{T} = -RT\hat{x} \times \hat{y} = -RT\hat{z}.$$

Então, a tensão da corda resulta

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}^{(e)} \implies -I_z \ddot{\phi} \hat{z} = -RT\hat{z} \implies T = \frac{1}{3} Mg.$$

Exemplo 3.4 (O pêndulo físico). Um pêndulo físico é um corpo rígido que oscila devido ao seu próprio peso em torno de um eixo horizontal que não passa pelo centro de massa do corpo, como ilustrado na figura 3.18.

A Lagrangiana deste problema é construída da seguinte maneira. Colocando-se a origem do referencial do corpo em O e orientando o eixo z , por exemplo, ao longo da reta \overline{OCM} , o mesmo ponto O é a origem do referencial fixo e o eixo z' está orientado ao longo da reta vertical. Neste caso, a energia cinética do corpo é dada por (3.29a),

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \overset{\leftrightarrow}{I} \cdot \boldsymbol{\omega},$$

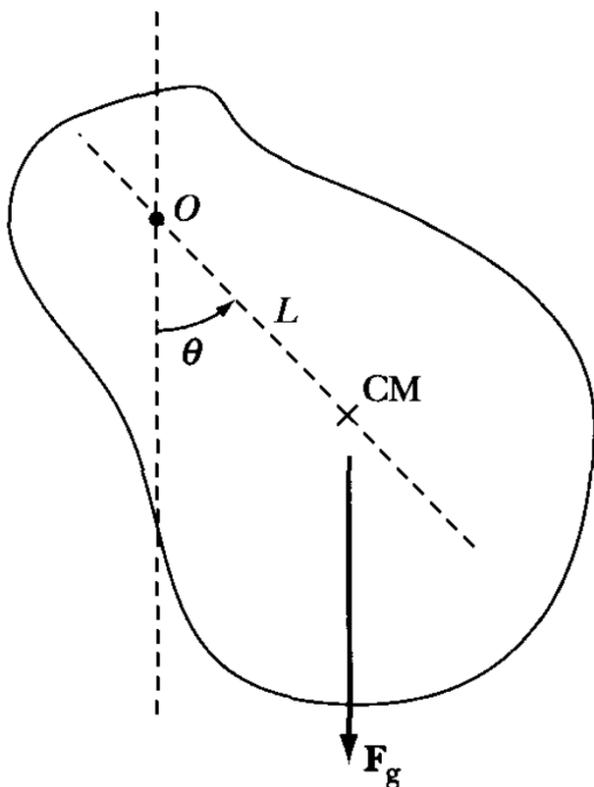


Figura 3.18: Um pêndulo físico. O corpo rígido oscila em torno de um eixo que passa por O devido à força gravitacional que atua sobre o seu centro de massa.

uma vez que $v_O = 0$; ou seja, a energia cinética é puramente rotacional, como esperado de um corpo rígido que gira com um ponto fixo. Se os referenciais forem orientados de tal forma que $\hat{e}_n = \hat{x} = \hat{x}'$, então $\omega = \dot{\theta}\hat{x}$ e

$$T = \frac{1}{2} I_{xx} \dot{\theta}^2.$$

Portanto, basta conhecer um componente do tensor de inércia do corpo.

A energia potencial gravitacional pode ser escrita, de acordo com (3.30b), como

$$U_g = -MgZ'.$$

Mas existe um vínculo evidente:

$$Z' = L \cos \theta.$$

Portanto, a Lagrangiana do pêndulo físico é simplesmente

$$L \{ \theta, \dot{\theta} \} = \frac{1}{2} I_{xx} \dot{\theta}^2 + MgL \cos \theta,$$

a qual é muito semelhante à Lagrangiana de um pêndulo plano (exemplo 1.14).

A equação de Euler-Lagrange e a equação de movimento ficam então

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \implies \ddot{\theta} + \frac{MgL}{I_{xx}} \sin \theta = 0.$$

A frequência angular para oscilações de pequena amplitude é, portanto,

$$\Omega^2 = \frac{MgL}{I_{xx}}.$$

Exemplo 3.5 (Pêndulo duplo semifísico). Um corpo rígido é preso em um ponto de sua superfície a uma barra fina, leve e rígida, de tal forma que o corpo pode oscilar em torno deste ponto como um pêndulo. A outra extremidade da barra é então presa a um ponto fixo, de tal forma que a mesma também pode oscilar como um pêndulo. Esta situação está ilustrada na figura 3.19.

Na figura estão representados o referencial do corpo (eixos x e y) e o referencial fixo (eixos x' e y'). Por conveniência, é assumido que o vetor \mathbf{R} está no plano $x - y$, *i. e.*, $\mathbf{R} = (\bar{x}, \bar{y})$, e as oscilações ocorrem sempre nos planos ilustrados; ou seja, $\omega = \dot{\phi}\hat{z}$.

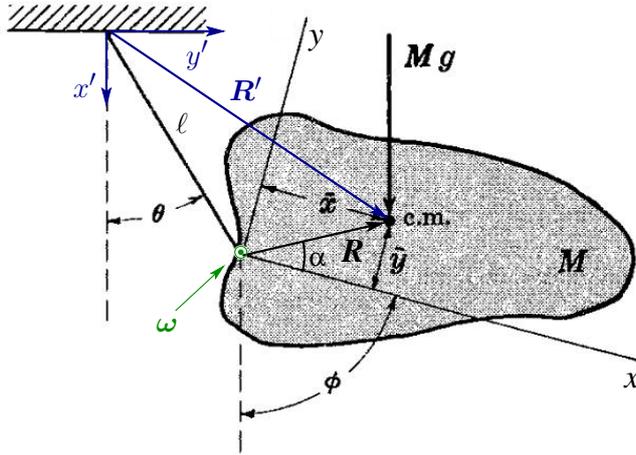


Figura 3.19: Um pêndulo duplo semifísico. O corpo rígido oscila em torno de um eixo que o conecta a uma barra leve e rígida. A outra extremidade da barra é conectada a um ponto fixo e também pode oscilar como um pêndulo.

De acordo com os referenciais adotados, a expressão mais conveniente para a energia cinética total do corpo é (3.29b),

$$T = \frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \overset{\leftrightarrow}{I}_O \cdot \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}M(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})^2,$$

sendo $\mathbf{V}' = (\dot{X}', \dot{Y}')$ a velocidade do centro de massa.

Para a determinação dos vínculos, observa-se na figura que

$$\begin{cases} \hat{x}' = \cos \phi \hat{x} - \sin \phi \hat{y} \\ \hat{y}' = \sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \end{cases} \implies \begin{cases} \hat{x} = \cos \phi \hat{x}' + \sin \phi \hat{y}' \\ \hat{y} = -\sin \phi \hat{x}' + \cos \phi \hat{y}' \end{cases}$$

Então,

$$\mathbf{R} = \bar{x}\hat{x} + \bar{y}\hat{y} = (\bar{x} \cos \phi - \bar{y} \sin \phi) \hat{x}' + (\bar{x} \sin \phi + \bar{y} \cos \phi) \hat{y}' = R [\cos(\alpha + \phi) \hat{x}' + \sin(\alpha + \phi) \hat{y}'].$$

Dado também

$$\mathbf{r}_O = x'_O \hat{x}' + y'_O \hat{y}' = l \cos \theta \hat{x}' + l \sin \theta \hat{y}',$$

observa-se que

$$\mathbf{R}' = \mathbf{r}_O + \mathbf{R} = (l \cos \theta + \bar{x} \cos \phi - \bar{y} \sin \phi) \hat{x}' + (l \sin \theta + \bar{x} \sin \phi + \bar{y} \cos \phi) \hat{y}'.$$

Portanto,

$$\begin{cases} X' = l \cos \theta + R \cos(\phi + \alpha) \\ Y' = l \sin \theta + R \sin(\phi + \alpha) \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{X}' = -l \sin \theta \dot{\theta} - R \sin(\phi + \alpha) \dot{\phi} \\ \dot{Y}' = l \cos \theta \dot{\theta} + R \cos(\phi + \alpha) \dot{\phi} \end{cases}$$

$$V'^2 = \dot{X}'^2 + \dot{Y}'^2 = l^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \dot{\phi}^2 + 2lR \cos(\theta - \phi - \alpha) \dot{\theta} \dot{\phi}.$$

Finalmente,

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} = \dot{\phi} \hat{z} \times (\bar{x}\hat{x} + \bar{y}\hat{y}) = \dot{\phi} (\bar{x}\hat{y} - \bar{y}\hat{x}) \implies (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})^2 = R^2 \dot{\phi}^2,$$

e

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \overset{\leftrightarrow}{I}_O \cdot \boldsymbol{\omega} = I \dot{\phi}^2,$$

onde $I = (I_O)_{zz}$.

Portanto,

$$T = \frac{1}{2}M \left\{ l^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \dot{\phi}^2 + 2l[\bar{x} \cos(\theta - \phi) + \bar{y} \sin(\theta - \phi)] \dot{\theta} \dot{\phi} \right\} + \frac{1}{2}I \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}MR^2 \dot{\phi}^2,$$

$$T = \frac{1}{2}Ml^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I \dot{\phi}^2 + MlR \cos(\theta - \phi - \alpha) \dot{\theta} \dot{\phi}.$$

Já para a energia potencial, a expressão (3.30b) resulta em

$$U_g = -MgX' \implies U_g = -Mg[l \cos \theta + R \cos(\phi + \alpha)].$$

Portanto, a Lagrangiana do sistema é

$$L = \frac{1}{2}M\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 + M\ell R \cos(\theta - \phi - \alpha)\dot{\theta}\dot{\phi} + Mg[\ell \cos\theta + R \cos(\phi + \alpha)],$$

e as equações de movimento ficam

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ell\ddot{\theta} + R \cos(\theta - \phi - \alpha)\ddot{\phi} + R \sin(\theta - \phi - \alpha)\dot{\phi}^2 + g \sin\theta = 0 \\ I\ddot{\phi} + M\ell R \cos(\theta - \phi - \alpha)\ddot{\theta} - M\ell R \sin(\theta - \phi - \alpha)\dot{\theta}^2 + MgR \sin(\phi + \alpha) = 0. \end{cases}$$

Estas equações se assemelham às equações de movimento do pêndulo duplo (1.43). Dentre os casos particulares, ressaltam-se:

1. Condição de equilíbrio: $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$, resultando em

$$\theta_0 = 0, \quad \phi_0 = -\alpha.$$

2. Caso $\ell = \alpha = 0$, resultando em

$$I\ddot{\phi} + MgR \sin\phi = 0,$$

a qual é a equação de movimento de um pêndulo físico.

3.9 OS ÂNGULOS DE EULER

Ao longo da seção 3.1 discutiu-se longamente a respeito da matriz de rotação que relaciona as observações feitas em um determinado instante de tempo entre o referencial do corpo S e o referencial inercial S'' . Dentre as propriedades desta matriz, destacou-se que existem somente três parâmetros (três ângulos) livres que determinam todos os seus elementos. Embora existam infinitas maneiras de se definir esses ângulos, uma construção que é com frequência empregada no tratamento da dinâmica de corpos rígidos são os *ângulos de Euler*, os quais serão agora discutidos.

Os ângulos de Euler são definidos a partir de uma rotação genérica do sistema de coordenadas que parte de uma orientação inicial (correspondente ao referencial S'') e resulta em uma orientação final (o referencial S), envolvendo um referencial intermediário. Essa transformação será, portanto, construída em três etapas, as quais estão ilustradas na figura 3.20.

Partindo de um sistema de coordenadas inicial, o qual corresponde ao referencial S' da figura 3.20(a), as rotações envolvidas são as seguintes.

1. ROTAÇÃO EM TORNO DO EIXO x'_3 . Empregando a notação matricial introduzida na seção 3.1.1, dados os vetores de base de S' : $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$ e as coordenadas $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$, a primeira rotação irá promover a transformação $S' \rightarrow S''$, a qual consiste na rotação por um ângulo ϕ , no sentido anti-horário, em torno do eixo x'_3 . Ou seja, de (3.4a),

$$\hat{e}'' = R_\phi \hat{e}', \quad r'' = R_\phi r',$$

onde $\{\hat{e}''_1, \hat{e}''_2, \hat{e}''_3\}$ são os vetores da base de S'' e $\{x''_1, x''_2, x''_3\}$ suas coordenadas. A matriz R_ϕ é dada por (3.9),

$$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (0 \leq \phi < 2\pi).$$

Esta rotação está representada na figura 3.20(a).

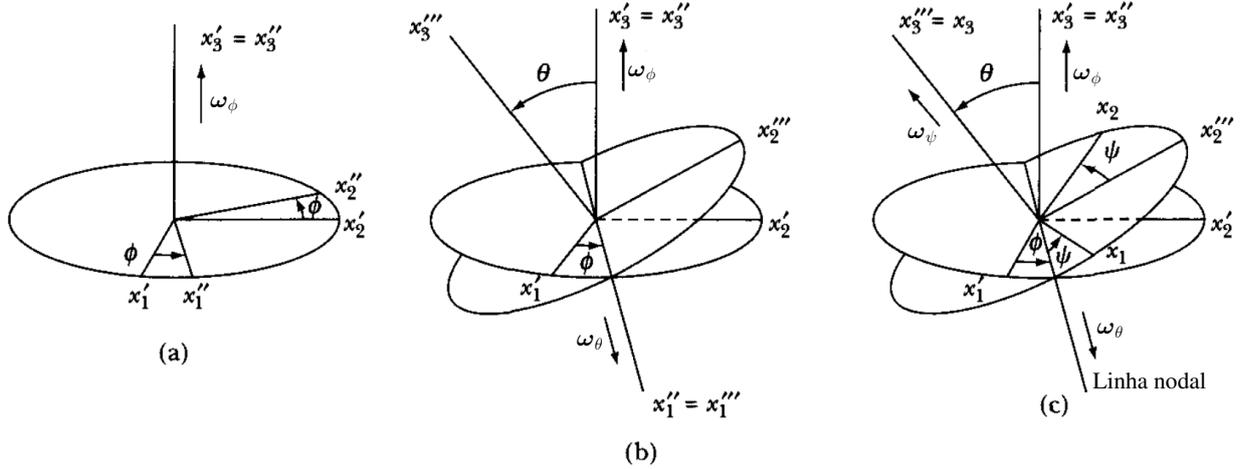


Figura 3.20: Os ângulos de Euler, empregados para implementar uma rotação do referencial S' ao referencial S . (a) Primeira rotação: sentido anti-horário por um ângulo ϕ em torno do eixo x_3'' . (b) Segunda rotação: sentido anti-horário por um ângulo θ em torno do eixo x_1'' . (c) Terceira rotação: sentido anti-horário por um ângulo ψ em torno de $x_3''' = x_3$. Observam-se também as velocidades angulares ω_ϕ , ω_θ e ω_ψ .

2. ROTAÇÃO EM TORNO DO EIXO x_1'' . Realiza-se agora a transformação $S'' \rightarrow S'''$ por intermédio de uma rotação, no sentido anti-horário, por um ângulo θ em torno do eixo x_1'' . Ou seja, de (3.4a) e (3.9),

$$\hat{e}''' = R_\theta \hat{e}'', \quad r''' = R_\theta r'', \quad \text{sendo}$$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (0 \leq \theta \leq \pi),$$

onde $\{\hat{e}_1''', \hat{e}_2''', \hat{e}_3'''\}$ são os vetores da base de S''' e $\{x_1''', x_2''', x_3'''\}$ suas coordenadas. Esta rotação está representada na figura 3.20(b).

3. ROTAÇÃO EM TORNO DO EIXO x_3''' . Por fim, realiza-se a transformação $S''' \rightarrow S$, implementada por uma rotação, no sentido anti-horário, por um ângulo ψ em torno do eixo x_3''' . De (3.4a) e (3.9), resulta então

$$\hat{e} = R_\psi \hat{e}''', \quad r = R_\psi r''', \quad \text{sendo}$$

$$R_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (0 \leq \psi < 2\pi),$$

onde $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ são os vetores da base de S e $\{x_1, x_2, x_3\}$ suas coordenadas. Esta rotação está representada na figura 3.20(c).

Nas figuras 3.20(b) e (c) observa-se também a *linha nodal*, ou *linha dos nodos*, a qual corresponde a uma reta comum aos planos $x_1' - x_2'$ e $x_1 - x_2$.

A construção dos ângulos de Euler pode ser interpretada como uma rotação genérica na qual um dos ângulos (ϕ) pertence ao referencial inercial (S'), outro ângulo (ψ) pertence ao referencial do corpo (S), enquanto que o terceiro ângulo (θ) varia entre ambos os referenciais.

A transformação completa $S' \rightarrow S$ é realizada, portanto, por

$$\hat{e} = R_{\text{Euler}} \hat{e}', \quad r = R_{\text{Euler}} r', \tag{3.32a}$$

sendo que

$$R_{\text{Euler}} = R_\psi R_\theta R_\phi.$$

Os elementos da matriz R_{Euler} são:

$$\begin{aligned}
 R_{11} &= \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & R_{21} &= -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi \\
 R_{12} &= \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & R_{22} &= -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi \\
 R_{13} &= \sin \psi \sin \theta & R_{23} &= \cos \psi \sin \theta \\
 & & R_{31} &= \sin \theta \sin \phi \\
 & & R_{32} &= -\sin \theta \cos \phi \\
 & & R_{33} &= \cos \theta.
 \end{aligned} \tag{3.32b}$$

A transformação inversa $S \rightarrow S'$ é dada então por

$$\hat{e}' = \tilde{R}_{\text{Euler}} \hat{e}, \quad r' = \tilde{R}_{\text{Euler}} r, \quad \text{sendo } \tilde{R}_{\text{Euler}} = \tilde{R}_\phi \tilde{R}_\theta \tilde{R}_\psi. \tag{3.32c}$$

Exercício 3.4. (a) Dados os ângulos de Euler definidos acima, encontre a nova orientação do sistema de coordenadas após serem realizadas as rotações $\phi = 0$, $\theta = 45^\circ$ e $\psi = 90^\circ$.

(b) Encontre a nova orientação invertendo as rotações, i. e., $\theta \leftrightarrow \psi$.

Resolução. (a) Neste caso, $R_\phi = I_3$ e

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad R_\psi = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -1 & 00 \\ 0 & 01 \end{pmatrix}.$$

Então, os novos vetores de base são:

$$\begin{aligned}
 \hat{e} &= R_\psi R_\theta \hat{e}', \\
 \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix} &= R_\psi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}'_1 \\ \hat{e}'_2 \\ \hat{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -1 & 00 \\ 0 & 01 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}'_1 \\ 1/\sqrt{2} \hat{e}'_2 + 1/\sqrt{2} \hat{e}'_3 \\ -1/\sqrt{2} \hat{e}'_2 + 1/\sqrt{2} \hat{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \hat{e}'_2 + 1/\sqrt{2} \hat{e}'_3 \\ -\hat{e}'_1 \\ -1/\sqrt{2} \hat{e}'_2 + 1/\sqrt{2} \hat{e}'_3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e}'_2 + \hat{e}'_3), \quad \hat{e}_2 = -\hat{e}'_1, \quad \hat{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\hat{e}'_2 + \hat{e}'_3).$$

Os referenciais S' (inicial) e S (final) estão representados na figura 3.21.

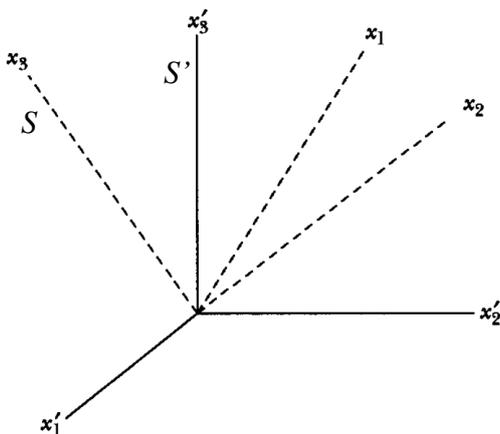


Figura 3.21: Referencial inicial (S') e referencial final (S) após realizadas as rotações pelos ângulos de Euler $\theta = 45^\circ$ e $\psi = 90^\circ$.

(b) Invertendo a ordem das rotações, resulta

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -1 & 00 \\ 0 & 01 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}'_1 \\ \hat{e}'_2 \\ \hat{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}'_2 \\ -\hat{e}'_1 \\ \hat{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{e}'_2 \\ -1/\sqrt{2} \hat{e}'_1 + 1/\sqrt{2} \hat{e}'_3 \\ 1/\sqrt{2} \hat{e}'_1 + 1/\sqrt{2} \hat{e}'_3 \end{pmatrix}.$$

A nova orientação é bastante distinta da rotação anterior.

3.9.1 VELOCIDADE ANGULAR EM TERMOS DOS ÂNGULOS DE EULER

Uma quantidade adicional, cuja dedução se faz necessária, é a expressão do vetor velocidade angular em termos dos ângulos de Euler. Esta quantidade é necessária quando a Lagrangiana do corpo é construída empregando-se os ângulos de Euler.

Conforme foi definido em (3.14), a direção e o sentido de ω são determinados pela orientação do eixo de rotação instantânea (vetor \hat{e}_n) do corpo. Na construção dos ângulos de Euler, essa rotação instantânea é composta por três rotações simultâneas, como ilustrado na figura 3.20. Isto implica que a velocidade angular total é a resultante da combinação de três vetores, ω_ϕ , ω_θ e ω_ψ , definidos de tal forma que:

$$\begin{aligned}\omega_\phi &: \text{taxa de variação temporal de } \phi \text{ em torno de } x'_3, \\ \omega_\theta &: \text{taxa de variação temporal de } \theta \text{ em torno de } x''_1, \\ \omega_\psi &: \text{taxa de variação temporal de } \psi \text{ em torno de } x'''_3.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\omega_\phi = \dot{\phi} \hat{e}'_3, \quad \omega_\theta = \dot{\theta} \hat{e}''_1, \quad \omega_\psi = \dot{\psi} \hat{e}'''_3.$$

Mas,

$$\begin{aligned}\hat{e}'' &= R_\phi \hat{e}' \implies \hat{e}''_1 = \sum_{j=1}^3 (R_\phi)_{1j} \hat{e}'_j = \cos \phi \hat{e}'_1 + \text{sen } \phi \hat{e}'_2 \\ \begin{cases} \hat{e}''' = R_\theta \hat{e}'' \\ \hat{e}'' = R_\phi \hat{e}' \end{cases} \implies \hat{e}'''_3 = \sum_{j=1}^3 (R_\theta)_{3j} \hat{e}''_j = -\text{sen } \theta \hat{e}''_2 + \cos \theta \hat{e}''_3 \\ &= \text{sen } \theta \text{sen } \phi \hat{e}'_1 - \text{sen } \theta \cos \phi \hat{e}'_2 + \cos \theta \hat{e}'_3.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\omega_\phi = \dot{\phi} \hat{e}'_3, \quad \omega_\theta = \dot{\theta} \cos \phi \hat{e}'_1 + \dot{\theta} \text{sen } \phi \hat{e}'_2, \quad \omega_\psi = \dot{\psi} \text{sen } \theta \text{sen } \phi \hat{e}'_1 - \dot{\psi} \text{sen } \theta \cos \phi \hat{e}'_2 + \dot{\psi} \cos \theta \hat{e}'_3.$$

Como a velocidade angular total é a composição destes vetores,

$$\omega = \omega_\phi + \omega_\theta + \omega_\psi,$$

resulta então que

$$\omega = \left(\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \text{sen } \theta \text{sen } \phi \right) \hat{e}'_1 + \left(\dot{\theta} \text{sen } \phi - \dot{\psi} \text{sen } \theta \cos \phi \right) \hat{e}'_2 + \left(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \right) \hat{e}'_3 \quad (3.33a)$$

é o vetor velocidade angular com componentes medidos pelo referencial fixo S' .

Realizando a transformação inversa $S \rightarrow S'$, obtém-se

$$\omega = \left(\dot{\phi} \text{sen } \theta \text{sen } \psi + \dot{\theta} \cos \psi \right) \hat{e}_1 + \left(\dot{\phi} \text{sen } \theta \cos \psi - \dot{\theta} \text{sen } \psi \right) \hat{e}_2 + \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right) \hat{e}_3, \quad (3.33b)$$

a qual é a velocidade angular com componentes medidos no referencial S .

3.9.2 INTEGRABILIDADE DA VELOCIDADE ANGULAR

No caso do movimento genérico de um corpo rígido, quando mais de um ângulo de Euler estiver variando em consequência das equações de movimento, o vetor velocidade angular não é integrável, ou seja, a velocidade angular não pode ser escrita em termos da derivada temporal de uma função destes ângulos.

Para demonstrar este fato, assume-se inicialmente que

$$\omega = \frac{d}{dt} \Lambda(\phi, \theta, \psi),$$

sendo $\Lambda(\phi, \theta, \psi)$ uma função dos ângulos de Euler. Se ω for integrável, pode-se empregar as suas coordenadas, por exemplo, no referencial do espaço, dadas por (3.33a), e escrever

$$\omega'_i = \frac{d}{dt} \Lambda'_i(\phi, \theta, \psi) = \frac{\partial \Lambda'_i}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial \Lambda'_i}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \Lambda'_i}{\partial \psi} \dot{\psi}, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Considerando ω'_1 , resulta então que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda'_1}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial \Lambda'_1}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \Lambda'_1}{\partial \psi} \dot{\psi} &= \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi, \text{ ou seja,} \\ \frac{\partial \Lambda'_1}{\partial \phi} &= 0, \quad \frac{\partial \Lambda'_1}{\partial \theta} = \cos \phi, \quad \frac{\partial \Lambda'_1}{\partial \psi} = \sin \theta \sin \phi. \end{aligned}$$

Porém, como $\Lambda'_1(\phi, \theta, \psi)$ deve ser uma função suave em seus argumentos, necessariamente

$$\frac{\partial^2 \Lambda'_1}{\partial \psi \partial \theta} = \frac{\partial^2 \Lambda'_1}{\partial \theta \partial \psi}. \text{ Mas, } \left(\frac{\partial^2 \Lambda'_1}{\partial \psi \partial \theta} = 0 \right) \neq \left(\frac{\partial^2 \Lambda'_1}{\partial \theta \partial \psi} = \cos \theta \sin \phi \right).$$

Portanto, em geral a velocidade angular não é integrável. Como uma consequência importante, os vínculos envolvendo componentes de ω serão, em geral, não holônomos.

3.10 O PIÃO SIMÉTRICO COM UM PONTO FIXO

O pião simétrico é um dos problemas mais tradicionais na dinâmica dos corpos rígidos, o qual foi resolvido pela primeira vez por Joseph-Louis Lagrange em seu tratado *Mécanique Analytique*.

Um pião simétrico é um corpo rígido qualquer para o qual $I_1 = I_2$, sendo essas quantidades os seus momentos principais de inércia. Se esse corpo possuir um ponto O , o qual pode ser um ponto fixo na sua dinâmica, então um eixo que passa tanto por este ponto quanto pelo centro de massa será um eixo principal de inércia, bem como dois os dois eixos perpendiculares. A dinâmica do corpo ao girar em torno deste eixo é semelhante ao movimento de um pião com um ponto fixo ou de um giroscópio.

O movimento do pião simétrico será discutido empregando-se o formalismo Lagrangiano. As rotações serão descritas em termos dos ângulos de Euler $\{\phi, \theta, \psi\}$ e suas respectivas velocidades angulares. Para tanto, o referencial fixo (S') e o referencial do corpo (S) terão a mesma origem, ambas no ponto fixo O . O eixo x_3 do corpo é orientado de tal forma que passa pelo centro de massa, ao passo que o eixo x'_3 é orientado verticalmente, conforme pode ser visto na figura 3.22.

Como se observa na figura, com as orientações adotadas para os referenciais, o ângulo θ mede a inclinação do eixo de simetria (eixo x_3) do pião com a vertical (eixo x'_3), enquanto que o ângulo ϕ mede a precessão do eixo x_3 em torno de x'_3 . Finalmente, o ângulo ψ mede a rotação do pião em torno de seu

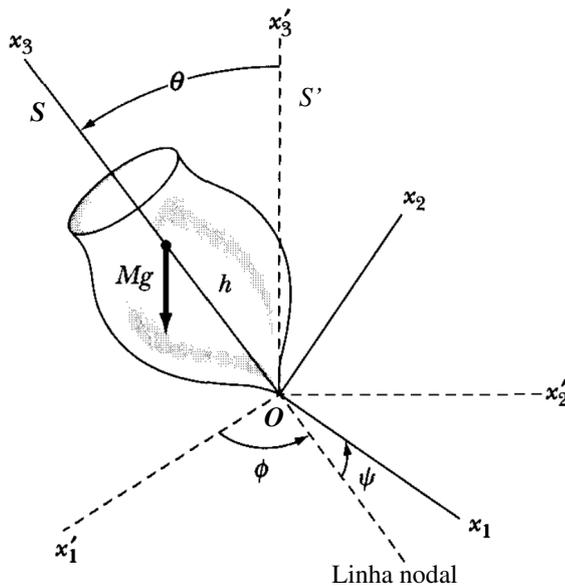


Figura 3.22: Um pião simétrico com massa M e com sua ponta inferior fixa gira em um campo gravitacional. Os ângulos de Euler $\{\phi, \theta, \psi\}$ relacionam os eixos do referencial fixo (S') com o referencial do corpo (S).

eixo de simetria.

A LAGRANGIANA E AS CONSTANTES DE MOVIMENTO

Dadas então as expressões (3.29a), (3.30b) e (3.27), a Lagrangiana do pião simétrico é escrita

$$L = \frac{1}{2} I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 - Mgh \cos \theta,$$

uma vez que $I_2 = I_1$. As componentes da velocidade angular no referencial do corpo são dadas por (3.33b); assim,

$$L \{ \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \dot{\psi} \} = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - Mgh \cos \theta.$$

As variáveis ϕ e ψ são cíclicas ($\partial L / \partial \phi = \partial L / \partial \psi = 0$); portanto, seus momentos conjugados são constantes de movimento, *i. e.*,

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_3 \omega_3 = \text{cte.}, \quad (3.34a)$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta = I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + p_\psi \cos \theta = \text{cte.} \quad (3.34b)$$

Observa-se também que, de acordo com a discussão realizada na seção 1.9.2.3, a função de Jacobi que pode ser obtida desta Lagrangiana é conservada e corresponde à energia total. Ou seja, uma terceira constante de movimento para o pião simétrico é

$$E = T + U = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + Mgh \cos \theta = \text{cte.} \quad (3.34c)$$

A dinâmica do pião simétrico será resolvida abaixo fazendo-se uso destas constantes de movimento. Alternativamente, o problema poderia ser resolvido a partir da equação de Euler-Lagrange para a variável dinâmica restante:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= 0, \\ I_1 \ddot{\theta} - I_1 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \dot{\phi} \sin \theta - Mgh \sin \theta &= 0, \\ I_1 \ddot{\theta} - I_1 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + p_\psi \dot{\phi} \sin \theta - Mgh \sin \theta &= 0. \end{aligned}$$

SOLUÇÃO POR QUADRATURA

Ao invés de se resolver o problema do pião a partir da equação de Euler-Lagrange, a qual é de segunda ordem, a solução será buscada a partir da constante de movimento (3.34c), a qual resulta em uma equação de primeira ordem.

Em primeiro lugar, escreve-se (3.34b) como

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}, \quad (3.35)$$

a qual relaciona $\dot{\phi}$ com o ângulo θ e é válida para $\theta \neq 0$. Usando esta relação e definindo a nova constante

$$E' = E - \frac{p_\psi^2}{2I_3},$$

escreve-se (3.34c) como

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + U_{\text{ef}}(\theta), \quad \text{onde} \\ U_{\text{ef}}(\theta) &\doteq \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + Mgh \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.36a)$$

A função $U_{\text{ef}}(\theta)$ tem dimensão de energia e é denominada *potencial efetivo*. A equação recém obtida é em primeira ordem em θ , como mencionado.

Dessa maneira, se for imposta a condição inicial $\theta_i = \theta(t=0)$ e for assumido que $\dot{\theta}(0) > 0$, a equação tem como solução formal a quadratura

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2}{I_1} [E' - U_{\text{ef}}(\theta)] \implies \int_{\theta_i}^{\theta} \frac{d\theta'}{\sqrt{E' - U_{\text{ef}}(\theta')}} = \sqrt{\frac{2}{I_1}} t. \quad (3.36b)$$

A integral em (3.36b) pode ser formalmente resolvida, o que irá então fornecer $t = t(\theta)$. A inversão desta relação¹² fornece então $\theta = \theta(t)$. Inserindo esta solução em (3.35) e realizando

¹²A inversão ou é analiticamente possível ou pode ser realizada na forma de série de potências

$$\theta(t) = \theta_0 + \theta_1 t + \theta_2 t^2 + \dots,$$

onde $\theta_1, \theta_2, \dots$, são os coeficientes da expansão em série.

uma nova quadratura, obtém-se então $\phi = \phi(t)$. Finalmente, inserindo ambas as soluções em (3.34a) e realizando mais uma quadratura, obtém-se a última solução $\psi = \psi(t)$. Infelizmente, a solução analítica de (3.36b) é difícil de ser obtida, de forma que a análise do movimento do pião será realizada de uma maneira qualitativa abaixo.

ANÁLISE DO POTENCIAL EFETIVO

O comportamento de $\theta(t)$ pode ser analisado a partir das propriedades do potencial efetivo $U_{\text{ef}}(\theta)$. Em primeiro lugar, o intervalo de variação para θ é $0 \leq \theta \leq \pi$. Observa-se claramente em (3.36a) que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0, \pi} U_{\text{ef}}(\theta) \rightarrow +\infty.$$

O menor valor possível para $U_{\text{ef}}(\theta)$ é obtido a partir de

$$\left. \frac{dU_{\text{ef}}}{d\theta} \right|_{\theta_0} = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta_0)(p_\psi - p_\phi \cos \theta_0)}{I_1 \sin^3 \theta_0} - Mgh \sin \theta_0 = 0. \quad (3.37)$$

Definindo $u_0 = \cos \theta_0$, esta equação pode ser escrita como

$$\underbrace{I_1 Mgh (1 - u_0^2)^2}_{f(u)} = \underbrace{(p_\phi - p_\psi u_0)(p_\psi - p_\phi u_0)}_{g(u)},$$

sendo que gráficos das funções $f(u)$ e $g(u)$ são apresentados na figura 3.23(a). As raízes de $f(u)$ são $u = \pm 1$ e $f(u) \geq 0$ sempre. Por outro lado, as raízes de $g(u)$ são

$$u_1 = \frac{p_\phi}{p_\psi} \text{ e } u_2 = \frac{p_\psi}{p_\phi} = \frac{1}{u_1}.$$

Portanto, se $-1 \leq u_1 \leq 1$, a raiz u_2 não pertence a este intervalo e *vice-versa*. No caso $p_\phi p_\psi > 0$ a concavidade de $g(u)$ está para cima e, portanto, as curvas $f(u)$ e $g(u)$ definidas acima garantidamente têm somente uma intersecção em $-1 \leq u \leq 1$, o que fornece o valor de θ_0 .

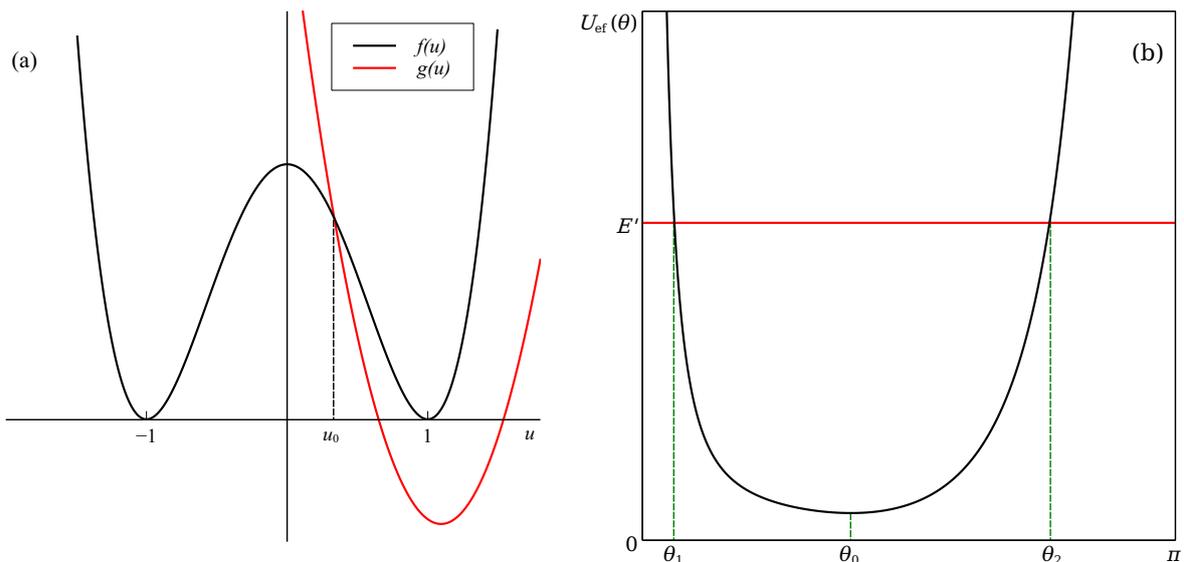


Figura 3.23: (a) Intersecção das curvas $f(u)$ e $g(u)$ para o caso $p_\phi p_\psi > 0$. O ponto $u = u_0$ corresponde ao mínimo de $U_{\text{ef}}(\theta)$. (b) Gráfico do potencial efetivo $U_{\text{ef}}(\theta)$.

A figura 3.23(b) mostra o gráfico do potencial efetivo em função de θ . Estão ressaltados também os ângulos θ_0 (mínimo de U_{ef}) e os valores extremos θ_1 e θ_2 onde $U_{\text{ef}} = E'$ (ou seja, $\dot{\theta} = 0$).

CARACTERÍSTICAS DO MOVIMENTO DO PIÃO SIMÉTRICO

A equação (3.36a) mostra que $\dot{\theta} = 0$ quando $U_{ef} = E'$. Isto ocorre nos ângulos $\theta_1 < \theta_0 < \theta_2$ mostrados na figura 3.23(b). Se para algum $\theta < \theta_2$, $\dot{\theta} > 0$, a inclinação do eixo do pião com a vertical aumenta até chegar a $\theta = \theta_2$. A partir deste momento, o movimento do eixo é invertido ($\dot{\theta} < 0$) e o ângulo diminui até θ_1 , quando então o movimento novamente se repete. Este movimento é denominado uma **nutação** em relação à vertical.

Simultaneamente à nutação, o eixo de rotação do pião executa uma **precessão** em torno do eixo vertical. Esta precessão consiste no movimento da linha nodal mostrada na figura 3.22, o qual ocorre com a velocidade angular dada por (3.35), ou seja,

$$\dot{\phi} = p_\psi \frac{p_\phi/p_\psi - \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}.$$

Desta expressão, resultam as seguintes possibilidades:

$|p_\phi| > |p_\psi|$: Neste caso, $\dot{\phi}$ terá sempre o mesmo sinal, igual ao sinal de p_ϕ . Nesta situação, pode-se visualizar o movimento do pião da seguinte maneira. Imagina-se que a ponta do eixo de rotação mostrado na figura 3.22 traça uma curva sobre a superfície de um esfera centrada no ponto O à medida que ocorrem os movimentos simultâneos de precessão e nutação do pião para $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. No caso $|p_\phi| > |p_\psi|$, a ponta do eixo de rotação traça a curva mostrada na figura 3.24(a).

$|p_\phi| < |p_\psi|$: Neste caso, definindo-se o ângulo auxiliar $\theta' = \cos^{-1}(p_\phi/p_\psi)$, resulta que

$$\dot{\phi} = p_\psi \frac{\cos \theta' - \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}.$$

Nota-se que em (3.37), $U'_{ef}(\theta') = -Mgh \sin \theta' < 0$. De acordo com o gráfico de $U_{ef}(\theta)$ na figura 3.23(b), isto significa que $\theta' < \theta_0$. Há então duas possibilidades:

- (i) $\theta' < \theta_1$: Neste caso, $\dot{\phi}$ também terá sempre o mesmo sinal e o movimento do eixo do pião será novamente a curva mostrada na figura 3.24(a).
- (ii) $\theta' > \theta_1$: Neste caso, $\dot{\phi}$ irá mudar de sinal quando $\theta = \theta'$. O movimento do eixo do pião neste caso está representado na figura 3.24(b).
- (iii) $\theta' = \theta_1$: Neste caso, o ângulo onde $\dot{\phi} = 0$ é exatamente $\theta = \theta_1$. O movimento que ocorre nesta situação está representado na figura 3.24(c).

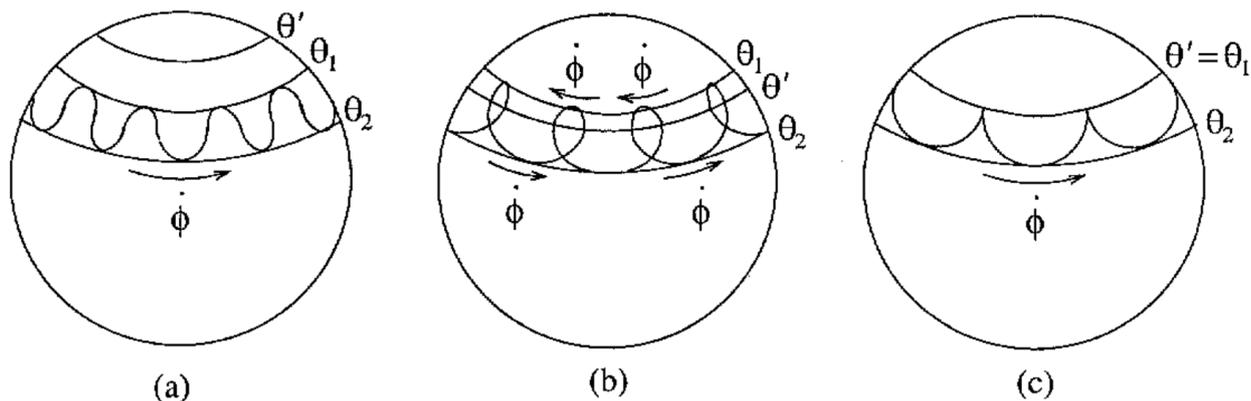


Figura 3.24: Combinações dos movimentos de precessão e nutação. (a) Casos em que $\dot{\phi}$ não muda de sinal e $p_\psi > 0$. (b) Casos em que $\dot{\phi}$ muda de sinal para $\theta_1 < \theta' < \theta_2$. (c) Caso em que $\theta' = \theta_1$.

Uma situação comum onde fatalmente irá ocorrer o tipo de movimento mostrado na figura 3.24(c) ocorre quando as condições iniciais do problema forem: $\dot{\theta}(t=0) = \dot{\phi}(t=0) = 0$ e $\psi(t=0) = \psi_i$. Neste caso, de (3.34a e 3.34b),

$$\omega_{3i} = \dot{\psi}_i, \quad p_\psi = I_3 \omega_{3i}, \quad p_\phi = p_\psi \cos \theta_i.$$

Mas, (3.36a) mostra que, necessariamente, $\theta_1 = \theta_i$. Portanto, como $p_\phi = p_\psi \cos \theta'$, resulta que

$$\theta_i = \theta_1 = \theta'.$$

PRECESSÃO REGULAR. A figura 3.23(b) mostra que se $E' > U_{\text{ef}}(\theta_0)$, então o pião sempre irá realizar o movimento de nutação com $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Por outro lado, no caso extremo $E' = U_{\text{ef}}(\theta_0)$ não irá ocorrer nutação e o pião irá executar uma *precessão regular* em torno na vertical com ângulo $\theta = \theta_0$. Neste caso, a expressão (3.35) mostra que a precessão ocorre com a velocidade angular constante dada por

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta_0}{I_1 \sin^2 \theta_0}. \quad (3.38)$$

Contudo, há uma condição que deve ser satisfeita para que a precessão regular possa ocorrer. Retornando à equação (3.37) e escrevendo $\beta = p_\phi - p_\psi \cos \theta_0$, resulta que

$$p_\psi - p_\phi \cos \theta_0 = p_\psi \sin^2 \theta_0 - \beta \cos \theta_0$$

e a equação fica escrita

$$(\cos \theta_0) \beta^2 - (p_\psi \sin^2 \theta_0) \beta + MghI_1 \sin^4 \theta_0 = 0.$$

Resolvendo esta equação para β , resulta

$$\beta = \frac{I_3 \omega_3 \sin^2 \theta_0}{2 \cos \theta_0} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4MghI_1}{I_3^2 \omega_3^2} \cos \theta_0} \right),$$

onde foi usada (3.34a) para se escrever $p_\psi = I_3 \omega_3$.

Observando em (3.38) que $\dot{\phi} = \beta / I_1 \sin^2 \theta_0$, o resultado acima mostra que há dois valores possíveis para $\dot{\phi}$. Se $\theta_0 > \pi/2$ (de modo que $\cos \theta_0 < 0$),¹³ então a precessão regular é sempre possível. Porém, se $\theta_0 < \pi/2$ ($\cos \theta_0 > 0$), então a precessão regular somente será possível se

$$1 - \frac{4MghI_1}{I_3^2 \omega_3^2} \cos \theta_0 \geq 0 \implies |\omega_3| \geq \omega_{\min}, \text{ onde } \omega_{\min} \doteq \sqrt{\frac{4MghI_1}{I_3^2} \cos \theta_0}.$$

Quando $\omega_3 > \omega_{\min}$ há duas soluções possíveis para $\beta = p_\phi - p_\psi \cos \theta_0$. Escrevendo-se

$$\beta = \frac{I_3 \omega_3 \sin^2 \theta_0}{2 \cos \theta_0} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\omega_{\min}^2}{\omega_3^2}} \right),$$

e assumindo $\omega_3 \gg \omega_{\min}$, pode-se fazer as aproximações:

$$\dot{\phi} = \frac{\beta}{I_1 \sin^2 \theta_0} = \frac{I_3 \omega_3}{2I_1 \cos \theta_0} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\omega_{\min}^2}{\omega_3^2}} \right) \approx \frac{I_3 \omega_3}{2I_1 \cos \theta_0} \left(1 \pm 1 \mp \frac{\omega_{\min}^2}{2\omega_3^2} \right).$$

Ou seja, ocorrem as velocidades angulares $\dot{\phi}_{\text{rápida}}$ ou $\dot{\phi}_{\text{lenta}}$, onde

$$\dot{\phi}_{\text{rápida}} \approx \frac{I_3 \omega_3}{I_1 \cos \theta_0}, \quad \dot{\phi}_{\text{lenta}} \approx \frac{Mgh}{I_3 \omega_3}.$$

ESTABILIDADE DO PIÃO VERTICAL

Um último caso importante digno de nota consiste na estabilidade do movimento de um pião posto a girar na posição vertical.¹⁴

As condições iniciais

$$\theta_i = 0, \quad \dot{\psi}_i = \omega_3$$

implicam em (3.34b) que

$$p_\phi = p_\psi.$$

Este é o caso que não havia ainda sido considerado. Nesta situação, o potencial efetivo em (3.36a) fica escrito

$$U_{\text{ef}}(\theta) = \frac{p_\psi^2 (1 - \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + Mgh \cos \theta = \frac{p_\psi^2}{2I_1} \tan^2 \frac{\theta}{2} + Mgh \cos \theta.$$

¹³Ângulos $\theta > \pi/2$ são possíveis para giroscópios cujos pontos fixos estão suspensos acima do nível do solo.

¹⁴Esta situação também é denominada um *pião dormente*.

Partindo da condição inicial $\theta_i = 0$, o pião passará a executar rotações em torno da vertical. Enquanto o ângulo de rotação for suficientemente pequeno, pode-se aproximar $\tan \theta/2 \approx \theta/2$ e $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ e escrever

$$U_{\text{ef}}(\theta) \approx \frac{p_\psi^2}{2I_1} \frac{\theta^2}{4} + Mgh \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = Mgh + \frac{1}{2}k\theta^2, \text{ onde}$$

$$k \doteq \frac{p_\psi^2}{4I_1} - Mgh = \frac{I_3^2 \omega_3^2}{4I_1} - Mgh.$$

Ou seja, o gráfico de $U_{\text{ef}}(\theta)$ é uma parábola em θ .

Com esta aproximação para $U_{\text{ef}}(\theta)$, a solução por quadratura em (3.36b) pode ser escrita

$$\int_0^\theta \frac{d\theta'}{\sqrt{2E'' - k\theta'^2}} = I_1^{-1/2}t, \text{ onde agora } E'' \doteq E' - Mgh = E - \left(Mgh + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2\right).$$

Há duas soluções possíveis para esta quadratura:

(i) $k > 0$: Neste caso, a integração e inversão da expressão acima resulta em

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{k}\theta}{\sqrt{2E'' - k\theta^2}} \right) = I_1^{-1/2}t \implies \theta(t) = \sqrt{\frac{2E''}{k}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{I_1}}t \right).$$

Ou seja, o movimento do pião é estável em torno da vertical.

(ii) $k < 0$: Neste caso, a integração leva à solução

$$\sinh^{-1} \left(\sqrt{\frac{|k|}{2E''}} \theta \right) = \sqrt{\frac{|k|}{I_1}}t \implies \theta(t) = \sqrt{\frac{2E''}{|k|}} \sinh \left(\sqrt{\frac{|k|}{I_1}}t \right).$$

Ou seja, neste caso o movimento do pião não é estável.

Portanto, a condição de estabilidade do pião dormente é

$$k > 0 \implies \omega_3 > \omega_c, \text{ sendo } \omega_c \doteq \sqrt{\frac{4I_1 Mgh}{I_3^2}}.$$

Se o pião for lançado na vertical com velocidade angular $\omega_3 > \omega_c$, ele irá permanecer rodopiando com, no máximo, pequenas oscilações em torno da vertical. Contudo, se for lançado com $\omega < \omega_c$, o pião começará a oscilar com amplitudes cada vez maiores até tombar.

Um vídeo contendo uma análise matemática semelhante à realizada nesta seção e o movimento correspondente de um giroscópio pode ser visualizado em <https://www.youtube.com/watch?v=5Sn2J1Vn4zU>.¹⁵

3.11 EQUAÇÕES DE EULER PARA UM CORPO RÍGIDO

Nesta seção serão abordadas a derivação e algumas consequências das equações de Euler para um corpo rígido, as quais descrevem a dinâmica rotacional deste sistema a partir da formulação Newtoniana.

Considera-se o torque aplicado a uma corpo rígido em relação a um ponto O , o qual é assumido ser ou um ponto fixo ou o centro de massa do sistema. Nesta situação, a equação (3.17) continua sendo válida, sendo aqui escrita como

$$\left. \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} \right|_{\text{inercial}} = \mathbf{N}_O^{(e)}, \quad (3.39)$$

¹⁵Um vídeo contendo uma demonstração mais “lúdica” pode ser visualizado em <https://www.youtube.com/watch?v=GeyDf4ooPdo>.

onde foi novamente enfatizado que esta equação descreve corretamente a dinâmica do corpo, observado do ponto de vista de um referencial inercial.

Para relacionar a equação acima com as observações realizadas a partir do referencial do corpo, emprega-se novamente a equação (3.13), o que leva a

$$\left. \frac{dL_O}{dt} \right|_{\text{corpo}} + \boldsymbol{\omega} \times L_O = N_O^{(e)}.$$

Esta transformação é conveniente porque no referencial do corpo o seu tensor de inércia é constante, ao passo que para o referencial inercial isto não é verdade.

Uma vez que o *momentum* angular do corpo, medido no seu referencial, é dado simplesmente por $L_O = \overset{\leftrightarrow}{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$ (equação 3.20c), resulta então

$$\overset{\leftrightarrow}{I} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\overset{\leftrightarrow}{I} \cdot \boldsymbol{\omega} \right) = N_O^{(e)}. \quad (3.40a)$$

Porém, se o referencial S for orientado ao longo dos eixos principais de inércia (empregando a técnica apresentada na seção 3.7), então $\overset{\leftrightarrow}{I} = I_1 \hat{e}_1 \hat{e}_1 + I_2 \hat{e}_2 \hat{e}_2 + I_3 \hat{e}_3 \hat{e}_3$ e a equação acima resulta

$$\sum_{i=1}^3 I_i \dot{\omega}_i \hat{e}_i + \sum_{i,j=1}^3 I_i \omega_i \omega_j \hat{e}_j \times \hat{e}_i = N_O^{(e)}$$

$$\frac{\hat{e}_j \times \hat{e}_i = -\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{e}_k}{N_O^{(e)} = \sum_{i=1}^3 N_i \hat{e}_i} \rightarrow \sum_{i=1}^3 \left(I_i \dot{\omega}_i + \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} I_k \omega_j \omega_k \right) \hat{e}_i = \sum_{i=1}^3 N_i \hat{e}_i,$$

a qual pode ser escrita em termos de seus componentes como

$$I_i \dot{\omega}_i - \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} I_j \omega_j \omega_k = N_i, \quad (i = 1, 2, 3), \quad \text{ou}$$

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 &= N_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 &= N_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 &= N_3. \end{aligned} \quad (3.40b)$$

As equações (3.40b) são as *equações de Euler para o corpo rígido*, as quais descrevem a dinâmica rotacional deste corpo em torno de um eixo instantâneo de rotação relativamente ao referencial do corpo. Caso suas soluções possam ser obtidas, é ainda necessário relacionar as mesmas com as observações feitas a partir do referencial inercial para que o movimento do corpo possa ser visualizado.

O movimento de um corpo rígido, conforme descrito pelas equações de Euler, somente depende da estrutura do corpo (a sua distribuição de massa) através de seus momentos principais de inércia $\{I_1, I_2, I_3\}$. Ou seja, quaisquer dois corpos distintos, com diferentes composições e geometrias, mas que possuam os mesmos momentos de inércia, serão indistinguíveis do ponto de vista das equações (3.40b) e por consequência terão a mesma dinâmica. Por outro lado, se o corpo for submetido a certos tipos de interações, tais como forças viscosas ou resistivas, a sua dinâmica resultante pode vir a depender de sua forma específica. Neste caso, as equações de Euler devem ser complementadas de acordo com o problema abordado.

Nas situações onde as equações (3.40b) são válidas, o movimento do corpo pode ser analisado através da dinâmica de um *elisóide equivalente*, conforme será abordado mais adiante

Exemplo 3.6 (Rotação uniforme de um haltere). Considerando novamente o movimento de rotação do haltere ilustrado na figura 3.8, a qual é repetida na figura 3.25 com um referencial de corpo S adequadamente orientado.

O haltere rota com velocidade angular constante em torno do eixo vertical. De acordo com a orientação escolhida para os eixos de S ,

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \sin \alpha \hat{e}_2 + \omega \cos \alpha \hat{e}_3.$$

Como $\mathbf{r}_1 = b \hat{e}_3$ e $\mathbf{r}_2 = -b \hat{e}_3$, sendo b as distâncias das massas ao ponto O , a sua matriz de inércia, de acordo com (3.19a), resulta

$$I = (m_1 + m_2) b^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

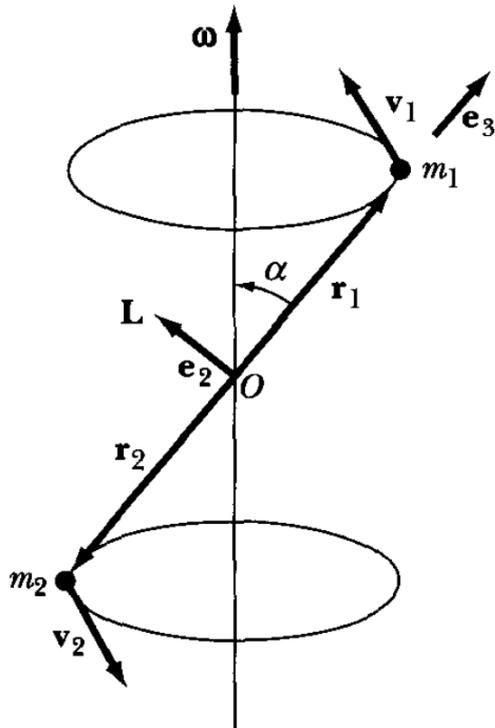


Figura 3.25: O haltere com um referencial S adequadamente escolhido. O sistema rota em torno do eixo vertical com velocidade angular ω constante.

Ou seja, x_1 e x_2 são eixos principais de inércia (x_3 é eixo de simetria). Observa-se também que as componentes do *momentum* angular do haltere são

$$L = l\omega = (m_1 + m_2) b^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (m_1 + m_2) b^2 \omega \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix},$$

de acordo com (3.20b).

Portanto, como $\dot{\omega} = 0$, as equações de Euler (3.40b) fornecem

$$N_1 = -(m_1 + m_2) b^2 \omega_2 \omega_3 = -(m_1 + m_2) b^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad N_2 = N_3 = 0,$$

o qual é o torque que deve ser aplicado ao haltere para manter a sua rotação uniforme em torno do eixo vertical. Observa-se que o torque é constante, mas é importante ressaltar que estas são as componentes do torque *no referencial do corpo*.

Para encontrar as componentes de N_O no referencial inercial, as quais não são constantes, pode-se empregar novamente a relação (3.13),

$$\dot{N}_O \Big|_{S'} = \omega \times N_O \Rightarrow \ddot{N}_O \Big|_{S'} = \omega \times (\omega \times N_O) = (\omega \cdot N_O) \omega - \omega^2 N_O,$$

sendo que o cancelamento acima foi realizado por que a equação (3.40a) mostra que, quando $\dot{\omega} = 0$, resulta que $\omega \perp N$. Portanto, escrevendo $N_O = \sum_i N'_i \hat{e}'_i$ para as componentes do torque no referencial inercial, obtém-se

$$\ddot{N}_O + \omega^2 N_O = 0 \implies N'_i(t) = A_i \cos \omega t + B_i \sin \omega t, \quad (i = 1, 2, 3),$$

sendo que as constantes A_i e B_i ($i = 1, 2, 3$) devem ser determinadas pelas condições iniciais.

Orientando-se os eixos de S' de tal forma que $\omega = \omega \hat{e}'_3$ e que em $t = 0$, $\hat{e}_1 = \hat{e}'_1$, obtém-se

$$N'_1(0) = N_1 \text{ e } N'_2(0) = N'_3(0) = 0. \text{ Ou seja, } A_1 = N_1 \text{ e } A_2 = A_3 = 0.$$

Para se obter $\dot{N}(0)$, retorna-se a

$$\dot{N}_O \Big|_{S'} = \omega \times N_O \implies \dot{N}(0) = (\omega \sin \alpha \hat{e}_2 + \omega \cos \alpha \hat{e}_3) \times (N_1 \hat{e}_1) = N_1 \omega (-\sin \alpha \hat{e}_3 + \cos \alpha \hat{e}_2),$$

sendo que na relação acima, deve-se tomar as orientações dos vetores \hat{e}_2 e \hat{e}_3 em relação a S' no instante $t = 0$. As relações entre os vetores de base são obtidas a partir da matriz de rotação $R^{(1)}(\alpha)$ dada por (3.9); ou seja, em $t = 0$,

$$\hat{e}_2 = \cos \alpha \hat{e}'_2 + \sin \alpha \hat{e}'_3, \quad \hat{e}_3 = -\sin \alpha \hat{e}'_2 + \cos \alpha \hat{e}'_3.$$

Portanto,

$$\dot{N}(0) = N_1 \omega \hat{e}'_2 \implies \dot{N}'_2(0) = N_1 \omega, \quad \dot{N}'_1(0) = \dot{N}'_3(0) = 0.$$

Com estas condições iniciais, obtém-se finalmente

$$N_{O|S'} = N_1 [\cos(\omega t) \hat{e}'_1 + \sin(\omega t) \hat{e}'_2].$$

3.11.1 MOVIMENTO LIVRE DE UM PIÃO SIMÉTRICO

As soluções das equações de Euler serão agora obtidas para o caso de um pião simétrico, caracterizado como um corpo rígido com dois momentos principais de inércia iguais e distintos do terceiro. Este tipo de corpo já foi analisado na seção 3.10 quando o mesmo possui um ponto fixo e é submetido à força gravitacional. Agora, o seu movimento será analisado na ausência de torques.

Sem perda de generalidade, assume-se que $I_2 = I_1$ e $N_O = 0$. Assim, as equações (3.40b) reduzem-se a

$$I_1 \dot{\omega}_1 - (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3 = 0, \quad I_1 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 = 0, \quad I_3 \dot{\omega}_3 = 0. \quad (3.41)$$

Do sistema de equações resultante, imediatamente percebe-se que $\omega_3 = \text{cte}$; ou seja, a componente da velocidade angular na direção perpendicular ao plano formado pelos eixos principais x_1 e x_2 é uma constante de movimento.

Para a análise das equações restantes, define-se a seguinte constante:

$$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3, \quad (3.42)$$

com a qual escreve-se

$$\dot{\omega}_1 + \Omega \omega_2 = 0, \quad \dot{\omega}_2 - \Omega \omega_1 = 0.$$

Derivando a primeira equação e inserindo a segunda, obtém-se então

$$\ddot{\omega}_1 + \Omega^2 \omega_1 = 0.$$

Com uma escolha apropriada para o instante inicial, as soluções para estas equações podem ser escritas

$$\omega_1(t) = \omega_{\perp} \cos \Omega t, \quad \omega_2(t) = \omega_{\perp} \sin \Omega t,$$

sendo $\omega_{\perp} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ constante. Uma vez que ω_3 é constante,

$$\omega = |\omega| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} = \sqrt{\omega_{\perp}^2 + \omega_3^2}$$

também o é. O movimento do vetor ω está ilustrado na figura 3.26, a qual mostra que ω precessiona em torno do eixo de simetria x_3 com uma velocidade angular Ω

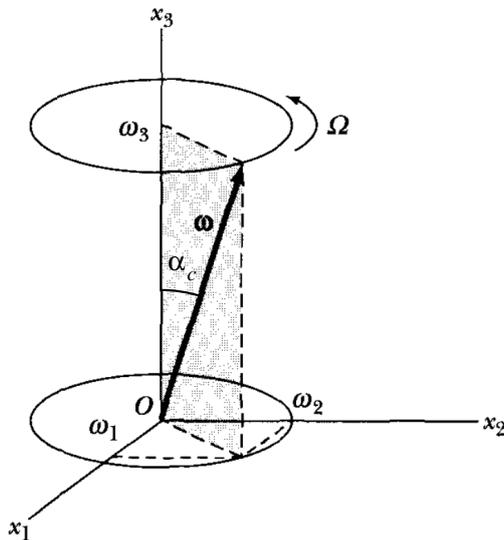


Figura 3.26: A velocidade angular ω de um pião simétrico livre sofre precessão com velocidade angular Ω constante em torno do eixo de simetria x_3 do corpo. O vetor ω percorre a superfície lateral de um cone em torno de x_3 .

constante, de tal forma que o corpo de vetor descreve um cone em torno de x_3 , denominado **cone do corpo**.

É importante ressaltar aqui que o movimento recém-descrito ocorre no referencial do corpo. Observado do referencial inercial, o movimento é mais complicado, uma vez que o referencial S rota em torno de ω . Uma maneira de se visualizar o movimento completo de um corpo rígido sem torque aplicado é através da *construção de Poincaré*, a qual será abordada na seção 3.11.2.

Exercício 3.5. Um disco fino é arremessado quase horizontalmente para o ar, de tal maneira que o disco gira em torno de um eixo perpendicular ao seu plano, enquanto que ao mesmo tempo este eixo perpendicular sofre uma precessão. Descreva o movimento do disco e mostre que a precessão do eixo de rotação ocorre a uma taxa aproximadamente duas vezes maior que a velocidade angular de rotação em torno deste eixo.

Resolução. Escolhe-se os eixos principais de inércia do disco de tal forma que x_3 é o eixo perpendicular ao seu plano, enquanto que x_1 e x_2 são quaisquer dois eixos mutuamente perpendiculares contidos neste plano. Para a solução deste exercício, é conveniente adotar os ângulos de Euler introduzidos na seção 3.9. Também é conveniente orientar o referencial do espaço de tal maneira que no instante $t = 0$, o eixo x'_1 (do espaço) coincide com o eixo x_1 (do corpo). Dessa maneira, em $t = 0$, $\psi = 0$ (ver figura 3.20). Além disso, como o movimento do disco ocorre sem torque, o seu *momentum* angular é uma constante de movimento. Toma-se então $L = L \hat{e}'_3$.

Assim, de acordo com (3.33b), os componentes da velocidade angular no referencial do corpo em $t = 0$ ficam

$$\omega_1 = \dot{\theta}, \quad \omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta, \quad \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.$$

Além disso, com a expressão da matriz de rotação R_{Eu} (3.32b) para $\psi = 0$, os componentes do *momentum* angular do disco, no referencial do corpo, são

$$L_1 = 0, \quad L_2 = L \sin \theta, \quad L_3 = L \cos \theta.$$

Portanto, de (3.27) resulta

$$L_1 = I_1 \omega_1 \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{L_1}{I_1} = 0, \quad L_2 = I_1 \omega_2 \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{\omega_2}{\sin \theta} = \frac{L}{I_1}, \quad L_3 = I_3 \omega_3 \Rightarrow \omega_3 = \frac{L_3}{I_3} = \frac{L \cos \theta}{I_3}.$$

Como $\dot{\theta} = 0$, o ângulo θ (o ângulo de inclinação do eixo de simetria do disco em relação a L) permanece constante. Se o prato é lançado quase horizontalmente, o *momentum* angular é quase vertical e θ é um ângulo pequeno. Além disso, devido ao teorema do eixo perpendicular (teorema 3.3), $I_3 = 2I_1$. Assim,

$$\omega_3 = \frac{L_3}{I_3} \approx \frac{L}{2I_1} \text{ e } \dot{\phi} = \frac{L}{I_1} \implies \dot{\phi} \approx 2\omega_3.$$

3.11.2 A CONSTRUÇÃO DE POINSOT

A construção de Poinsot consiste em uma visualização do movimento de rotação livre de um corpo rígido a partir de um referencial inercial. Nesta situação, as equações de Euler (3.40b) se reduzem a

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 &= 0, \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 &= 0, \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 &= 0, \end{aligned} \tag{3.43}$$

as quais descrevem a evolução temporal das componentes da velocidade angular no referencial do corpo.

Além disso, pela ausência de torque, o *momentum* angular e a energia cinética rotacional do corpo são constantes de movimento; ou seja, das equações (3.20c) e (3.24a),

$$L = \overset{\leftrightarrow}{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = \text{cte.}, \tag{3.44a}$$

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \overset{\leftrightarrow}{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = \text{cte.} \tag{3.44b}$$

Com base nestas constantes, o matemático e físico francês Louis Poinsot (1777 – 1859) concebeu uma representação geométrica do movimento livre de um corpo rígido.

Definindo o vetor

$$\mathbf{r} \doteq \frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{2T}},$$

a equação (3.44b) toma a forma

$$\mathbf{r} \cdot \overset{\leftrightarrow}{I} \cdot \mathbf{r} = 1.$$

Escrevendo $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$, e usando o fato de que $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} = I_1 \hat{e}_1 \hat{e}_1 + I_2 \hat{e}_2 \hat{e}_2 + I_3 \hat{e}_3 \hat{e}_3$, a equação acima fica escrita

$$I_1 r_1^2 + I_2 r_2^2 + I_3 r_3^2 = 1,$$

a qual é a equação de um elipsoide com semieixos $I_1^{-1/2}$, $I_2^{-1/2}$ e $I_3^{-1/2}$, denominado **elipsoide de inércia** ou **elipsoide equivalente**. Neste caso, o vetor \mathbf{r} fornece a posição de um ponto qualquer sobre a superfície deste elipsoide. Uma ilustração de um elipsoide de revolução pode ser vista na figura 3.27.

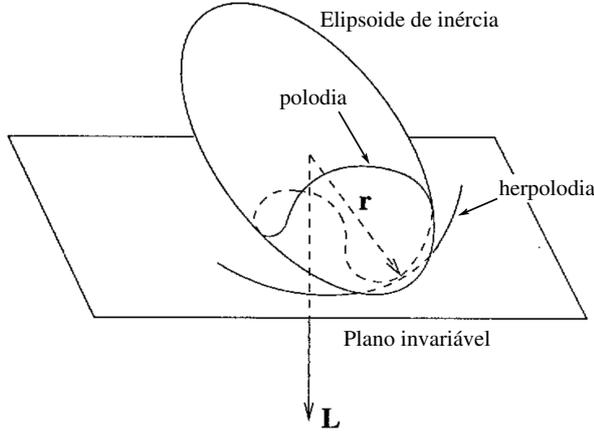


Figura 3.27: A construção de Poinsot: um elipsoide de revolução com os vetores \mathbf{r} e \mathbf{L} , o plano invariável e as curvas *polodia* e *herpolodia*.

O vetor normal à superfície do elipsoide de inércia no ponto localizado pelo vetor \mathbf{r} é proporcional a

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} \left(\mathbf{r} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{r} \right) &= \left(\sum_{i=1}^3 \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial r_i} \right) \left(\sum_{j=1}^3 I_j r_j^2 \right) \\ &= 2 \sum_{i=1}^3 I_i r_i \hat{e}_i = \sqrt{\frac{2}{T}} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \sqrt{\frac{2}{T}} \mathbf{L}. \end{aligned}$$

Ou seja, o *momentum* angular do corpo é normal à superfície do elipsoide no ponto dado por \mathbf{r} ; em outras palavras, o vetor \mathbf{L} é perpendicular ao plano tangente ao elipsoide no ponto \mathbf{r} .

A distância do centro do elipsoide a este plano tangente em \mathbf{r} é

$$d = \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{L}}{L} = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}}{\sqrt{2T}L} = \frac{\sqrt{2T}}{L} = \text{cte.}$$

Como L e d são constantes, o plano tangente é completamente fixo no espaço. Por esta razão este é denominado **plano invariável**. A figura 3.27 ilustra os vetores \mathbf{r} (do elipsoide), \mathbf{L} e o plano invariável.

À medida que o corpo rígido executa sua trajetória no espaço, sua velocidade angular varia no tempo. Como $\boldsymbol{\omega}$ é paralelo a \mathbf{r} e o plano invariável permanece fixo no espaço, a variação temporal de $\boldsymbol{\omega}$ faz com que o elipsoide role sem deslizar sobre o plano, sempre mantendo seu ponto de contato tangencial ao plano e com seu ponto central à mesma distância do plano. A curva traçada pelo vetor \mathbf{r} sobre a superfície do elipsoide devido à sua dinâmica é denominada **polodia**,¹⁶ enquanto que a curva traçada por \mathbf{r} sobre o plano invariável é denominada **herpolodia**.¹⁷ Este vídeo: <<https://www.youtube.com/watch?v=BwYFT3T5uIw>> mostra as curvas polodia e herpolodia traçadas pela rotação livre de um elipsoide de inércia.

Quando o corpo é um pião simétrico ($I_1 = I_2$), as equações (3.41) mostram que $\omega_3 = \text{cte.}$ e que a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ precessiona em torno do eixo de simetria, formando assim o cone do corpo (ver figura 3.26). Conforme se observa na figura, o cone do corpo possui um semiângulo de abertura α_c dado por

$$\tan \alpha_c = \frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{\omega_3} = \frac{\omega_{\perp}}{\omega_3}.$$

Por outro lado, o ângulo α_e entre $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{L} também é constante, porque

$$\cos \alpha_e = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}}{\omega L} = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}}{\omega L} = \frac{2T}{\omega L} = \text{cte.}$$

Portanto, o eixo de rotação também traça um cone no espaço com semiângulo α_e .

O vetor $\boldsymbol{\omega}$ define as superfícies laterais de ambos os cones, do corpo e do espaço e, por isso, ambos os cones sempre se tocam ao longo de $\boldsymbol{\omega}$. Como o cone do espaço é fixo (porque $L = \text{cte.}$), à medida que o tempo passa e $\boldsymbol{\omega}$ varia, o cone do corpo rola sobre a superfície do cone do espaço. Como o vetor \mathbf{r} do elipsoide de inércia é proporcional a $\boldsymbol{\omega}$, tanto a polodia quanto a herpolodia são circunferências.

¹⁶Do grego: *caminho do polo*.

¹⁷Do grego: *caminho serpentina do polo*.

Para o caso de um pião simétrico, escreve-se o seu tensor de inércia como

$$\overleftrightarrow{I} = I_1 \hat{e}_1 \hat{e}_1 + I_2 \hat{e}_2 \hat{e}_2 + I_3 \hat{e}_3 \hat{e}_3 = I_1 \overleftrightarrow{1} + (I_3 - I_1) \hat{e}_3 \hat{e}_3$$

e a velocidade angular como $\omega = \omega \hat{n}$, de onde resulta o vetor s , definido como

$$s \doteq \frac{L}{\omega I_1} = \frac{\overleftrightarrow{I} \cdot \omega}{\omega I_1} = \frac{\overleftrightarrow{I} \cdot \hat{n}}{I_1} = \hat{n} + \beta \cos \alpha_c \hat{e}_3, \text{ onde}$$

$$\beta = \frac{I_3 - I_1}{I_1}, \quad \cos \alpha_c = \hat{e}_3 \cdot \hat{n}.$$

Os vetores \hat{e}_3 , s e \hat{n} estão representados na figura 3.28. Observa-se que há duas possibilidades: (i) $\beta > 0$ ($I_3 > I_1$), ou (ii) $\beta < 0$ ($I_3 < I_1$). Na primeira possibilidade ($\beta > 0$), o vetor s está entre \hat{e}_3 e \hat{n} ; ou seja, L está entre \hat{e}_3 e ω . Neste caso, o cone do espaço encontra-se no interior do cone do corpo, situação ilustrada no painel direito da figura 3.29. Um corpo simétrico com $I_3 > I_1$ assemelha-se a um disco achatado e é denominado um corpo **oblato**.

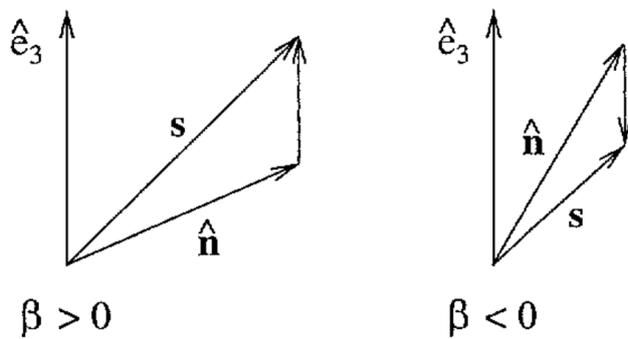


Figura 3.28: Os vetores \hat{e}_3 , s e \hat{n} envolvidos no movimento livre de um corpo simétrico.

Por outro lado, na segunda possibilidade ($\beta < 0$), a figura 3.28 mostra que \hat{n} está entre \hat{e}_3 e s (ou seja, ω entre \hat{e}_3 e L). Neste caso, o cone do espaço encontra-se em contato com a superfície exterior do cone do corpo, como se pode ver no painel da esquerda da figura 3.29. Um corpo com $I_3 < I_1$ assemelha-se a um bastão alongado e é denominado um corpo **prolato**.

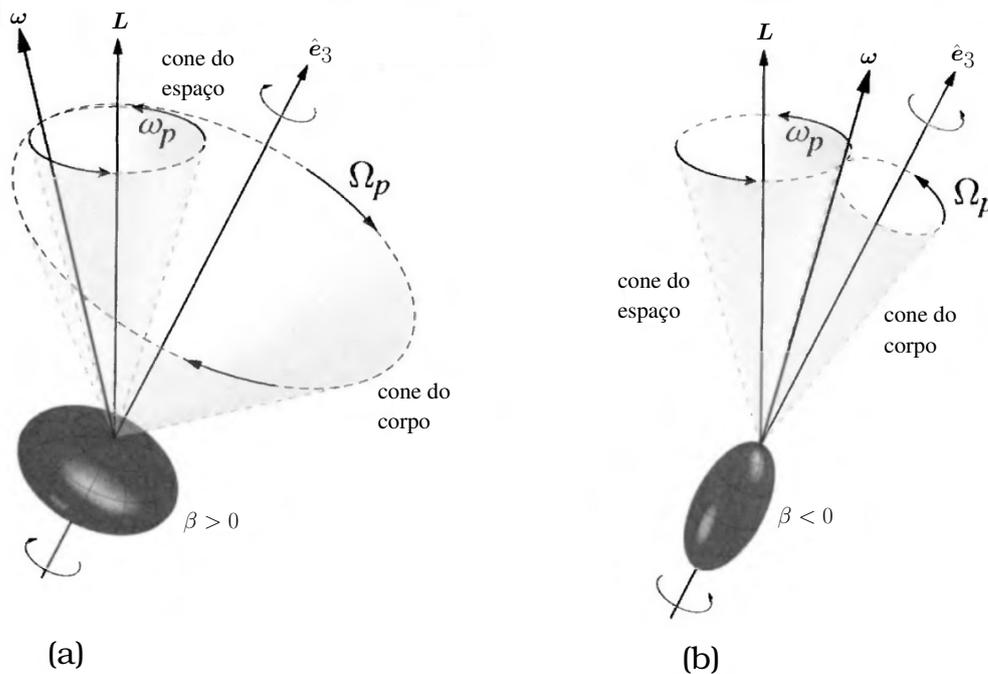


Figura 3.29: Os cones do corpo e do espaço associados ao movimento de rotação livre de um pião simétrico. (a) Caso oblato: $I_3 > I_1$ ($\beta > 0$). (b) Caso prolato: $I_3 < I_1$ ($\beta < 0$).

3.11.3 ESTABILIDADE DAS ROTAÇÕES LIVRES

Na ausência de torques, as equações de Euler se reduzem ao sistema (3.43), o qual admite uma solução tal como $\omega_3 = \text{cte.}$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$, por exemplo. Ou seja, a rotação uniforme em torno de um dos eixos principais de inércia consiste em uma situação de equilíbrio para um corpo rígido livre. Esta possibilidade é importante para aplicações mecânicas: um eixo somente permanecerá girando de maneira uniforme na ausência de torques (e sem amortecimento) se o eixo em questão for um eixo principal de inércia.

Um problema de interesse prático nesta situação é a estabilidade da rotação uniforme de um corpo rígido livre. Supondo que o corpo inicie uma rotação livre com $\omega_3 \neq 0$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$ e venha a sofrer perturbações momentâneas que desviem ligeiramente o eixo de rotação. O movimento resultante irá consistir em uma leve oscilação em torno do regime estável, ou irá se afastar devido a instabilidades excitadas pela perturbação?

Para estudar os efeitos dessa perturbação, considera-se um corpo rígido genérico, para o qual os três momentos principais de inércia são distintos. Orientando o referencial do corpo com seus eixos ao longo dos eixos principais, parte-se do estado estacionário $\omega_3 = \text{cte.}$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Supõe-se agora que uma perturbação é aplicada sobre o corpo de tal forma que a sua velocidade angular passa a ser escrita como

$$\boldsymbol{\omega} = \delta\omega_1 \hat{e}_1 + \delta\omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3, \text{ sendo } |\delta\omega_1| \sim |\delta\omega_2| \ll \omega_3.$$

Ou seja, $\delta\omega_1$ e $\delta\omega_2$ são novas componentes de $\boldsymbol{\omega}$, criadas pela perturbação aplicada sobre o corpo. Neste caso, as equações (3.43) ficam escritas

$$\begin{cases} I_1 \frac{d}{dt} (\delta\omega_1) - (I_2 - I_3) (\delta\omega_2) \omega_3 = 0, \\ I_2 \frac{d}{dt} (\delta\omega_2) - (I_3 - I_1) (\delta\omega_1) \omega_3 = 0, \\ I_3 \frac{d}{dt} \omega_3 - (I_1 - I_2) (\delta\omega_1) (\delta\omega_2) = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} I_1 \frac{d}{dt} (\delta\omega_1) - (I_2 - I_3) (\delta\omega_2) \omega_3 = 0, \\ I_2 \frac{d}{dt} (\delta\omega_2) - (I_3 - I_1) (\delta\omega_1) \omega_3 = 0, \\ I_3 \frac{d}{dt} \omega_3 \approx 0, \end{cases} \quad (3.45)$$

sendo que na terceira equação desprezou-se o termo perturbado (de segunda ordem) frente à componente estacionária ω_3 . Assim, $\omega_3 \approx \text{cte.}$ ainda é tratada como uma constante de movimento.

As equações restantes são resolvidas da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (\delta\omega_1) = \left(\frac{I_2 - I_3}{I_1} \omega_3 \right) (\delta\omega_2) \\ \frac{d}{dt} (\delta\omega_2) = \left(\frac{I_3 - I_1}{I_2} \omega_3 \right) (\delta\omega_1) \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} (\delta\omega_1) = \left(\frac{I_2 - I_3}{I_1} \omega_3 \right) \frac{d}{dt} (\delta\omega_2) \\ = - \frac{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2} \omega_3^2 (\delta\omega_1). \end{cases}$$

A solução para $\delta\omega_1(t)$ pode ser escrita

$$\delta\omega_1(t) = A e^{i\Omega_1 t} + B e^{-i\Omega_1 t}, \text{ sendo } \Omega_1 = \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2}} \omega_3.$$

Por sua vez, a solução para $\delta\omega_2(t)$ resulta

$$\delta\omega_2(t) = \left(\frac{I_2 - I_3}{I_1} \omega_3 \right)^{-1} \frac{d}{dt} (\delta\omega_1) = -i \sqrt{\frac{I_1 (I_3 - I_1)}{I_2 (I_3 - I_2)}} \delta\omega_1(t).$$

Observa-se que há duas possibilidades para a forma da solução para $\delta\omega_1(t)$:

(i) I_3 é o maior ou o menor momento principal de inércia ($I_3 > I_1$ e $I_3 > I_2$, ou $I_3 < I_1$ e $I_3 < I_2$): neste caso, Ω_1 é real e $\delta\omega_1(t)$ e $\delta\omega_2(t)$ podem sempre ser escritos como

$$\delta\omega_i(t) = A_i \sin \Omega_1 t + B_i \cos \Omega_1 t, \quad (i = 1, 2),$$

com $A_i, B_i \in \mathbb{R}$, dependendo das condições iniciais. Como

$$\max |\delta\omega_i| = \sqrt{A_i^2 + B_i^2} \ll \omega_3,$$

o movimento resultante será uma oscilação de pequena amplitude do eixo de rotação em torno do estado de equilíbrio.

(ii) I_3 é um momento intermediário ($I_3 > I_1$ e $I_3 < I_2$, ou $I_3 < I_1$ e $I_3 > I_2$): neste caso, Ω_1 é imaginário ($\Omega_1 = i|\Omega_1|$) e as componentes perturbadas ficam escritas como

$$\delta\omega_i(t) = A_i \sinh |\Omega_1| t + B_i \cosh |\Omega_1| t, \quad (i = 1, 2).$$

Nesta situação, a oscilação resultante irá provocar um afastamento exponencial do eixo de rotação do estado estacionário. O que ocorre neste caso é o afastamento rápido do eixo instantâneo de rotação do eixo principal intermediário para um dos outros eixos: o de menor ou o de maior momento principal de inércia.

As mesmas conclusões são obtidas caso a rotação estacionária ocorra ao longo de qualquer um dos outros eixos principais. A demonstração realizada acima acerca da estabilidade das rotações em torno dos eixos principais com o maior/menor momento de inércia e a instabilidade das rotações em torno do eixo com o momento de inércia intermediário é às vezes denominado o *teorema do eixo intermediário*.

Este vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=ms_IUMIwzFg mostra um paralelepípedo (um bloco de madeira), o qual possui os três momentos principais de inércia distintos, executando rotação livre em torno destes eixos. Observa-se como as rotações em torno dos eixos com o maior ou o menor momentos são estáveis, enquanto que a rotação em torno do eixo intermediário é instável. Por sua vez, este outro vídeo: <https://www.youtube.com/watch?v=PY7fRozbrtk>, além de fornecer uma visualização lúdica do teorema do eixo intermediário, também apresenta uma explicação detalhada e uma simulação computacional.

Caso o corpo possua um eixo de simetria, possuindo então dois momentos principais de inércia idênticos, as equações de Euler perturbadas (3.45) se reduzem às seguintes possibilidades:

(i) $I_1 = I_2$: Neste caso, a solução acima para $\delta\omega_1(t)$ é a mesma, mas com

$$\Omega_1 = \frac{|I_3 - I_1|}{I_1} \omega_3, \quad \text{e} \quad \delta\omega_2(t) = -i\delta\omega_1(t).$$

Ou seja, as oscilações são sempre estáveis.

(ii) $I_3 = I_1$ ou $I_3 = I_2$: Neste caso, basta analisar uma das possibilidades ($I_3 = I_1$, por exemplo). Agora as equações (3.45) ficam

$$\begin{cases} I_1 \frac{d}{dt} (\delta\omega_1) - (I_2 - I_3) \omega_3 (\delta\omega_2) = 0 \\ I_2 \frac{d}{dt} (\delta\omega_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta\omega_1(t) = A + \frac{I_2 - I_3}{I_3} \omega_3 (\delta\omega_2) t, \\ \delta\omega_2 = \text{cte.} \end{cases}$$

Ou seja, a amplitude da rotação em torno do eixo x_1 cresce de forma secular e o movimento do corpo é sempre instável. Conclusão semelhante é obtida se $I_3 = I_2 \neq I_1$.

Finalmente, se os três momentos forem iguais, as equações (3.45) se reduzem a

$$\delta\omega_1 = \text{cte.}, \quad \delta\omega_2 = \text{cte.}, \quad \omega_3 = \text{cte.}$$

e a rotação livre é sempre estável.

Em 1992, os astronautas a bordo do ônibus espacial *Endeavour*, em sua primeira missão, tentaram resgatar o satélite *Intelsat 6*, o qual estava em uma órbita baixa devido a uma falha no seu lançamento. Durante a missão, diversas dificuldades ocorreram no procedimento de resgate, as quais foram devidas às condições de estabilidade/instabilidade na rotação livre de um corpo rígido discutidas nesta seção. Um vídeo contendo a descrição das dificuldades e a estratégia adotada para finalmente resgatar o satélite pode ser visualizado em <https://www.c-span.org/video/?26028-1/space-shuttle-rescue-intelsat-satellite>.

3.12 DINÂMICA DE CORPOS RÍGIDOS SEM PONTOS FIXOS

Esta seção consiste, basicamente, em uma série de estudos de casos envolvendo a dinâmica de corpos rígidos que não possuem pontos fixos. Aqui serão aplicados todos os desenvolvimentos apresentados nas seções anteriores.

3.12.1 PRECESSÕES E OSCILAÇÕES DO EIXO DE ROTAÇÃO DA TERRA

Com o transcorrer do tempo, a Terra executa diversos movimentos, os quais são caracterizados e determinados por diversos fatores tais como o processo de formação do Sistema Solar, a forma e composição da Terra e dos demais orbes no sistema e suas distâncias e movimentos relativos. A maior parte desses movimentos são periódicos.

Do ponto de vista astronômico, o movimento de menor período consiste na rotação da Terra em torno do eixo que passa pelos polos Norte e Sul geográficos, denominado o *eixo rotacional*. O período rotacional da Terra, dura $T_{\text{rot}} = 23,9345 \text{ h} = 8,61642 \times 10^4 \text{ s}$. O eixo de rotação é perpendicular ao plano do Equador, o qual consiste no círculo de maior raio sobre a superfície da Terra. O prolongamento do plano equatorial para o espaço é denominado o *equador terrestre*.

A Terra orbita em torno do Sol em uma órbita aproximadamente circular em um período orbital médio de $T_{\text{orb}} = 365,256363004 \text{ dias} = 3,1558 \times 10^7 \text{ s}$, representado na figura 3.30. Visto da Terra, o Sol percorre um caminho aparente no céu ao longo do ano; este caminho é denominado a *eclíptica*. O termo eclíptica é também empregado para o plano no espaço que contém a órbita que o centro da Terra realiza em torno do centro do Sol. O *eixo orbital* da Terra é aquele eixo perpendicular à eclíptica e que passa pela posição instantânea do centro da Terra.

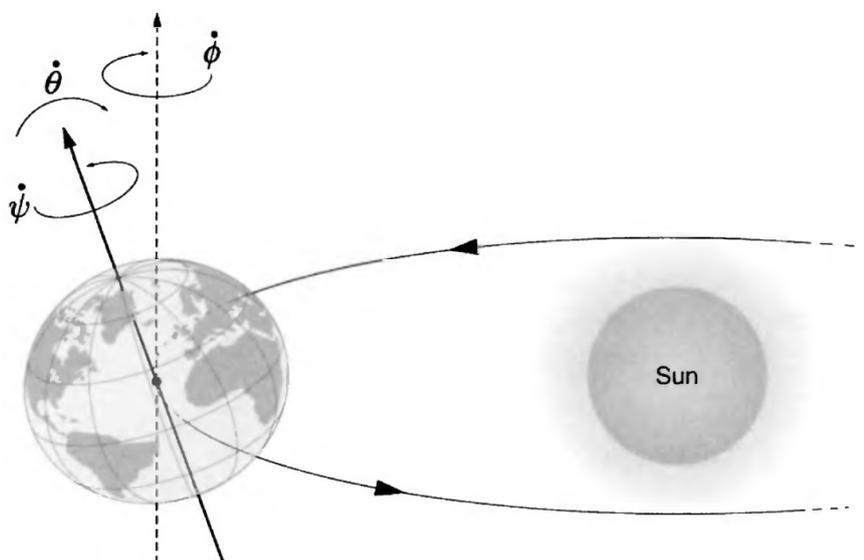


Figura 3.30: Movimento orbital da Terra em torno do Sol. Estão representados os eixos rotacional (linha contínua) e orbital (linha tracejada) e os movimentos de rotação (ψ), precessão dos equinócios (ϕ) e a variação da obliquidade do eixo rotacional (θ).

Ao longo de um ano, observa-se a passagem das estações e o movimento aparente das constelações no céu noturno. Atualmente, sabe-se que a origem destes fenômenos se deve à inclinação do eixo de rotação da Terra em relação à eclíptica, *i. e.*, o equador celeste e a eclíptica não são coplanares. A *inclinação axial* ou *obliquidade* do eixo da Terra é o ângulo entre o seus eixos rotacional e orbital. De forma equivalente, a obliquidade pode ser definida como o ângulo entre o equador celeste e a eclíptica. A obliquidade da Terra em 2014 foi medida em $\theta_{\text{obl}} = 23,4392811^\circ = 23^\circ 26' 21.41''$ e está representada na figura 3.30 pelo ângulo θ . Por sua vez, a rotação da Terra em torno do eixo rotacional está representada por ψ . A figura 3.31 apresenta em maior detalhe os planos e eixos siderais da Terra e suas inclinações.

A orientação do eixo rotacional da Terra varia lentamente com o tempo. Nos dias atuais, o Polo Norte celestial está próximo da estrela Polaris, na constelação da Ursa Maior. Contudo, durante o longo período de tempo compreendido entre a construção de Stonehenge (cerca de 3.800 AEC) e das pirâmides do Egito (em cerca de 2.500 AEC), uma estrela denominada Thuban, da constelação do Dragão, era identificada como a estrela polar. A figura 3.32 ilustra a trajetória do Polo Norte em relação a algumas estrelas e constelações próximas.

A mudança da estrela polar com o tempo ocorreu devido à precessão do eixo rotacional da Terra em torno do eixo orbital, movimento este denominado de *precessão dos equinócios*. Este movimento de precessão é retrógrado em relação ao movimento orbital da Terra e está representado por ϕ na figura 3.30. Dentre as diversas medidas atuais da precessão dos equinócios, um valor médio aceitável para o período de precessão é de $T_{\text{prec}} = 25.771,4 \text{ anos}$ ou cerca de 50,288 arcosegundos/ano.

Finalmente, a obliquidade também não é constante no tempo, mas varia entre $22,1^\circ$ e $24,5^\circ$

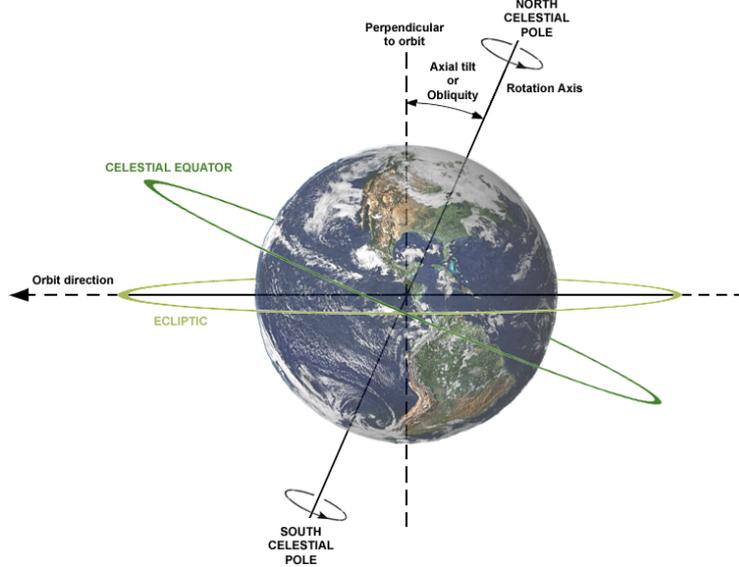


Figura 3.31: Diversas características celestiais da Terra.

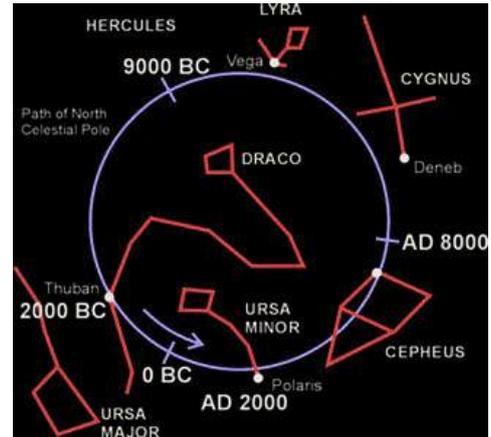


Figura 3.32: Trajetória do Polo Norte celestrial durante um ciclo completo de precessão.

durante um período de aproximadamente 41.000 anos. A variação da obliquidade é semelhante a uma nutação do eixo rotacional da Terra e está representada por θ na figura 3.30.

Os movimentos de precessão e variação da obliquidade do eixo rotacional da Terra têm consequências no clima do planeta ao longo do tempo e são causados pela forma e distribuição de massa da Terra e o seu movimento relativo com os demais orbes do Sistema Solar, principalmente o Sol e a Lua. Será desenvolvido aqui um modelo simples que irá fornecer uma estimativa para esses períodos.

3.12.1.1 PRECESSÃO DO EIXO ROTACIONAL

Embora aparente ser uma esfera perfeita, a Terra na verdade é, aproximadamente, um elipsoide oblato (ver figura 3.29) em relação ao eixo rotacional. O seu raio equatorial é de cerca de $R_{T_{\max}} = 6.378,1 \text{ km}$ enquanto que o raio polar é $R_{T_{\min}} = 6.356,8 \text{ km}$ (o raio médio do planeta é $\bar{R}_T = 6.371,0 \text{ km}$). Esta diferença é atribuída ao efeito centrífugo que ocorreu na nuvem primordial enquanto esta condensava e resfriava já com o movimento de rotação. Medidas recentes dos momentos principais de inércia da Terra fornecem o valor relativo

$$\epsilon \doteq \frac{I_3 - I_1}{I_3} = 0,003\,273\,763\,4 \approx \frac{1}{305,5}. \quad (3.46)$$

Será mostrado agora que graças à elipicidade na sua forma, a interação gravitacional entre a Terra e o Sol e entre a Terra a Lua gera um torque líquido, o qual será o responsável pelo movimento do seu eixo rotacional. O cálculo será realizado aos pares: Terra-Lua e Terra-Sol.

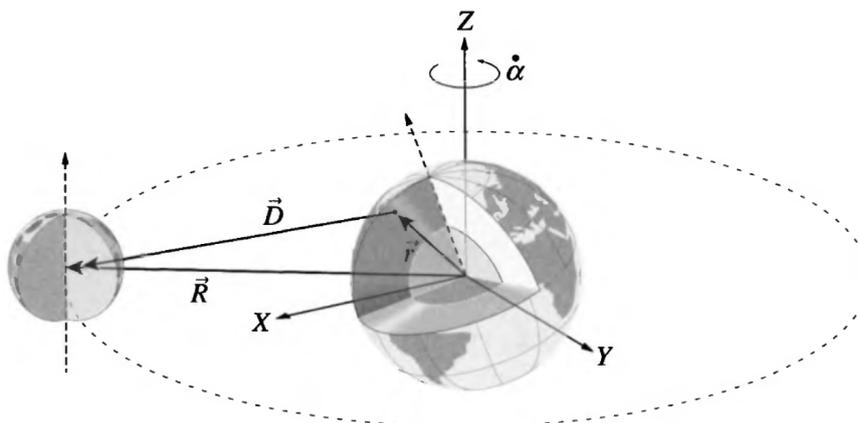


Figura 3.33: Ilustração da órbita da Lua em torno da Terra, mostrando as quantidades relevantes no cálculo de U_g .

A figura 3.33 ilustra a órbita da Lua, assumida como centrada no núcleo da Terra e a diversas quantidades envolvidas no modelo. Embora possua uma excentricidade igual a 0,0549, a órbita será assumida circular, com raio igual a $R_{TL} = 384.399$ km. Também na figura 3.33, o sistema de coordenadas XYZ está centrado na Terra, com o eixo Z orientado na direção perpendicular ao plano orbital da Lua. Embora este plano possua uma inclinação de $5,145^\circ$ em relação à eclíptica, ambos serão posteriormente considerados coplanares.

Outras quantidades importantes para o modelo são:

$$M_{\text{Terra}} = 5,97237 \times 10^{24} \text{ kg}, \quad M_{\text{Lua}} = 7,342 \times 10^{22} \text{ kg}, \quad M_{\text{Sol}} = 1,98855 \times 10^{30} \text{ kg}.$$

A Lua e o Sol serão considerados massas puntiformes, mas para a Terra assume-se uma densidade variável $\rho = \rho(\mathbf{r})$, mas com o centro de massa em seu centro geométrico.

Iniciando o cálculo pelo sistema Terra-Lua e tomando as quantidades definidas na figura 3.33, a energia potencial gravitacional entre uma massa puntiforme $M = M_{\text{Lua}}$ e a Terra, sendo que a distância entre o centro da Terra e a massa puntiforme é $R = R_{TL}$, é dada por

$$U_g = -GM \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}) d^3r}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|},$$

sendo $G = 6.67430(15) \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ (NIST, 2018) a constante gravitacional.

Para o cálculo desta integral, é necessário realizar uma aproximação adequada para o denominador. Como $R_{TL} \gg R_{T\text{max}}$, pode-se escrever¹⁸

$$\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n\left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{Rr}\right) = \frac{1}{R} \left\{ 1 + \frac{r}{R} \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{Rr}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \left[3 \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{Rr}\right)^2 - 1 \right] + \dots \right\},$$

onde $P_n(x)$ é o polinômio de Legendre de grau n . Para os presentes propósitos, basta tomar os três primeiros termos da série, escrevendo-se então

$$U_g \approx -\frac{GM}{R} \left\{ M_{\text{Terra}} + \frac{\mathbf{R}}{R^2} \cdot \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} + \frac{1}{2R^2} \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) r^2 \left[3 \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{Rr}\right)^2 - 1 \right] \right\},$$

sendo que o segundo termo é nulo porque é justamente a massa da Terra multiplicada pela posição de seu centro de massa. Já quanto ao terceiro termo, se forem definidas as matrizes

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 3R_x^2 - R^2 & 3R_xR_y & 3R_xR_z \\ 3R_xR_y & 3R_y^2 - R^2 & 3R_yR_z \\ 3R_xR_z & 3R_yR_z & 3R_z^2 - R^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

pode-se mostrar, após alguma álgebra, que

$$3 \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{Rr}\right)^2 - 1 = \frac{\tilde{\mathbf{r}}\mathbf{H}\mathbf{r}}{R^2r^2}.$$

Ou seja,

$$U_g \approx -\frac{GMM_{\text{Terra}}}{R} - \frac{GM}{2R^5} \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) \tilde{\mathbf{r}}\mathbf{H}\mathbf{r}.$$

Introduzindo-se a matriz de inércia (3.19b), e assumindo que a mesma é calculada para um referencial coaxial com os eixos principais de inércia, com o eixo z paralelo ao eixo rotacional, resulta então

$$U_g \approx -\frac{GMM_{\text{Terra}}}{R} + \frac{GM}{2R^5} \sum_{i=1}^3 H_{ii} I_i \xrightarrow{I_1=I_2} U_g \approx -\frac{GMM_{\text{Terra}}}{R} + \frac{GM}{2R^5} (I_3 - I_1) (3R_z^2 - R^2) \quad (3.47)$$

A última expressão acima foi obtida com a suposição de que a Terra é um elipsoide oblato.

A expressão para a energia potencial gravitacional dada por (3.47) foi obtida em um referencial em repouso com a Terra e, portanto, a quantidade R_z varia no tempo tanto devido ao movimento de rotação da Terra quanto aos demais movimentos do eixo rotacional devidos ao potencial, de forma semelhante ao que ocorre no caso do pião simétrico analisado na seção 3.10.

¹⁸Ver, por exemplo, <https://en.wikipedia.org/wiki/Legendre_polynomials>.

Se o referencial XYZ ilustrado na figura 3.33 for um referencial inercial, com os eixos X e Y sobre o plano orbital e Z perpendicular a esse plano, então $\mathbf{R} = (R_X, R_Y, 0)$ e R_z pode ser escrito a partir de (3.32a) como

$$R_z = R_{31}(\phi, \theta, \psi) R_X + R_{32}(\phi, \theta, \psi) R_Y,$$

sendo R_{31} e R_{32} elementos da matriz de Euler (3.32b). Como a órbita é suposta circular, pode-se escrever, mediante uma escolha adequada do instante inicial, $R_X = R \cos \alpha$ e $R_Y = R \sin \alpha$, sendo α um ângulo que varia com a órbita da Lua em torno da Terra. Resulta então

$$R_z(t) = R \sin \theta \sin(\phi - \alpha).$$

Na expressão acima para R_z , os três ângulos (θ , ϕ e α) variam no tempo, mas em escalas distintas. As variações de θ e ϕ correspondem respectivamente à nutação e precessão do eixo rotacional, as quais ocorrem em períodos de tempo da ordem de milhares de anos, enquanto que a variação de α se deve à órbita lunar, que ocorre no período $T_{\text{Lua}} = 27,321661$ dias = 27 d 7 h 43 min 11.5 s, o qual é muito mais curto que o período de ϕ . Portanto, em (3.47) é conveniente substituir R_z^2 pela sua média temporal no período T_{Lua} , a qual é

$$\overline{R_z^2} = \frac{1}{T_{\text{Lua}}} \int_0^{T_{\text{Lua}}} dt R_z^2(t) \approx \frac{1}{2} R^2 \sin^2 \theta,$$

tendo sido assumido que $\phi(t), \theta(t) \approx \text{cte.}$ neste período.

Desta forma, obtém-se finalmente

$$U_g \approx -\frac{GM M_{\text{Terra}}}{R} + \frac{GM}{4R^3} (I_3 - I_1) (1 - 3 \cos^2 \theta). \quad (3.48)$$

Fazendo-se referência à expressão (3.30a), o potencial (3.48) possui duas partes: a primeira depende somente da distância entre a Lua e o centro da Terra, a qual é constante em uma órbita circular. O segundo termo, por outro lado, depende da orientação do eixo rotacional da Terra em relação ao plano da órbita. Este segundo termo é responsável pelo torque atuando sobre a Terra, o qual irá gerar os movimentos de precessão e nutação deste eixo. Observa-se claramente que este torque somente existe porque a Terra é um sólido oblato, ao invés de ser uma esfera perfeita.

Para se obter a energia potencial total do sistema Lua-Terra-Sol, deve-se somar agora à expressão (3.48) os termos correspondentes à interação Terra-Sol. A mesma expressão pode ser empregada para tanto, bastando substituir-se $M = M_{\text{Sol}}$ e $R = R_{\text{TS}}$. A órbita da Terra possui uma excentricidade igual a 0,0167086, ainda menor que a excentricidade da órbita lunar. Portanto, assume-se novamente uma órbita circular de raio $R_{\text{TS}} = 1,495978707 \times 10^8$ km = 1 UA.

Portanto, a energia potencial total do sistema Lua-Terra-Sol pode ser escrita

$$U_{g,\text{tot}} \approx -\Theta + \frac{1}{4} \Omega^2 (I_3 - I_1) (1 - 3 \cos^2 \theta), \quad \text{onde} \quad (3.49)$$

$$\Theta = GM_{\text{Terra}} \left(\frac{M_{\text{Lua}}}{R_{\text{TL}}} + \frac{M_{\text{Sol}}}{R_{\text{TS}}} \right), \quad \Omega^2 = G \left(\frac{M_{\text{Lua}}}{R_{\text{TL}}^3} + \frac{M_{\text{Sol}}}{R_{\text{TS}}^3} \right).$$

Observa-se que

$$\left(\frac{M_{\text{Lua}}}{R_{\text{TL}}} \right) \div \left(\frac{M_{\text{Sol}}}{R_{\text{TS}}} \right) \approx 1,44 \times 10^{-5}, \quad \text{mas} \quad \left(\frac{M_{\text{Lua}}}{R_{\text{TL}}^3} \right) \div \left(\frac{M_{\text{Sol}}}{R_{\text{TS}}^3} \right) \approx 2,09.$$

Ou seja, a ação da Lua é desprezível frente à ação do Sol sobre o centro de massa da Terra, mas a sua contribuição para o torque exercido sobre o eixo rotacional é duas vezes maior que a contribuição do Sol.

Com o potencial (3.49) e a energia cinética (3.29c), a Lagrangiana total pode ser separada em parte translacional e parte rotacional, $L = L_{\text{trans}} + L_{\text{rot}}$, as quais resultam em equações de movimento desacopladas, uma vez que não há vínculos entre os termos translacionais e rotacionais. Assim, para os propósitos deste problema, é suficiente considerar L_{rot} , a qual pode ser escrita, a partir de (3.27), (3.29c), (3.33b) e (3.49), como

$$L_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - \frac{1}{4} \Omega^2 (I_3 - I_1) (1 - 3 \cos^2 \theta),$$

a qual possui uma forma semelhante à Lagrangiana do pião com um ponto fixo, analisado na seção 3.10.

Da mesma forma como no problema do pião, as coordenadas ϕ e ψ são cíclicas, com os momentos conjugados

$$p_\psi = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_3 \omega_3 = \text{cte.}, \quad p_\phi = I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + p_\psi \cos \theta = \text{cte.}$$

A energia mecânica total pode ser escrita na forma (3.36a),

$$E' = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + U_{\text{ef}}(\theta), \quad \text{onde } E' = E - \frac{1}{2} \frac{p_\psi^2}{I_3} \text{ e}$$

$$U_{\text{ef}}(\theta) = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{1}{4} \Omega^2 (I_3 - I_1) (1 - 3 \cos^2 \theta).$$

Desta maneira, a solução por quadratura para $\theta = \theta(t)$ é dada por (3.36b), a qual é novamente demasiado complicada para ser resolvida analiticamente.

Ao invés de empregar a solução por quadratura, escreve-se a equação de Euler-Lagrange para θ , a qual fica

$$\ddot{\theta} + \left[\epsilon \left(\dot{\phi}^2 + \frac{3}{2} \Omega^2 \right) \cos \theta + (1 + \epsilon) \dot{\psi} \dot{\phi} \right] \sin \theta = 0,$$

lembrando que $\epsilon = (I_3 - I_1)/I_1 \approx 0,00327$. Obviamente, a equação para $\theta(t)$ acima é tão difícil de ser resolvida quanto a solução por quadratura. Busca-se então uma solução aproximada.

Para se obter a solução aproximada, considera-se o caso em que não há nutação, i. e., $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$. Neste caso,

$$\epsilon \left(\dot{\phi}^2 + \frac{3}{2} \Omega^2 \right) \cos \theta + (1 + \epsilon) \dot{\psi} \dot{\phi} \approx \frac{3}{2} \epsilon \Omega^2 \cos \theta + (1 + \epsilon) \dot{\psi} \dot{\phi} \approx 0,$$

onde foi empregado o fato que $\dot{\phi}^2 \ll |\dot{\psi} \dot{\phi}|$. Com isto, obtém-se a estimativa para a taxa de precessão

$$\dot{\phi} \approx -\frac{3}{2} \left(\frac{\epsilon}{1 + \epsilon} \right) \Omega^2 \frac{\cos \theta}{\dot{\psi}}.$$

O sinal negativo para $\dot{\phi}$ indica que o sentido de rotação da linha dos nodos em torno de Z ocorre no sentido oposto de rotação em torno do eixo rotacional, o que também está indicado na figura 3.30.

Tomando $\dot{\psi} \simeq 2\pi T_{\text{rot}}^{-1}$, $\theta = \theta_{\text{obl}}$ e $\Omega^2 \approx 1,29511 \times 10^{-13} \text{ s}^{-2}$, obtém-se a seguinte estimativa para a taxa de precessão do eixo rotacional:

$$\left| \dot{\phi} \right| \approx 7,96659 \times 10^{-12} \text{ rad/s} \xrightarrow{\text{Período de precessão estimado}} T_{\text{est}} = \frac{2\pi}{\left| \dot{\phi} \right|} \approx 7,88692 \times 10^{11} \text{ s} \approx 25.060,51 \text{ anos.}$$

Comparando com o período medido $T_{\text{prec}} = 25.771,4$ anos, observa-se que a estimativa realizada difere em apenas 2,8% do valor medido. Cálculos mais precisos fornecem resultados muito mais próximos ao valor medido.

Por outro lado, a variação da obliquidade do eixo rotacional não pode ser explicada pela nutação resultante da ação combinada da Lua e do Sol. O período de 41.000 anos é causado pela lenta mudança no plano da eclíptica, causada pelas perturbações introduzidas pelos demais planetas do Sistema Solar, principalmente de Júpiter.

Em adição à precessão retrógrada do eixo rotacional e da variabilidade na sua obliquidade, existem também mudanças periódicas na excentricidade da órbita da Terra que também são causadas pelos outros planetas, principalmente por Júpiter. A excentricidade pode variar de 0 a 0,06 em um período de cerca de 105.000 anos e esta variabilidade está associada com a ocorrência de eras glaciais no planeta.

3.12.1.2 A OSCILAÇÃO DE CHANDLER

Um outro fenômeno que ocorre devido ao fato de a Terra ser um sólido oblato é a chamada *oscilação de Chandler*, a qual consiste na precessão livre do eixo rotacional, que ocorre em um período pouco maior que um ano. Esta oscilação, representada na figura 3.34, foi descoberta em 1891 pelo astrônomo norte-americano Seth Carlo Chandler.

Em um período tão curto de tempo, o efeito do torque analisado na seção anterior é desprezível e o planeta se comporta aproximadamente como um sólido oblato livre. Nesta situação, de acordo com a discussão realizada na seção 3.11.1, se o vetor ω na figura 3.34 é a velocidade angular total da Terra, com $\omega_3 = 2\pi T_{\text{rot}}^{-1}$ associada com o período rotacional, então a precessão em torno do eixo rotacional ocorre com a frequência angular (3.42), isto é,

$$\Omega_{\text{est}} = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 \approx \frac{2\pi\epsilon}{T_{\text{rot}}} \approx 2,385 \times 10^{-7} \text{ rad/s},$$

o que corresponde ao período estimado

$$T_{\text{est}} = \frac{2\pi}{\Omega_{\text{est}}} = 26,35 \text{ Ms} \approx 305,8 \text{ dias}.$$

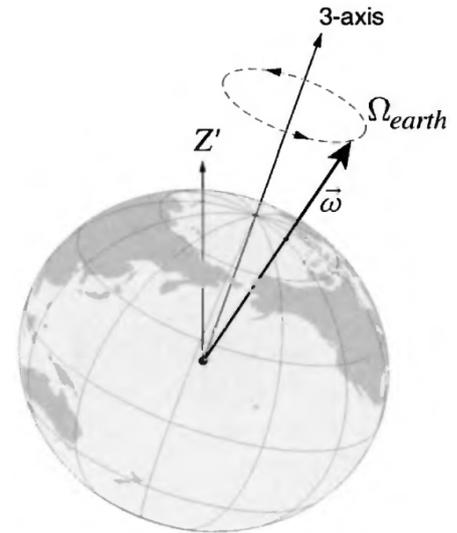


Figura 3.34: Ilustração da oscilação de Chandler.

O valor correto do período da oscilação de Chandler é difícil de ser medido e vale $T_{\text{Chandler}} = 433$ dias. A discrepância vem do fato de que Terra não é realmente um corpo rígido, sendo, na verdade, quinzenalmente deformada pelo efeito de maré com a Lua. Este efeito, embora pequeno para o raio da Terra, é suficiente para explicar a diferença em cerca de 100 dias entre o valor estimado e o valor medido.

Outro ponto ainda não esclarecido a respeito da oscilação de Chandler está no fato de que a mesma já deveria há muito ter sido amortecida, justamente pelos processos irreversíveis envolvidos na deformação da crosta terrestre pelas marés. A manutenção desta oscilação é em parte atribuída a terremotos no interior da crosta e ao movimento diferencial do núcleo sólido. Recentemente,¹⁹ constatou-se que a oscilação de Chandler sofreu uma alteração em 180° em sua fase em 1920 e, mais recentemente, em 2005. As causas destas mudanças de fase ainda são desconhecidas.

3.12.1.3 DETERMINAÇÃO DO TERCEIRO MOMENTO PRINCIPAL DE INÉRCIA

A principal suposição realizada ao longo desta seção é que a Terra é um sólido oblato, ou seja, os momentos principais de inércia relativos aos dois eixos principais perpendiculares ao eixo rotacional são iguais entre si. Na verdade, estes dois momentos são ligeiramente distintos entre si, mas a determinação da diferença é extremamente difícil de ser realizada.

Em um trabalho recente (VILCU, 2011), modelos do potencial geogravitacional foram atualizados com novas medidas de satélite. De acordo com os resultados deste trabalho, os valores médios dos momentos principais de inércia da Terra são

$$I_1 = 8,010935639 \times 10^{37} \text{ kg.m}^2, \quad I_2 = 8,011108377 \times 10^{37} \text{ kg.m}^2, \quad I_3 = 8,037333747 \times 10^{37} \text{ kg.m}^2.$$

Observa-se que a diferença relativa entre I_1 e I_2 é de apenas

$$\left| 1 - \frac{I_2}{I_1} \right| = 2,15 \times 10^{-5} = 0,00215\%.$$

Com estes valores, o coeficiente de achatamento ϵ , dado originalmente por (3.46), passa a ser calculado como

$$\epsilon' = \frac{2I_3 - (I_1 + I_2)}{2I_3} = 0,003273690.$$

As orientações dos eixos principais de inércia são as seguintes. O eixo x_3 permanece orientado ao longo do eixo rotacional da Terra. O eixo x_1 corta o Equador na longitude $\lambda_1 \simeq -15,2^\circ$ de Greenwich (Oceano Atlântico), enquanto que o eixo x_2 corta o Equador na longitude $\lambda_2 \simeq +74,8^\circ$ (Oceano Índico).

¹⁹Ver <https://www.technologyreview.com/s/415093/earths-chandler-wobble-changed-dramatically-in-2005/> ou (MALKIN; MILLER, 2010).

3.12.2 ESFERAS ROLANDO SOBRE SUPERFÍCIES

Será discutido aqui o problema básico de uma esfera homogênea com massa M e raio R rolando sem deslizar sobre uma superfície horizontal.

Usando as quantidades definidas na figura 3.35, as quais seguem as convenções realizadas nas figuras 3.15 e 3.16, é conveniente usar a expressão (3.29c) para a energia cinética total quando a origem do referencial do corpo está no centro de massa (o centro geométrico) da esfera. Desta forma, se $\mathbf{R}' = (X'_1, X'_2, a)$, então

$$T = \frac{1}{2}M (\dot{X}'_1{}^2 + \dot{X}'_2{}^2) + \frac{1}{2}I\omega^2,$$

onde I é momento de inércia em relação ao eixo de rotação. Como a esfera é homogênea, qualquer eixo passando pelo seu centro de massa é um eixo principal e o momento de inércia é dado pela expressão no item (f) da tabela 3.1,

$$I = \frac{2}{5}Ma^2.$$

Serão empregadas as componentes da velocidade angular no referencial inercial S' em termos dos ângulos de Euler, dadas por (3.33a). Neste caso,

$$\begin{aligned} \omega^2 &= (\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi)^2 + (\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi)^2 + (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 \\ &= \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta. \end{aligned}$$

Portanto, como a energia potencial é constante, a Lagrangiana fica escrita

$$L \{ \dot{X}'_1, \dot{X}'_2, \dot{\phi}, \theta, \dot{\psi} \} = \frac{1}{2}M (\dot{X}'_1{}^2 + \dot{X}'_2{}^2) + \frac{1}{2}I (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta). \quad (3.50a)$$

Como a esfera está rolando sobre a superfície, é necessário empregar a condição de rolamento sem deslizamento (3.31), a qual fica

$$\mathbf{V}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C = 0.$$

No referencial S' a posição do ponto de contato (C) em relação ao centro de massa (O) é dada simplesmente por $\mathbf{r}_C = (0, 0, -a)$. Assim,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C &= \begin{vmatrix} \hat{e}'_1 & \hat{e}'_2 & \hat{e}'_3 \\ \omega'_1 & \omega'_2 & \omega'_3 \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix} = -a (\omega'_2 \hat{e}'_1 - \omega'_1 \hat{e}'_2) \\ &= -a \left[(\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi) \hat{e}'_1 - (\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi) \hat{e}'_2 \right]. \end{aligned}$$

Portanto, resultam as duas equações de vínculos (não holônomos)

$$f_1 = -\dot{\psi} \sin \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi - \frac{\dot{X}'_1}{a} = 0, \quad f_2 = \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi + \frac{\dot{X}'_2}{a} = 0. \quad (3.50b)$$

As equações de Euler-Lagrange para a Lagrangiana (3.50a) em conjunto com os vínculos não holônomos (3.50b) são dadas pela expressão (1.62). Resultam então as equações

$$\begin{aligned} (X'_1): \quad & \frac{\partial L}{\partial X'_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}'_1} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \dot{X}'_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \dot{X}'_1} = 0 \\ (X'_2): \quad & \frac{\partial L}{\partial X'_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}'_2} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \dot{X}'_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \dot{X}'_2} = 0 \end{aligned}$$

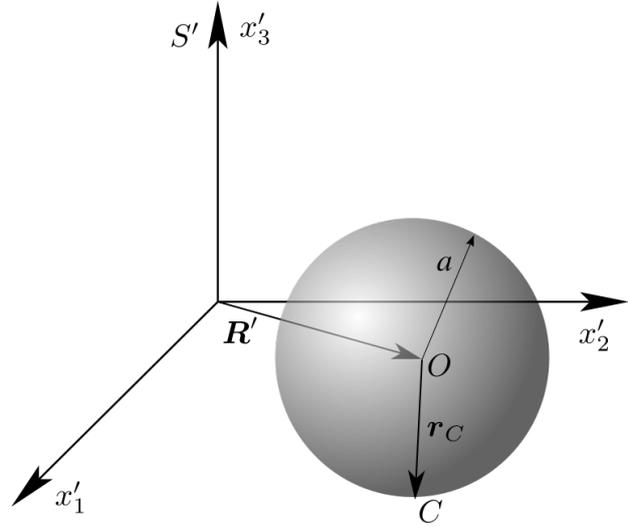


Figura 3.35: Uma esfera homogênea com massa M e raio a rolando sem deslizar sobre uma superfície horizontal.

$$\begin{aligned}
(\phi) : & \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\phi}} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \dot{\phi}} = 0 \\
(\theta) : & \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\theta}} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \dot{\theta}} = 0 \\
(\psi) : & \quad \frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\psi}} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \dot{\psi}} = 0,
\end{aligned}$$

$$(X'_1) : \quad M \ddot{X}'_1 = -\frac{\lambda_1}{a} \quad (3.51a)$$

$$(X'_2) : \quad M \ddot{X}'_2 = \frac{\lambda_2}{a} \quad (3.51b)$$

$$(\phi) : \quad I \frac{d}{dt} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) = I \dot{\omega}'_3 = 0 \quad (3.51c)$$

$$(\theta) : \quad I (\ddot{\theta} + \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta) = \lambda_1 \sin \phi + \lambda_2 \cos \phi \quad (3.51d)$$

$$(\psi) : \quad I \frac{d}{dt} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = -(\lambda_1 \cos \phi - \lambda_2 \sin \phi) \sin \theta. \quad (3.51e)$$

Estas equações, em conjunto com os vínculos, formam um sistema de 07 equações para 07 incógnitas (X'_1 , X'_2 , ϕ , θ , ψ , λ_1 e λ_2).

Até o momento, já se conhecem duas constantes de movimento: ω_3 (de 3.51c) e a energia cinética. Para se obter mais informações das equações de movimento, realizam-se as seguintes operações:

$$\begin{aligned}
& (3.51d) \times \cos \phi + (3.51e) \times \frac{\sin \phi}{\sin \theta} : \\
\lambda_2 &= I (\ddot{\theta} + \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta) \cos \phi + I \frac{d}{dt} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \\
&= I \left(\ddot{\theta} \cos \phi - \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi + \ddot{\psi} \frac{\sin \phi}{\sin \theta} + \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi \right).
\end{aligned}$$

Mas, de (3.51c) conclui-se que

$$\dot{\phi} = -\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\theta} \psi \sin \theta.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_2}{I} &= \ddot{\theta} \cos \phi - \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi + \ddot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta + \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi \\
&= \frac{d}{dt} (\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi) = \dot{\omega}'_1.
\end{aligned}$$

Ou seja, do resultado acima e de (3.51b), conclui-se que

$$\lambda_2 = I \dot{\omega}'_1 = M a \ddot{X}'_2.$$

Mas, o vínculo f_2 em (3.50b) mostra também que

$$\dot{X}'_2 + a \omega'_1 = 0 \implies \ddot{X}'_2 = -a \dot{\omega}'_1.$$

Ou seja,

$$\lambda_2 = I \dot{\omega}'_1 = -M a^2 \dot{\omega}'_1.$$

Como I , M e a^2 são todas quantidades positivas, conclui-se portanto que

$$\lambda_2 = 0.$$

Isto implica então que $\dot{X}'_2 = \text{cte.}$ e $\omega'_1 = \text{cte.}$

Uma análise semelhante mostra que $\lambda_1 = 0$ e, portanto, $\dot{X}'_1 = \text{cte.}$ e $\omega'_2 = \text{cte.}$ Ou seja, sobre uma superfície horizontal, uma esfera rola com velocidade angular constante e com seu centro de massa se deslocando com velocidade constante ao longo de uma linha reta.

3.12.3 O DISCO DE EULER

Um *disco de Euler* é um disco rígido que rola sem deslizar sobre uma superfície plana. Esse disco pode apresentar, em geral, rotações em três eixos perpendiculares: *rotação*, *precessão* e *tombamento*. Este é um problema tradicional de dinâmica de corpos rígidos sem pontos fixos, em relação ao qual muitos vídeos e simulações podem ser encontrados. Alguns exemplos são:²⁰ [MATLAB simulation of a rolling thin disk undergoing a steady motion](#), [MATLAB simulation of a thin disk undergoing a typical rolling motion](#), [Simulation of Classical Rolling Coin Dynamics by MATLAB](#), [3D Dynamic Simulation Rolling Disc](#), [Dance of the Wedding Rings \(Rolling Disk or Euler's Disk\)](#) e [The Maths of Spinning Coins and Euler's Disk](#).

Nesta seção, alguns casos de movimentos de discos de Euler serão analisados e discutidos.

Exemplo 3.7 (Disco rolando sobre superfície horizontal). Retornando ao problema do disco homogêneo com massa M e raio a que rola sobre uma superfície horizontal sem tombar, discutido no exercício 1.5, o seu movimento será agora deduzido.

As quantidades relevantes para este problema estão definidas na figura 3.36. Essas quantidades seguem as convenções realizadas nas figuras 3.15 e 3.16, enquanto que os ângulos ϕ e ψ são os ângulos de Euler definidos na figura 3.20. Dessa forma, o ponto O é o centro de massa do disco e será também a origem do referencial do corpo.

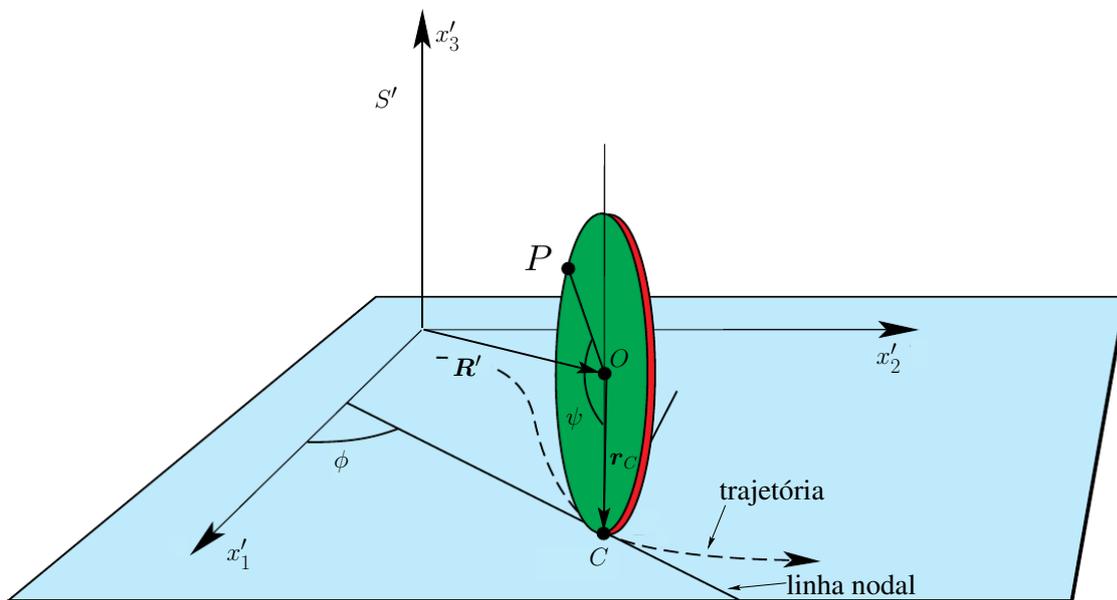


Figura 3.36: Disco rolando sem tombar sobre uma superfície horizontal.

Orientando o eixo x_3 na direção perpendicular ao plano do disco e os eixos x_1 e x_2 sobre o plano do mesmo, todos serão eixos principais de inércia, com $I_1 = I_2$ e $I_3 = 2I_1$, de acordo com o lema 3.2 e o teorema 3.3. Assim, basta calcular

$$I_3 = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) (x_1^2 + x_2^2), \text{ com } \rho = \sigma \delta(x_3) \text{ e } \sigma = \frac{M}{\pi a^2},$$

$$I_3 = 2\pi\sigma \int_0^a dr r^3 = \frac{\pi}{2}\sigma a^4 = \frac{1}{2}Ma^2.$$

Portanto, a matriz de inércia do disco é

$$\mathbf{l} = I \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ sendo } I = \frac{1}{4}Ma^2.$$

O movimento do disco será agora descrito empregando-se o formalismo lagrangiano e os ângulos de Euler. Neste caso, definem-se as seguintes condições iniciais para a posição inicial

²⁰Ver hyperlinks no arquivo PDF.

do centro de massa e os ângulos de Euler:

$$X'_{10} = 0, \quad X'_{20} = 0, \quad X'_{30} = a = \text{cte.}, \quad \phi_0 = \pi, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \psi_0 = 0.$$

Neste caso, a matriz de rotação (3.32b) assume a forma

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

resultando

$$x_1 = -x'_1 \quad x_2 = x'_2 \quad x_3 = x'_3.$$

Para o cálculo da energia cinética total do disco, é conveniente usar a expressão (3.29c), válida quando a origem do referencial do corpo está no centro de massa (o centro geométrico) do disco. Desta forma, se $R' = (X'_1, X'_2, a)$, a energia cinética fica

$$T = \frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2} [I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + I_3\omega_3^2],$$

onde foram empregadas as componentes da velocidade angular no referencial do corpo.

Neste momento, uma observação importante deve ser feita. Em função da condição inicial adotada para o ângulo ϕ , a ilustração para o valor instantâneo deste ângulo na figura 3.36 na realidade corresponde ao ângulo inicial $\phi_0 = \pi$ adicionado ao valor ilustrado. Este fato será importante para as componentes da velocidade angular no referencial fixo, pois nas mesmas deve ser realizada a transformação $\phi \rightarrow \phi + \pi$. Dessa maneira, a partir de (3.33), as componentes da velocidade angular em ambos os referenciais (S' e S) são

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi & \omega'_1 &= -\dot{\theta} \cos \phi - \dot{\psi} \sin \phi \sin \theta \\ \omega_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi & \omega'_2 &= -\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \phi \sin \theta \\ \omega_3 &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} & \omega'_3 &= \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Com isso, a Lagrangiana fica

$$L \{ \dot{X}'_1, \dot{X}'_2, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \dot{\psi} \} = \frac{1}{2}M (\dot{X}'_1{}^2 + \dot{X}'_2{}^2) + \frac{1}{2}I \left[\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + 2(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \right],$$

uma vez que a energia potencial é constante.

Como ocorre rolamento, a condição (3.31) deve ser empregada. De acordo com a figura 3.36, $r_C = (0, 0, -a)$, de onde se obtém

$$\begin{aligned} \omega \times r_C &= \begin{vmatrix} \hat{e}'_1 & \hat{e}'_2 & \hat{e}'_3 \\ \omega'_1 & \omega'_2 & \omega'_3 \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix} = -a (\omega'_2 \hat{e}'_1 - \omega'_1 \hat{e}'_2). \text{ Ou seja,} \\ \dot{X}'_1 - a\omega'_2 &= 0, \quad \dot{X}'_2 + a\omega'_1 = 0. \end{aligned}$$

Nota-se que foram empregadas as componentes de ω no referencial S' , as quais são dadas agora por (3.52). Estas condições fornecem dois vínculos não holônomos para o problema. Um terceiro vínculo (holônomo) vem da condição de não tombamento. Esta imposição faz com que θ (o ângulo entre os eixos x_3 e x'_3) permaneça sempre constante. Portanto, os vínculos impostos sobre o movimento do disco são

$$f_1 = \dot{X}'_1 - a\dot{\psi} \cos \phi = 0, \quad f_2 = \dot{X}'_2 - a\dot{\psi} \sin \phi = 0, \quad f_3 = \theta - \theta_0 = 0,$$

sendo que a imposição $\theta = \pi/2$ já foi aplicada sobre f_1 e f_2 .

Como o vínculo f_3 é holônomo, este também pode ser diretamente substituído na Lagrangiana, a qual se reduz então a

$$L \{ \dot{X}'_1, \dot{X}'_2, \dot{\phi}, \dot{\psi} \} = \frac{1}{2}M (\dot{X}'_1{}^2 + \dot{X}'_2{}^2) + \frac{1}{2}I (\dot{\phi}^2 + 2\dot{\psi}^2).$$

As equações de Euler-Lagrange são dadas por (1.62), resultando

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial X'_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}'_1} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \dot{X}'_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \dot{X}'_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial X'_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}'_2} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \dot{X}'_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \dot{X}'_2} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\phi}} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \dot{\phi}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\psi}} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \dot{\psi}} = 0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} -M\ddot{X}'_1 + \lambda_1 = 0 \\ -M\ddot{X}'_2 + \lambda_2 = 0 \\ I\ddot{\phi} = 0 \\ 2I\ddot{\psi} + \lambda_1 a \cos \phi + \lambda_2 a \sin \phi = 0. \end{array} \right.$$

A solução para $\phi(t)$ é

$$\phi(t) = \dot{\phi}_0 t.$$

Como os vínculos f_1 e f_2 impõe

$$\ddot{X}'_1 = a\ddot{\psi} \cos \phi - a\dot{\phi}\dot{\psi} \sin \phi, \quad \ddot{X}'_2 = a\ddot{\psi} \sin \phi + a\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \phi,$$

os vínculos são dados por

$$\begin{aligned} \lambda_1 = M\ddot{X}'_1 &= Ma \left(\ddot{\psi} \cos \phi - \dot{\psi}\dot{\phi} \sin \phi \right) = Ma \left(\ddot{\psi} \cos \phi - \dot{\phi}_0 \dot{\psi} \sin \phi \right) \\ \lambda_2 = M\ddot{X}'_2 &= Ma \left(\ddot{\psi} \sin \phi + \dot{\psi}\dot{\phi} \cos \phi \right) = Ma \left(\ddot{\psi} \sin \phi + \dot{\phi}_0 \dot{\psi} \cos \phi \right). \end{aligned}$$

Da última equação resulta

$$\begin{aligned} 2I\ddot{\psi} + Ma^2 \left(\ddot{\psi} \cos \phi - \dot{\phi}_0 \dot{\psi} \sin \phi \right) \cos \phi + Ma^2 \left(\ddot{\psi} \sin \phi + \dot{\phi}_0 \dot{\psi} \cos \phi \right) \sin \phi &= 0, \\ 2I\ddot{\psi} + Ma^2 \ddot{\psi} = 0 &\implies \ddot{\psi} = 0. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\psi(t) = \dot{\psi}_0 t + \psi_0 = \dot{\psi}_0 t.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \dot{X}'_1 &= a\dot{\psi} \cos \phi = a\dot{\psi}_0 \cos(\dot{\phi}_0 t) \\ \dot{X}'_2 &= a\dot{\psi} \sin \phi = a\dot{\psi}_0 \sin(\dot{\phi}_0 t) \end{aligned} \implies \begin{cases} X'_1(t) = a \frac{\dot{\psi}_0}{\dot{\phi}_0} \sin(\dot{\phi}_0 t) \\ X'_2(t) = a \frac{\dot{\psi}_0}{\dot{\phi}_0} [1 - \cos(\dot{\phi}_0 t)]. \end{cases}$$

Observa-se que a trajetória do centro de massa é uma circunferência:

$$X'^2_1 + \left(X'_2 - a \frac{\dot{\psi}_0}{\dot{\phi}_0} \right)^2 = \left(a \frac{\dot{\psi}_0}{\dot{\phi}_0} \right)^2.$$

Exemplo 3.8 (Disco rolando (sem tombar) sobre um plano inclinado). Considera-se agora a dinâmica de um disco uniforme rolando sobre um plano de inclinação α , como ilustrado na figura 3.37.

Orientando agora os eixos x'_1 e x'_2 sobre o plano inclinado e definindo $U = 0$ no ponto superior da inclinação, a energia potencial é dada em termos da posição do centro de massa como

$$U(x'_1) = -MgX'_1 \sin \alpha.$$

Usando as mesmas condições iniciais do problema anterior,

$$X'_{10} = 0 \quad X'_{20} = 0 \quad \phi_0 = \pi \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2} \quad \psi_0 = 0,$$

e as equações de vínculos, obtidas a partir de (3.31) e (3.52),

$$f_1 = \dot{X}'_1 - a\dot{\psi} \cos \phi = 0, \quad f_2 = \dot{X}'_2 - a\dot{\psi} \sin \phi = 0,$$

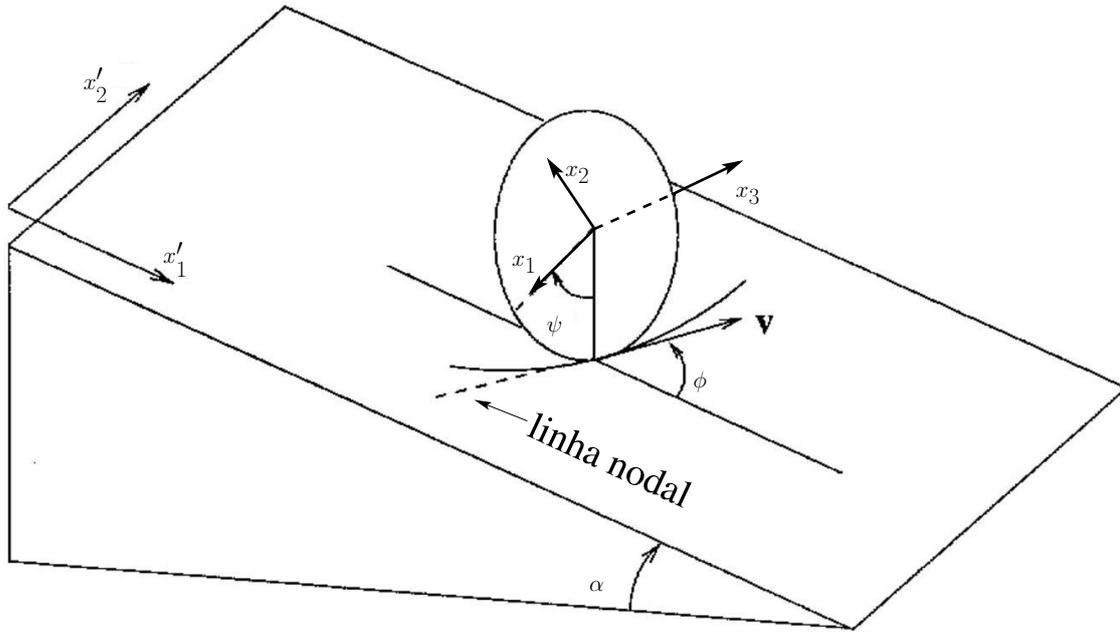


Figura 3.37: Um disco rola sem deslizar e sem tombar sobre um plano inclinado fixo.

onde novamente é imposta a proibição de tombamento sobre o disco.

Assim, a Lagrangiana fica agora

$$L = \frac{1}{2}M (\dot{X}'_1 + \dot{X}'_2) + \frac{1}{2}I (\dot{\phi}^2 + 2\dot{\psi}^2) + MgX'_1 \text{sen } \alpha.$$

De (1.62), as equações de Euler-Lagrange ficam

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial X'_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}'_1} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \dot{X}'_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \dot{X}'_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial X'_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}'_2} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \dot{X}'_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \dot{X}'_2} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\phi}} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \dot{\phi}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\psi}} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \dot{\psi}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Mg \text{sen } \alpha - M\ddot{X}'_1 + \lambda_1 = 0 \\ -M\ddot{X}'_2 + \lambda_2 = 0 \\ -I\ddot{\phi} = 0 \\ 2I\ddot{\psi} + \lambda_1 a \cos \phi + \lambda_2 a \text{sen } \phi = 0. \end{cases}$$

Novamente,

$$\phi(t) = \dot{\phi}_0 t.$$

Empregando-se os vínculos, resulta para os multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= M\ddot{X}'_1 - Mg \text{sen } \alpha = Ma (\ddot{\psi} \cos \phi - \dot{\phi}_0 \dot{\psi} \text{sen } \phi) - Mg \text{sen } \alpha \\ \lambda_2 &= M\ddot{X}'_2 = Ma (\ddot{\psi} \text{sen } \phi + \dot{\phi}_0 \dot{\psi} \cos \phi). \end{aligned}$$

E a última equação fornece

$$\begin{aligned} 2I\ddot{\psi} + \lambda_1 a \cos \phi + \lambda_2 a \text{sen } \phi &= 0, \\ \ddot{\psi} &= \frac{2g}{3a} \text{sen } \alpha \cos (\dot{\phi}_0 t). \end{aligned}$$

A solução da EDO para $\psi(t)$ é

$$\psi(t) = \dot{\psi}_0 t + \frac{2g \text{sen } \alpha}{3a\dot{\phi}_0^2} [1 - \cos (\dot{\phi}_0 t)].$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\dot{X}'_1 &= a\dot{\psi} \cos \phi = a \left[\dot{\psi}_0 + \frac{2g \operatorname{sen} \alpha}{3a\dot{\phi}_0} \operatorname{sen}(\dot{\phi}_0 t) \right] \cos(\dot{\phi}_0 t) \\ \dot{X}'_2 &= a\dot{\psi} \operatorname{sen} \phi = a \left[\dot{\psi}_0 + \frac{2g \operatorname{sen} \alpha}{3a\dot{\phi}_0} \operatorname{sen}(\dot{\phi}_0 t) \right] \operatorname{sen}(\dot{\phi}_0 t),\end{aligned}$$

cujas soluções são, surpreendentemente,

$$\begin{aligned}X'_1(t) &= \left[\frac{a\dot{\psi}_0}{\dot{\phi}_0} + \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{3\dot{\phi}_0^2} \operatorname{sen}(\dot{\phi}_0 t) \right] \operatorname{sen}(\dot{\phi}_0 t) \\ X'_2(t) &= \frac{a\dot{\psi}_0}{\dot{\phi}_0} + \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{3\dot{\phi}_0} t - \left[\frac{a\dot{\psi}_0}{\dot{\phi}_0} + \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{3\dot{\phi}_0^2} \operatorname{sen}(\dot{\phi}_0 t) \right] \cos(\dot{\phi}_0 t) \\ &= \frac{a\dot{\psi}_0}{\dot{\phi}_0} \left[1 - \cos(\dot{\phi}_0 t) \right] + \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{3\dot{\phi}_0} \left[t - \frac{1}{2\dot{\phi}_0} \operatorname{sen}(2\dot{\phi}_0 t) \right].\end{aligned}$$

Chamando

$$\beta = \frac{a\dot{\psi}_0}{\dot{\phi}_0}, \quad \gamma = \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{3\dot{\phi}_0^2},$$

pode-se escrever

$$\begin{aligned}X'_1(t) &= \left[\beta + \gamma \operatorname{sen}(\dot{\phi}_0 t) \right] \operatorname{sen}(\dot{\phi}_0 t) \\ X'_2(t) &= \beta \left[1 - \cos(\dot{\phi}_0 t) \right] + \gamma \left[\dot{\phi}_0 t - \operatorname{sen}(2\dot{\phi}_0 t) \right].\end{aligned}$$

Se $\dot{\psi}_0 = 0$, então $\beta = 0$ e a solução se reduz a

$$\begin{aligned}X'_1(t) &= \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{6\dot{\phi}_0^2} \left[1 - \cos(2\dot{\phi}_0 t) \right] \\ X'_2(t) &= \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{6\dot{\phi}_0^2} \left[2\dot{\phi}_0 t - \operatorname{sen}(2\dot{\phi}_0 t) \right].\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\left(X'_1 - \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{6\dot{\phi}_0^2} \right)^2 + \left(X'_2 - \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{3\dot{\phi}_0} t \right)^2 = \left(\frac{g \operatorname{sen} \alpha}{6\dot{\phi}_0^2} \right)^2,$$

isto é, o centro de massa percorre uma circunferência de raio $g \operatorname{sen} \alpha / 6\dot{\phi}_0^2$ centrada no ponto

$$\mathbf{r}'_c(t) = \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{6\dot{\phi}_0^2} \left(\hat{\mathbf{e}}_1 + 2\dot{\phi}_0 t \hat{\mathbf{e}}_2 \right).$$