

# A FORMULAÇÃO LAGRANGIANA DA MECÂNICA CLÁSSICA

**N**ESTE CAPÍTULO será realizada uma introdução às formulações Lagrangiana e Hamiltoniana da mecânica clássica. De forma distinta em relação ao formalismo original proposto por Isaac Newton (1642 - 1727) em seu livro *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*<sup>1</sup> (publicado em 1687), as formulações Lagrangiana e Hamiltoniana fazem uso dos métodos do cálculo variacional para postular que a evolução espaço-temporal de um dado sistema físico é determinada por princípios extremantes impostos a certos funcionais, os quais são determinados pelas quantidades dinâmicas desse sistema.

A proposição de princípios extremantes que determinam o comportamento de sistemas naturais tem sido realizada por filósofos naturais em períodos tão remotos quanto o século XIII, como nos trabalhos do filósofo natural alemão Jordanus Nemorarius (Jordanus de Nemore) (1225 - 1260). As principais contribuições para a formulação atual foram realizadas a partir do século XVIII, com os trabalhos de Johann Bernoulli (1667 - 1748), Jean le Rond d'Alembert (1717 - 1783), Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813) e William Rowan Hamilton (1805 - 1865). Cabe aqui mencionar também o Princípio de Tempo Mínimo proposto por Pierre de Fermat (1601(7) - 1665) para a óptica geométrica.

As formulações da mecânica baseadas em princípios extremantes são equivalentes e complementares à formulação Newtoniana. Em determinadas situações, como por exemplo na dinâmica de sistemas sujeitos a restrições (*vínculos*) de natureza geométrica ou cinemática, a formulação Lagrangiana revela-se mais adequada que a Newtoniana, uma vez que esta última exige a determinação de forças de vínculo para a obtenção das equações de movimento, o que nem sempre é possível.

Outro aspecto positivo da formulação Lagrangiana está na sua conexão a leis de conservação e às propriedades de simetria dos sistemas dinâmicos. Além disso, o fato de ser baseada em princípios extremantes, o que também é realizado em outras áreas da física além da mecânica, introduz uma uniformidade nos formalismos que permite estabelecer de forma direta a interrelação entre fenômenos nas distintas áreas. Estas vantagens revelaram-se convenientes para o posterior desenvolvimento, ao longo do século XX, da mecânica quântica e da teoria quântica de campos.

## 1.1 REVISÃO DA MECÂNICA NEWTONIANA

Antes de se introduzir os métodos matemáticos e princípios físicos associados às formulações Lagrangiana e Hamiltoniana, é importante realizar uma revisão da mecânica Newtoniana.

### 1.1.1 LEIS DE NEWTON

As três leis de Newton para o movimento de corpos materiais sob a ação de forças são apresentadas brevemente a seguir. Discussões a respeito das interpretações e das consequências desses postulados não serão realizadas aqui.

---

<sup>1</sup>Princípios Matemáticos de Filosofia Natural.

**Primeira Lei.** Existem sistemas de referência, denominados *inerciais*, em relação aos quais toda partícula isolada descreve um movimento retilíneo uniforme.

Neste postulado, uma partícula é “isolada” se estiver distante o suficiente de qualquer outro objeto material. Está implícita também a noção de *tempo absoluto*, que flui uniformemente em qualquer referencial inercial.

**Segunda Lei.** Em qualquer referencial inercial, o movimento de uma partícula é determinado pela equação de movimento

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}, \quad (1.1)$$

onde  $\mathbf{p}(t) = m\dot{\mathbf{r}}(t)$  é o *momentum linear* da partícula, sendo  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  a sua posição instantânea e  $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt$  a velocidade instantânea. Ainda em (1.1), a quantidade  $\mathbf{F}$  é a força total que atua sobre a partícula.

A segunda lei pressupõe que a cada partícula está associada uma quantidade escalar positiva  $m$ , denominada a *massa* da mesma, e que possui o mesmo valor em todos os referenciais inerciais.

**Terceira Lei.** A cada ação corresponde uma reação igual e oposta. Isto é, se  $\mathbf{F}_{ab}$  é a força exercida sobre a partícula  $a$  pela partícula  $b$ , então

$$\mathbf{F}_{ba} = -\mathbf{F}_{ab}, \quad (1.2)$$

sendo  $\mathbf{F}_{ba}$  a força sobre  $b$  devida à partícula  $a$ .

Este enunciado é denominada a *forma fraca* da terceira lei.

Na *forma forte*, exige-se também que, além de iguais e opostas, as forças  $\mathbf{F}_{ab}$  e  $\mathbf{F}_{ba}$  sejam dirigidas ao longo da linha que une as duas partículas. Um exemplo de força que viola esta condição é a força magnética exercida entre duas cargas elétricas em movimento.

Quando o sistema físico em estudo é composto por um conjunto de  $N$  partículas interagentes e que sofrem de forma simultânea a ação de forças que se originam de outras fontes, a força total na equação de movimento (1.1) pode ser decomposta em:

**Forças internas.** As quais surgem devido às interações entre as partículas que compõe o sistema. Será assumido que as forças internas obedecem a terceira lei de Newton (eq. 1.2).

**Forças externas.** Produzidas por agentes externos ao sistema de  $N$  partículas.

Com estas definições, a equação de movimento da partícula  $a$  (com  $a = 1, 2, \dots, N$ ) é escrita como

$$\dot{\mathbf{p}}_a = \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^N \mathbf{F}_{ab} + \mathbf{F}_a^{(e)}, \quad (1.3)$$

onde

$$\dot{\mathbf{p}}_a = \frac{d}{dt}(m_a \mathbf{v}_a) = \frac{d}{dt}(m_a \dot{\mathbf{r}}_a), \quad (1.4)$$

sendo  $\mathbf{p}_a = \mathbf{p}_a(t)$  o *momentum linear* da partícula  $a$ , com  $m_a$  e  $\mathbf{v}_a$  sendo respectivamente a massa e a velocidade instantânea da mesma. A quantidade  $\mathbf{F}_a^{(e)}$  denota a força externa total atuando sobre a partícula.

Deve se observar também que a equação (1.3) descarta a possibilidade de *auto-interação*, ou seja, a ação da partícula  $a$  sobre si mesma. Na mecânica clássica, a auto-interação é suposta inexistente.

### 1.1.2 TEOREMAS DE CONSERVAÇÃO

A partir das quantidades definidas e regidas pelas Leis de Newton, pode-se definir diversas outras grandezas dinâmicas importantes, tais como energia (cinética, potencial e mecânica) e *momentum angular*. Estas grandezas, juntamente com o momentum linear definido em (1.4), satisfazem teoremas de conservação, os quais podem ser deduzidos a partir das Leis de Newton.

Inicialmente, algumas grandezas adicionais associadas ao sistema de  $N$  partículas regido por (1.3) serão definidas:

**Centro de massa.** O *centro de massa* do sistema de  $N$  partículas é aquele ponto no espaço ao qual pode ser atribuída a massa total do sistema e que se move somente sob a ação das forças externas. Este ponto, denotado por  $\mathbf{R}(t)$ , é definido pela expressão

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\sum_{a=1}^N m_a \mathbf{r}_a(t)}{\sum_{a=1}^N m_a} = \frac{1}{M} \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{r}_a, \quad (1.5a)$$

sendo  $M = \sum_{a=1}^N m_a$  a *massa total* do sistema.

**Momentum linear total.** Definido como o vetor resultante da soma de todos os *momenta* lineares do sistema,

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{a=1}^N \mathbf{p}_a(t), \quad (1.5b)$$

sendo  $\mathbf{P}(t)$  o momentum linear total.

**Momentum angular total.** O *momentum* angular total do sistema de partículas em relação a um ponto  $P$  no espaço, localizado pelo vetor posição  $\mathbf{r}_P$ , é dado por

$$\mathbf{L}_P = \sum_{a=1}^N m_a (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_P) \times (\dot{\mathbf{r}}_a - \dot{\mathbf{r}}_P) = \sum_{a=1}^N (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_P) \times (\mathbf{p}_a - m_a \dot{\mathbf{r}}_P), \quad (1.5c)$$

sendo definidos também  $\mathbf{r}_{aP} \doteq \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_P$  o vetor posição instantânea da partícula  $a$  em relação ao ponto  $P$  e  $\dot{\mathbf{r}}_{aP} \doteq \dot{\mathbf{r}}_a - \dot{\mathbf{r}}_P$  a correspondente velocidade relativa instantânea da partícula em relação a  $P$ .

**Energia cinética total.** Esta é definida simplesmente como

$$T = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a v_a^2 = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a \dot{\mathbf{r}}_a^2. \quad (1.5d)$$

A partir destas quantidades, os seguintes teoremas de conservação podem ser deduzidos.

### 1.1.2.1 CONSERVAÇÃO DO MOMENTUM LINEAR

Somando-se as equações (1.3) sobre todas as partículas do sistema, obtém-se

$$\sum_{a=1}^N \dot{\mathbf{p}}_a = \sum_{\substack{a,b=1 \\ b \neq a}}^N \mathbf{F}_{ab} + \sum_{a=1}^N \mathbf{F}_a^{(e)}.$$

Porém,

$$\sum_{\substack{a,b=1 \\ b \neq a}}^N \mathbf{F}_{ab} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b=1 \\ b \neq a}}^N (\mathbf{F}_{ab} + \mathbf{F}_{ba}) \xrightarrow{(1.2)} \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b=1 \\ b \neq a}}^N (\mathbf{F}_{ab} - \mathbf{F}_{ab}) = 0,$$

resultando em,

$$\sum_{a=1}^N \dot{\mathbf{p}}_a = \dot{\mathbf{P}} = \sum_{a=1}^N \mathbf{F}_a^{(e)} \equiv \mathbf{F}^{(e)}, \quad (1.6a)$$

sendo  $\mathbf{F}^{(e)}$  a força externa resultante sobre o sistema de partículas. Ou seja, *se a força externa resultante sobre o sistema de partículas é nula, então o momentum linear total é conservado.*

Uma consequência importante é obtida a partir da definição de centro de massa. Se as massas das partículas não variam, então a taxa de variação do *momentum* total pode ser escrita como

$$\dot{\mathbf{P}} = M \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^{(e)}, \quad (1.6b)$$

ou seja, o centro de massa se movimenta como uma partícula com a massa total do sistema sob a ação da força externa resultante. Se  $\mathbf{F}^{(e)} = 0$ , o centro de massa se move como uma partícula livre.

### 1.1.2.2 CONSERVAÇÃO DO MOMENTUM ANGULAR

Derivando-se (1.5c) em relação ao tempo e assumindo novamente que  $\dot{m}_a = 0$ , resulta

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{L}}_P &= \sum_{a=1}^N m_a (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_P) \times (\ddot{\mathbf{r}}_a - \ddot{\mathbf{r}}_P) \\ &= \sum_{a=1}^N (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_P) \times \dot{\mathbf{p}}_a - \sum_{a=1}^N m_a (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_P) \times \ddot{\mathbf{r}}_P \\ &\stackrel{(1.3)}{\stackrel{(1.5a)}}{\rightarrow} \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_{ab} + \sum_{a=1}^N (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_a^{(e)} - M (\mathbf{R} - \mathbf{r}_P) \times \ddot{\mathbf{r}}_P.\end{aligned}$$

Mas, novamente,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_{ab} &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} [(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_{ab} + (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_{ba}] \\ &\stackrel{(1.2)}{\rightarrow} \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) \times \mathbf{F}_{ab} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} \mathbf{r}_{ab} \times \mathbf{F}_{ab},\end{aligned}$$

sendo  $\mathbf{r}_{ab} \doteq \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$  a posição da partícula  $a$  em relação à partícula  $b$ . Contudo, se as forças internas obedecem a forma forte da terceira lei, então  $\mathbf{r}_{ab} \times \mathbf{F}_{ab} = 0$ .

Portanto,

$$\dot{\mathbf{L}}_P = \mathbf{N}_P^{(e)} - M (\mathbf{R} - \mathbf{r}_P) \times \ddot{\mathbf{r}}_P, \quad (1.7a)$$

onde

$$\mathbf{N}_P^{(e)} = \sum_{a=1}^N (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_a^{(e)}$$

é o torque externo resultante em relação ao ponto  $P$ . Por sua vez, o segundo termo resulta

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}_P) \times \ddot{\mathbf{r}}_P = 0$$

se pelo menos uma das condições for satisfeita: (i)  $\mathbf{r}_P = \mathbf{R}$ ; (ii)  $\ddot{\mathbf{r}}_P = 0$  ou (iii)  $\ddot{\mathbf{r}}_P \parallel \mathbf{R} - \mathbf{r}_P$ . Neste caso,

$$\dot{\mathbf{L}}_P = \mathbf{N}_P^{(e)}. \quad (1.7b)$$

Portanto, se o torque externo total for nulo, o momentum angular total do sistema de partículas em relação ao seu centro de massa ou em relação a um ponto fixo no espaço é conservado.

Um outro resultado importante para o momentum angular total envolvendo o centro de massa do sistema pode ser deduzido. Retornando a (1.5c) e considerando como ponto fixo a origem, escreve-se

$$\mathbf{L} = \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{r}}_a,$$

sendo  $\mathbf{L}$  o momentum angular total em relação à origem. Definindo-se agora os vetores posição ( $\mathbf{r}'_a$ ) e velocidade ( $\mathbf{v}'_a$ ) relativas instantâneas da partícula  $a$  em relação ao centro de massa, então

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_a \text{ e } \mathbf{v}_a = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_a, \quad (1.8a)$$

sendo  $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$ . Ou seja,  $\mathbf{L}$  pode ser escrito como

$$\mathbf{L} = M \mathbf{R} \times \mathbf{V} + \mathbf{R} \times \left( \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{r}'_a \right) + \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{r}'_a \times \mathbf{V} + \sum_{a=1}^N \mathbf{r}'_a \times \mathbf{p}'_a.$$

Uma vez que

$$\sum_{a=1}^N m_a \mathbf{r}'_a = \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{r}_a - M \mathbf{R} = M \mathbf{R} - M \mathbf{R} = 0, \quad (1.8b)$$

resulta que

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times (M\mathbf{V}) + \sum_{a=1}^N \mathbf{r}'_a \times \mathbf{p}'_a. \quad (1.8c)$$

Ou seja, o *momentum* angular total do sistema em relação à origem é igual ao *momentum* angular do centro de massa em relação à origem acrescido do *momentum* angular total em relação ao centro de massa.

### 1.1.2.3 CONSERVAÇÃO DE ENERGIA

Alguns importantes teoremas relacionados com a energia do sistema de partículas podem ser obtidos.

Em primeiro lugar, a energia cinética total do sistema de partículas, definida em (1.5d), pode ser reescrita em termos dos vetores relativos ao centro de massa, definidos em (1.8a), como

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_a) \cdot (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_a) \xrightarrow{\dot{m}_a=0} \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a v_a'^2 + \mathbf{V} \cdot \frac{d}{dt} \left( \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{r}'_a \right), \\ T &\stackrel{(1.8b)}{=} \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a v_a'^2. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Ou seja, a energia cinética total do sistema pode ser escrita como a soma da energia cinética do centro de massa com a energia cinética das partículas em relação ao centro de massa.

Os resultados (1.7) e (1.9) são particularmente úteis na dinâmica do corpo rígido.

**TEOREMA TRABALHO-ENERGIA CINÉTICA.** Este importante teorema é obtido calculando-se o trabalho total realizado por todas as forças que agem sobre o sistema de partículas quando este parte de uma configuração inicial  $A$  e atinge uma configuração final  $B$ . Estas configurações inicial e final correspondem aos dois conjuntos, em princípio distintos, de posições instantâneas das partículas em dois instantes distintos de tempo. Ou seja, se  $t = t_A$  é o instante correspondente à configuração  $A$  e  $t = t_B$  corresponde à configuração  $B$ , então

$$\begin{aligned} A &\mapsto \{\mathbf{r}_{a,A} = \mathbf{r}_a(t_A)\}, \forall a = 1, \dots, N, \text{ e} \\ B &\mapsto \{\mathbf{r}_{a,B} = \mathbf{r}_a(t_B)\}, \forall a = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Dada a partícula  $a$ , o trabalho total realizado por todas as forças que sobre ela atuam entre as configurações  $A$  e  $B$  é

$$W_{a,AB} \doteq \int_A^B \left( \mathbf{F}_a^{(e)} + \sum_{b \neq a} \mathbf{F}_{ab} \right) \cdot d\mathbf{r}_a = \int_A^B \mathbf{F}_a^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_a + \sum_{b \neq a} \int_A^B \mathbf{F}_{ab} \cdot d\mathbf{r}_a.$$

Então, o trabalho total realizado por todas as forças que atuam sobre o sistema na transformação  $A \rightarrow B$  é

$$W_{AB} = \sum_{a=1}^N W_{a,AB} = \sum_{a=1}^N \int_A^B \mathbf{F}_a^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_a + \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} \int_A^B \mathbf{F}_{ab} \cdot d\mathbf{r}_a.$$

Independente da forma de atuação das forças externas e internas, o trabalho total sempre pode ser escrito em termos dos *momenta* lineares. Além disso, para todo  $t_A \leq t \leq t_B$ , o deslocamento infinitesimal  $d\mathbf{r}_a$ , da partícula  $a$ , pode ser sempre parametrizado como  $d\mathbf{r}_a = \mathbf{v}_a(t) dt$ . Então, de (1.3),

$$W_{AB} = \sum_{a=1}^N \int_A^B \dot{\mathbf{p}}_a \cdot d\mathbf{r}_a \xrightarrow{\dot{m}_a=0} \sum_{a=1}^N \int_{t_A}^{t_B} m_a \dot{\mathbf{v}}_a \cdot \mathbf{v}_a dt = \sum_{a=1}^N \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m_a v_a^2 \right) dt.$$

Ou seja, dada (1.5d), resulta

$$W_{AB} = T_B - T_A, \quad (1.10)$$

o qual é o teorema trabalho-energia cinética para o sistema de partículas. Este teorema é completamente geral.

**CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA.** Assumindo-se agora que tanto as forças externas quanto as internas sejam *conservativas*, um outro importante teorema de conservação é obtido.

Pode-se caracterizar as forças externas  $\{\mathbf{F}_a^{(e)} = \mathbf{F}_a^{(e)}(\mathbf{r}_a)\}$  como conservativas de diferentes maneiras.

- A forças são *irrotacionais*, ou seja,

$$\nabla_a \times \mathbf{F}_a^{(e)} = 0,$$

sendo  $\nabla_a$  o operador gradiente aplicado às coordenadas da partícula  $a$ .

Se um campo vetorial é irrotacional, então este sempre pode ser determinado a partir de um campo escalar  $U_a^{(e)} = U_a^{(e)}(\mathbf{r}_a)$ , denominado a função *energia potencial*. Esta relação é definida como

$$\mathbf{F}_a^{(e)} = -\nabla_a U_a^{(e)}. \quad (1.11)$$

- O trabalho total realizado pela força conservativa sobre a partícula  $a$ , quando esta executa um caminho fechado no espaço, é nulo. O trabalho realizado na transformação  $A \rightarrow B$  é dado por

$$W_{a,AB}^{(e)} = \int_A^B \mathbf{F}_a^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_a.$$

Se  $F_a^{(e)}$  pode ser determinada pela relação (1.11), então

$$W_{a,AB}^{(e)} = - \int_A^B (\nabla_a U_a^{(e)}) \cdot d\mathbf{r}_a = - \int_{U_{a,A}^{(e)}}^{U_{a,B}^{(e)}} dU_a^{(e)},$$

pela definição de gradiente. Na última integral acima,  $U_{a,A}^{(e)} = U_a^{(e)}(\mathbf{r}_{a,A})$  e  $U_{a,B}^{(e)} = U_a^{(e)}(\mathbf{r}_{a,B})$ . Ou seja,

$$W_{a,AB}^{(e)} = U_{a,A}^{(e)} - U_{a,B}^{(e)}.$$

Por conseguinte, se  $A = B$ , o trabalho realizado pela força conservativa é nulo.

O trabalho total realizado pelas forças externas durante a transformação  $A \rightarrow B$  é definido como

$$W_{AB}^{(e)} = \sum_{a=1}^N W_{a,AB}^{(e)}.$$

Se todas as forças externas forem conservativas, então pode-se definir uma função *energia potencial total externa*  $U^{(e)} = U^{(e)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  como

$$U^{(e)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_{a=1}^N U_a^{(e)}(\mathbf{r}_a),$$

a partir da qual pode-se escrever

$$W_{AB}^{(e)} = \sum_{a=1}^N (U_{a,A}^{(e)} - U_{a,B}^{(e)}) = U_A^{(e)} - U_B^{(e)}.$$

Já para as forças internas, uma suposição adicional deve ser feita. O trabalho total realizado pelas mesmas sobre o sistema de partículas é

$$W_{AB}^{(int)} = \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} \int_A^B \mathbf{F}_{ab} \cdot d\mathbf{r}_a,$$

onde  $W_{AB}^{(int)}$  denota a quantidade referida. Mas, se estas obedecerem a terceira lei,

$$W_{AB}^{(int)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b=1 \\ a \neq b}}^N \int_A^B \mathbf{F}_{ab} \cdot (d\mathbf{r}_a - d\mathbf{r}_b) = \sum_{\substack{a,b=1 \\ (b>a)}}^N \int_A^B \mathbf{F}_{ab} \cdot (d\mathbf{r}_a - d\mathbf{r}_b).$$

Assume-se então que todas as forças  $F_{ab}$  são conservativas. Portanto, relações semelhantes a (1.11) são válidas, sendo introduzidas as funções *energia potencial interna*  $U_{ab} = U_{ab}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)$  através de

$$\mathbf{F}_{ab} = -\nabla_a U_{ab}. \quad (1.12)$$

Para que a relação (1.12) satisfaça a terceira lei de Newton, é necessário que

$$\mathbf{F}_{ba} = -\mathbf{F}_{ab} \implies \nabla_b U_{ba}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = -\nabla_a U_{ab}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b).$$

Esta condição é satisfeita se

$$\begin{aligned} U_{ab}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) &= U_{ab}(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) = U_{ab}(\mathbf{r}_{ab}), \text{ e} \\ U_{ab}(\mathbf{r}_{ab}) &= U_{ba}(\mathbf{r}_{ba}), \end{aligned} \quad (1.13)$$

sendo  $\mathbf{r}_{ab} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$  ( $a \neq b$ ).

Com estas suposições,  $W_{AB}^{(int)}$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned} W_{AB}^{(int)} &= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} \int_A^B (\nabla_a U_{ab}) \cdot d\mathbf{r}_{ab} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} \int_A^B (\nabla_{ab} U_{ab}) \cdot d\mathbf{r}_{ab} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} \int_{U_{ab,A}}^{U_{ab,B}} dU_{ab} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} (U_{ab,A} - U_{ab,B}), \end{aligned}$$

uma vez que facilmente pode-se verificar que  $\nabla_a U_{ab} = -\nabla_b U_{ba} = \nabla_{ab} U_{ab}$ .

Definindo-se então a *energia potencial total* do sistema como

$$U = U(\{\mathbf{r}_a\}) = U^{(e)} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b=1 \\ a \neq b}}^N U_{ab} = U^{(e)} + \sum_{\substack{a,b=1 \\ (a < b)}}^N U_{ab}, \quad (1.14)$$

o teorema trabalho-energia cinética (1.10) atesta que

$$W_{AB} = T_B - T_A.$$

Portanto, o trabalho total realizado por todas as forças que agem sobre o sistema durante a transformação  $A \rightarrow B$  é

$$W_{AB} = W_{AB}^{(e)} + W_{AB}^{(int)} = U_A^{(e)} - U_B^{(e)} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} (U_{ab,A} - U_{ab,B}) = T_B - T_A,$$

a qual pode ser expressa como

$$U_A + T_A = U_B + T_B,$$

sendo  $U + T$  a *energia mecânica total* do sistema.

Ou seja, se todas as forças atuando sobre o sistema de partícula forem conservativas, a energia mecânica total  $E = T + U$  é conservada.

## 1.2 INTRODUÇÃO AO CÁLCULO VARIACIONAL

Como já mencionado, os formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano foram elaborados usando métodos do cálculo variacional, a partir de princípios extremantes. Nesta seção, portanto, será realizada uma breve introdução ao cálculo variacional de uma maneira que tenha interesse direto à mecânica clássica.

### 1.2.1 DEFINIÇÕES INICIAIS

Inicialmente, serão estabelecidas algumas definições de entidades matemáticas com o intuito de facilitar a compreensão do conteúdo. O cálculo variacional, conforme o mesmo é aplicado à mecânica, faz uso massivo do conceito de *funcional*. É importante, então, esclarecer a distinção entre um funcional e uma função. Para tanto, assume-se um conhecimento básico em teoria de conjuntos e espaços vetoriais, os quais serão utilizados nas definições apresentadas a seguir.

**Definição 1.1 (Função).** Uma função é uma relação ou mapeamento entre dois conjuntos, sendo um conjunto de entrada, denominado o *domínio* e um conjunto de saída, denominado o *contradomínio*. O mapeamento entre os conjuntos é estabelecido por um conjunto de regras específicas, com a exigência de que cada elemento do domínio seja mapeado a somente um elemento do contradomínio. Um par entrada-saída da função é denominado um *par ordenado* e o conjunto de todos os pares ordenados é denominado o *gráfico* da mesma. Se os elementos de saída da função formarem um subconjunto do contradomínio, este é usualmente denominado a *imagem* da função.

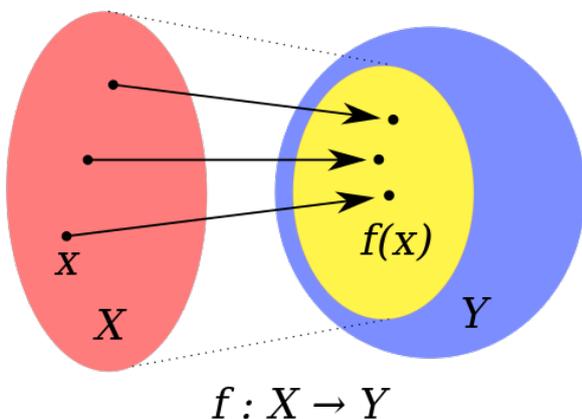
Se  $X$  for o domínio de uma função denominada  $f$  e  $Y$  o seu contradomínio, o mapeamento do elemento  $x \in X$  para o correspondente elemento em  $Y$  é representado por

$$f : X \mapsto Y \text{ ou } X \xrightarrow{f} Y.$$

A operação realizada por  $f$  sobre o elemento  $x \in X$  é usualmente representada por  $f(x)$ , quando então  $x$  é denominado o *argumento* de  $f$ . O resultado ou a saída desta operação corresponde ao mapeamento de  $x$  ao elemento em  $Y$  que pode ser identificado por  $y$  e somente a este. Este mapeamento é usualmente representado por

$$y = f(x).$$

A figura 1.1 ilustra o mapeamento entre conjuntos realizado pela função  $f : X \mapsto Y$ .



**Figura 1.1:** Representação do mapeamento entre os conjunto domínio ( $X$ ) e contradomínio ( $Y$ ) da função  $f(x)$ . O subconjunto amarelo de  $Y$  representa a imagem da função.

Em análise funcional,<sup>2</sup> bem como para a física, a maior parte das funções de interesse são mapeamentos entre conjuntos de números, de acordo com a definição realizada acima. Porém, observa-se que existem grupos ou *classes* de funções que estabelecem determinados espaços vetoriais,<sup>3</sup> denominados de *espaços funcionais*, os quais possuem importância singular. Certos operadores, aqui denominados de *funcionais*, atuam sobre um ou mais vetores desses espaços funcionais, projetando-os sobre um elemento de um conjunto, normalmente numérico.

**Definição 1.2 (Classe funcional).** Se  $X$  e  $Y$  são conjuntos (numéricos), então o conjunto de todas as funções  $f : X \mapsto Y$ , denotado por  $\mathcal{M}$  ou  $Y^X$ , forma uma *classe funcional*.

Alguns exemplos relevantes dessas classes funcionais são:

<sup>2</sup>Ramo da matemática formado pelo estudo de espaços vetoriais dotados de propriedades adicionais (como produto interno, norma, topologia, etc) e dos operadores lineares que atuam sobre esses espaços, de acordo com suas propriedades particulares.

<sup>3</sup>Ou, mais corretamente, espaços topológicos.

- $\mathcal{C}[a, b]$ , o conjunto de todas as funções reais  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  contínuas no intervalo (fechado)  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ .
- $\mathcal{C}^r[a, b]$ , o conjunto de todas as funções reais que são contínuas até a derivada de ordem  $r$  no intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ .
- $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ , o conjunto de todas as funções reais contínuas que são nulas no infinito.
- $\mathcal{C}^r(\mathbb{R})$ , o conjunto de todas as funções reais que são contínuas até a derivada de ordem  $r$ .
- $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ , o conjunto de todas as funções reais que possuem derivadas em todas as ordens. Estas funções também são denominadas de *funções suaves*.
- $\mathcal{L}_1[a, b]$ , o conjunto de todas as funções reais cujo valor absoluto é integrável no intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ .
- $\mathcal{L}_2[a, b]$ , o conjunto de todas as funções reais quadraticamente integráveis no intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ .

As classes apresentadas acima constituem somente alguns poucos exemplos dos espaços funcionais conhecidos.

**Definição 1.3 (Funcional).** Denomina-se funcional uma correspondência ou mapeamento  $J$  que associa a cada função  $f(x)$  de uma classe  $\mathcal{M}$  um elemento de um conjunto  $X$ , denotado comumente por  $J\{f(x)\}$ . Este mapeamento pode ser representado como

$$f \xrightarrow{J} J\{f(x)\}, \text{ sendo } J\{f(x)\} \in X.$$

A classe  $\mathcal{M}$  é denominada o *domínio* do funcional  $J$ , ao passo que uma função  $f(x) \in \mathcal{M}$  é denominada *ponto do domínio*.

Pode-se dizer que se uma função é um mapeamento entre dois conjuntos numéricos, um funcional é um mapeamento entre um espaço funcional e um conjunto numérico. Em outras palavras, trata-se de uma operação que toma um vetor (elemento do espaço funcional) como entrada e retorna um escalar (elemento de  $X$ ) como sua saída. Uma última descrição simplificada seria afirmar que um funcional é uma função de uma função.

**Exemplo 1.1.** Dada a classe  $\mathcal{C}[0, 1]$ , define-se  $J\{y(x)\} \in \mathbb{R}$  para toda  $y(x) \in \mathcal{C}[0, 1]$  pela operação

$$J\{y(x)\} = \int_0^1 y(x) dx.$$

Assim, o elemento  $y(x) = 1$  será mapeado em

$$J\{1\} = \int_0^1 1 dx = 1.$$

Por sua vez, o elemento  $y(x) = e^x \in \mathcal{C}[0, 1]$  será mapeado em

$$J\{e^x\} = \int_0^1 e^x dx = e - 1 = 1,7182818\dots$$

**Exemplo 1.2.** A operação

$$J_{x_0}\{y(x)\} = y'(x_0),$$

onde  $x_0 \in [a, b]$  define um funcional que mapeia um elemento de  $\mathcal{C}^1[a, b]$  a um número real. Assim, para  $a = 1$ ,  $b = 3$  e  $x_0 = 2$ , o elemento  $y(x) = x^2$ , será mapeado em

$$J_2\{x^2\} = 2x|_{x=2} = 4.$$

Por sua vez, o elemento  $y(x) = \ln(1+x)$  será mapeado em

$$J_2\{\ln(1+x)\} = \frac{1}{1+x} \Big|_{x=2} = \frac{1}{3}.$$

Uma categoria importante de funcionais, tanto para a análise funcional quanto para a física, são aqueles definidos a partir de um operador integral. Ou seja, dada  $f(x) \in C^r[a, b]$ , define-se o funcional  $I[f]$  como

$$I[f] = \int_a^b G \left\{ f(x), f'(x), \dots, f^{(r)}(x); x \right\} g(x) dx, \quad (1.15)$$

sendo  $g(x)$  uma função peso conhecida e  $G\{\dots\}$  um funcional aplicado a  $C^r[a, b]$ . Assume-se implicitamente que  $g(x)$  é tal que a integral exista. Esta definição também deve ser alterada para o caso de integrais impróprias. Contudo, este é o tipo de funcional de interesse para a mecânica Lagrangiana.

**Exemplo 1.3.** Para  $y(x) \in C[-1, 1]$ , define-se o funcional

$$I[y] = \int_{-1}^1 G \{y(x); x\} dx.$$

Assim, se

$$G \{y; x\} = \frac{x}{1 + y^2},$$

a escolha  $y(x) = 1 + x$  resulta em

$$I[y] = \int_{-1}^1 \frac{x}{1 + y^2} dx \rightarrow I[1 + x] = \int_{-1}^1 \frac{x}{1 + (1 + x)^2} dx = \ln \sqrt{5} - \arctan 2.$$

**Exemplo 1.4.** A operação

$$I[y] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

associa a cada  $y(x) \in C^1[a, b]$  o comprimento do arco da curva  $y = y(x)$  no intervalo  $[a, b]$ .

**Definição 1.4 (Funcional linear).** Um funcional  $L\{y(x)\}$  de domínio  $\mathcal{M}$  será dito ser um *funcional linear* se satisfizer as condições:

1.  $L\{cy(x)\} = cL\{y(x)\}$ , para  $c = \text{cte}$ .
2.  $L\{y_1(x) + y_2(x)\} = L\{y_1(x)\} + L\{y_2(x)\}$ , para todos  $y_1(x), y_2(x) \in \mathcal{M}$ .

Um funcional que satisfaz a definição 1.4 é um caso particular de um *funcional linear* ou *forma linear* na teoria de espaços vetoriais.<sup>4</sup>

Finalmente, será apresentada a seguir, sem demonstração, a *regra integral de Leibniz* para diferenciação sob o símbolo de integração.

**Afirmção (Regra integral de Leibniz).** Sejam  $c \in \mathbb{R}$  e as funções  $a(c), b(c) \in C^1(\mathbb{R})$ . Se  $f(x, c)$  for uma função da classe  $C^1[a(c), b(c)]$ , então

$$\frac{d}{dc} \int_{a(c)}^{b(c)} f(x, c) dx = \int_{a(c)}^{b(c)} \frac{\partial}{\partial c} f(x, c) dx + f(b, c) \frac{db}{dc} - f(a, c) \frac{da}{dc}. \quad (1.16)$$

## 1.2.2 O PROBLEMA BÁSICO DO CÁLCULO VARIACIONAL

Uma vez apresentadas as definições de função e funcional, pode-se agora discutir o problema básico do cálculo variacional. Para a mecânica clássica, o tipo de funcional mais empregado foi definido em (1.15). Assim, o problema básico do cálculo variacional consiste em determinar a função  $y(x) \in C^2[x_1, x_2]$  tal que a integral

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} G \{y(x), y'(x); x\} dx \quad (1.17)$$

seja um *extremum*, isto é, que resulte em um valor máximo ou um mínimo frente a qualquer outra função  $\bar{y}(x) \in C^2[x_1, x_2]$ .

A forma adotada para o funcional  $J[y]$  e apresentada em (1.17) possui algumas condições que devem ser mencionadas:

<sup>4</sup>Ver, por exemplo, [Apostila de Física-Matemática](#), seção 4.4.

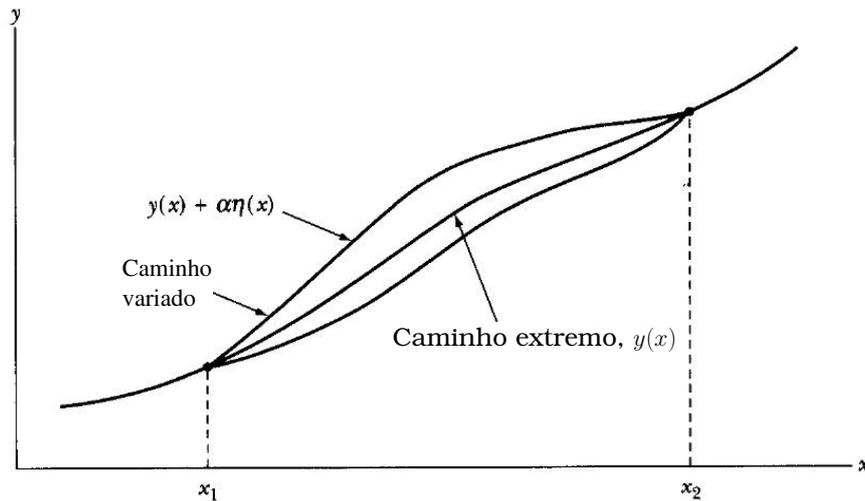
1. Assume-se que o funcional  $G\{\dots\}$  depende somente de  $y(x)$  e  $y'(x)$  e pode ser explicitamente dependente de  $x$ .
2. Os limites de integração são considerados *fixos*, ou seja, dentre todas as infinitas funções  $y(x)$  da classe  $C^2[x_1, x_2]$ , serão consideradas para o cálculo do extremum somente aquelas que possuem as mesmas imagens nos limites da integração.

O procedimento do cálculo variacional para a determinação do extremum de  $J$  consiste em variar a forma funcional de  $y(x)$ , mantendo-se os limites de integração fixos, até que a integração em (1.17) forneça o valor extremo.

Há infinitas maneiras de como efetivamente realizar a variação na forma funcional de  $y(x)$ . Um procedimento usualmente abordado em textos de mecânica consiste no uso de um parâmetro  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Assume-se que as funções da classe  $C^2[x_1, x_2]$  em (1.17) dependam parametricamente desta quantidade, ou seja,  $y = y(x, \alpha)$ . Assume-se também que o extremum é obtido para  $\alpha = 0$ , quando então  $y = y(x, 0) = y(x)$ . Neste caso, as funções vizinhas a  $y(x)$ , e que também pertencem à mesma classe, são obtidas com  $\alpha \neq 0$ . A maneira mais simples de se implementar este procedimento consiste em escrever

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x), \tag{1.18}$$

sendo  $\eta(x) \in C^2[x_1, x_2]$  tal que  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ . Esta situação está representada na figura 1.2.



**Figura 1.2:** Representação da função  $y(x)$  que irá fornecer o extremum de  $J$ , juntamente com funções vizinhas, obtidas a partir da variação do parâmetro  $\alpha$ .

Aplicando este procedimento ao funcional (1.17), este passa a ser escrito formalmente como

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} G\{y(x, \alpha), y'(x, \alpha); x\} dx, \tag{1.19}$$

sendo que  $y'(x, \alpha) = \partial y / \partial x$ . Por conseguinte, uma variação  $d\alpha$  no valor do parâmetro  $\alpha$  irá resultar em uma variação no funcional  $J(\alpha)$ . Esta última pode ser expressa como

$$\delta J = \frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha,$$

onde o símbolo  $\delta J$  representa esta variação do funcional, resultante não da variação na variável independente  $x$ , mas da forma funcional de  $y(x, \alpha)$ .

Então, a condição de valor extremo para  $J(\alpha)$  é obtida através de

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0, \tag{1.20}$$

para todas as funções  $\eta(x)$ .

**Exercício 1.1.** Considere o funcional

$$G\{y'(x, \alpha)\} = [y'(x, \alpha)]^2$$

em (1.19). Mostre que o extremum de  $J(\alpha)$  é obtido pela forma  $y(x) = x$  no intervalo  $0 \leq x \leq 2\pi$ , usando  $\eta(x) = \sin x$ .

*Resolução.* Empregando-se as formas propostas, escreve-se

$$y(x, \alpha) = x + \alpha \sin x.$$

Ou seja,

$$G\{y'(x, \alpha)\} = [1 + \alpha \cos x]^2,$$

resultando então de (1.19) o funcional

$$J(\alpha) = \int_0^{2\pi} [1 + \alpha \cos x]^2 dx = 2\pi + \alpha^2 \pi.$$

Portanto, pela condição (1.20), observa-se que realmente o valor extremo (neste caso, um ponto de mínimo) é obtido por  $J(0)$ .

### 1.2.3 A EQUAÇÃO DE EULER

Dados então o funcional (1.17) e a condição de extremum (1.20), pode-se determinar agora uma nova equação, denominada *equação de Euler*, cuja solução irá fornecer a forma funcional para  $y(x)$ .

Esta equação é obtida derivando-se (1.17) em relação ao parâmetro  $\alpha$ ,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_1}^{x_2} G\{y(x, \alpha), y'(x, \alpha); x\} dx.$$

Empregando-se a regra de Leibniz (1.16) e lembrando que os limites de integração são pontos fixos na variação de  $y(x, \alpha)$ , pode-se permutar os símbolos de diferenciação e integração, resultando

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} J(\alpha) &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} G\{y(x, \alpha), y'(x, \alpha); x\} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial G}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) dx. \end{aligned}$$

De (1.18) percebe-se que

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x) \text{ e } \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{d\eta}{dx}.$$

Então,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial G}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial G}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} \right) dx.$$

A segunda integral acima pode ser manipulada empregando-se integração por partes como

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial G}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} dx = \left. \frac{\partial G}{\partial y'} \eta(x) \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} \right) \eta(x) dx.$$

O primeiro termo é nulo, uma vez que  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ . Resulta então

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} J(\alpha) \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} \right) \eta(x) dx = 0,$$

onde já foi aplicada a condição (1.20). Deve-se lembrar agora que  $\eta(x)$  é qualquer função da classe  $\mathcal{C}^1[x_1, x_2]$  que se anula nos limites de integração. Portanto, a condição (1.20) é satisfeita para uma função  $\eta(x)$  arbitrária se e somente se

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} = 0, \tag{1.21}$$

quando  $y = y(x)$ .

A expressão (1.21) é denominada a *equação de Euler*. Dado o funcional  $G\{y(x), y'(x); x\}$ , o cálculo de (1.21) irá fornecer uma equação diferencial de segunda ordem para  $y(x)$ , cuja solução será a forma funcional para o extremum de  $J$ .

**Exemplo 1.5.** Retornando ao exemplo 1.4, o funcional

$$I[y] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

calcula a extensão da curva traçada por uma função  $y(x) \in C^2[a, b]$ . A equação de Euler (1.21) será agora empregada para calcular o *extremum* de  $I[y]$ . Para tanto, a partir de (1.17) identifica-se

$$G\{y(x), y'(x); x\} = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} = -\frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = -\frac{y''}{\sqrt{1 + y'^2}} + \frac{y'^2 y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = -\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = 0,$$

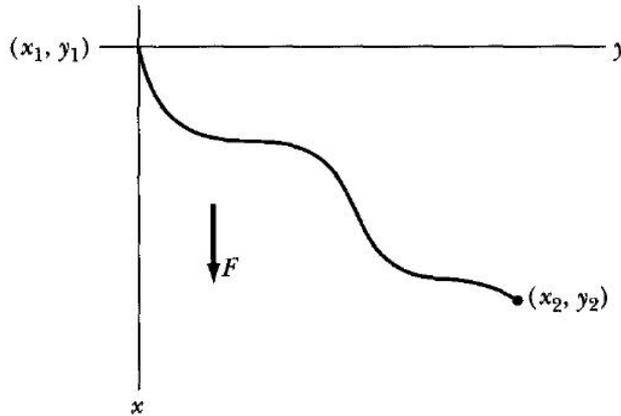
ou seja, obtém-se a EDO

$$y'' = 0 \implies y(x) = c_1 x + c_2, \quad (c_1, c_2 \text{ ctes.}).$$

Ou seja, o *extremum* é uma reta, como já é bem sabido. Novamente neste caso o *extremum* é um ponto de mínimo, ou seja, a reta é a *menor* distância entre dois pontos. A curva traçada por qualquer outra função da classe  $C^2[a, b]$  que tenha os mesmos pontos fixos em  $x = a$  e  $x = b$  terá uma extensão maior que a reta.

**Exemplo 1.6 (A braquistócrona).** Pode-se empregar a equação de Euler (1.21) para a solução do problema clássico da *braquistócrona*.<sup>5</sup>

Considere uma partícula movendo-se nas vizinhanças da superfície terrestre, sob a ação da força peso. Se a partícula parte do repouso no ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$  e chega a  $P_2 = (x_2, y_2)$ , qual deve ser a sua trajetória para que este percurso seja realizado no menor tempo possível?



**Figura 1.3:** O problema da braquistócrona: determinar a trajetória para que a partícula percorra a distância entre os pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  sob a ação da força peso no menor tempo possível.

**Resolução.** Sem perda de generalidade, pode-se colocar  $P_1$  na origem e orientar o sistema de coordenadas conforme representado na figura 1.3. Como a força peso é conservativa, a energia mecânica da partícula é conservada,  $T + U = \text{const}$ . Definindo arbitrariamente  $U(x = 0) = 0$ , então a equação de movimento da mesma é

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgx = 0 \implies v = \sqrt{2gx}.$$

Sendo  $v = dl/dt$ , onde  $dl$  é o elemento de arco tangencial à trajetória da partícula e com o sentido de movimento da mesma, então  $dt = dl/v$  e o tempo total para o percurso é obtido pelo cálculo da integral

$$T = \int_{P_1}^{P_2} \frac{dl}{v} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gx}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_2} \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{x}} dx.$$

<sup>5</sup>Do grego: βράχιστος: *brachistos* - "o mais curto" e χρόνος: *chronos* - "tempo". Este problema foi proposto e resolvido pela primeira vez por Johann Bernoulli, em 1696.

Este resultado está na forma do funcional (1.17), onde se identifica

$$G\{y(x), y'(x); x\} = \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{x}}.$$

Empregando então (1.21), observa-se que  $\partial G/\partial y = 0$ , o que permite escrever

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} = 0 \implies \frac{\partial G}{\partial y'} = \text{cte.} = (2a)^{-1/2},$$

sendo  $a$  uma constante a ser determinada posteriormente. Calculando  $\partial G/\partial y'$ , obtém-se então

$$\frac{y'^2}{x(1+y'^2)} = \frac{1}{2a} \implies y'^2 = \frac{x}{2a-x},$$

a qual pode ser escrita como

$$y = \int \frac{x dx}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Realizando a mudança de variável

$$x = a(1 - \cos \theta), \quad dx = a \sin \theta d\theta,$$

resulta a primitiva

$$y = a \int (1 - \cos \theta) d\theta,$$

cujas solução é

$$y = a(\theta - \sin \theta) + b,$$

sendo  $b$  a segunda constante, a qual é nula pelas condições iniciais.

Esta solução está representada na figura 1.4. A mesma define um *cicloide*<sup>6</sup> que passa pela origem.

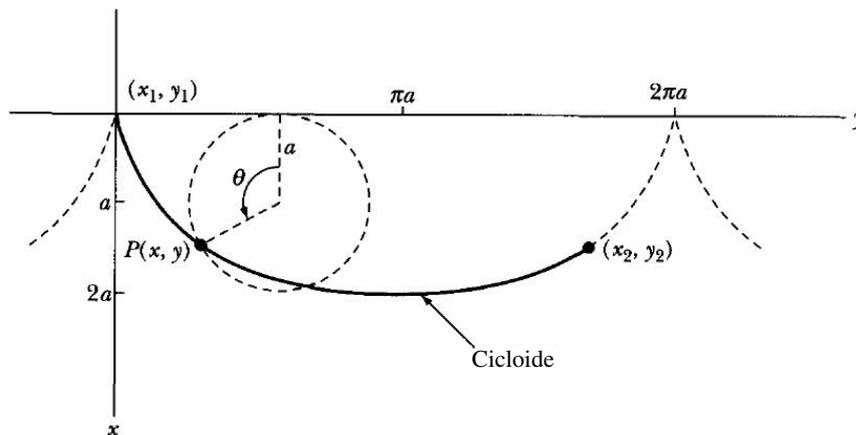
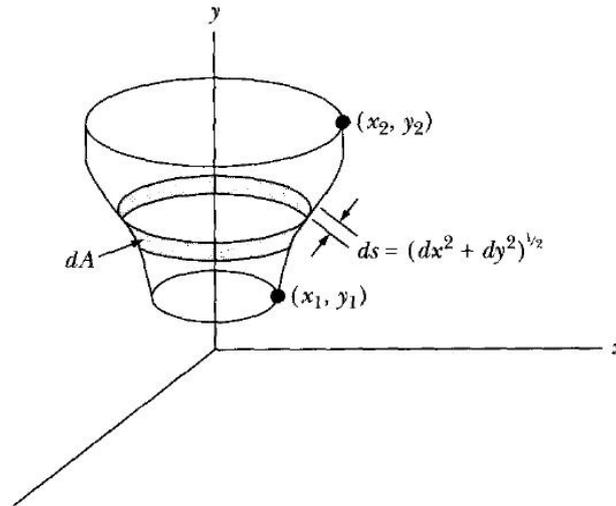


Figura 1.4: A solução do problema da braquistócrona: um cicloide.

Para finalizar o problema, é necessário encontrar o valor do parâmetro  $a$ , dados  $x_2$  e  $y_2$ . Para tanto, é necessário também encontrar o valor de  $\theta = \theta_2$  neste ponto. Resulta então um sistema de duas equações não lineares para  $a$  e  $\theta_2$  que somente podem ser resolvidas por métodos numéricos. Por exemplo, se  $(x_2, y_2) = (1, 1)$ , resultam  $a \approx 0,572917$  e  $\theta_2 \approx 2,41201$ . Se  $(x_2, y_2) = (2, 3)$  resultam  $a \approx 1,00133$  e  $\theta_2 \approx 3,06878$ .

**Exercício 1.2 (A catenária).** Considere uma superfície de revolução gerada por uma curva qualquer que conecta os pontos fixos  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  e que é então revolvida em torno do eixo  $y$ , como representado na figura 1.5. Encontre a curva  $y(x)$  que minimiza a área da superfície de revolução.

<sup>6</sup>Uma animação de um cicloide pode ser vista em <http://mathworld.wolfram.com/Cycloid.html>.



**Figura 1.5:** A superfície gerada pela revolução da curva entre  $P_1$  e  $P_2$  em torno do eixo  $y$ .

**Resolução.** Na figura 1.5, observa-se que o elemento de área  $dA$  é dado por

$$dA = 2\pi x ds = 2\pi x \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi x \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Portanto, a área total será

$$A = \int dA = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Identificando-se esta integral com (1.17), obtém-se de (1.21)

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right] = 0 \implies \frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = a,$$

sendo  $a$  uma constante. Ou seja,

$$y = \int \frac{adx}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

cujas solução é

$$y = a \cosh^{-1} \left( \frac{x}{a} \right) + b \iff x = a \cosh \left( \frac{y - b}{a} \right),$$

a qual é a forma de uma *catenária*, isto é, a forma da curva de uma corda flexível pendurada por dois pontos de sustentação.

## 1.2.4 DIFERENCIAÇÃO FORTE DE FUNCIONAIS

O procedimento adotado na seção 1.2.2, onde foi assumido que a variação na forma funcional da função  $y(x)$  é realizada de forma paramétrica na expressão (1.18), resultando na variação  $\delta J$  do funcional (1.19).

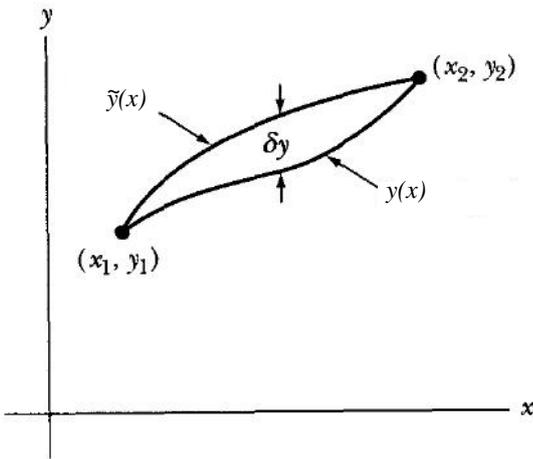
Este procedimento é denominado de *diferenciação fraca* do funcional, uma vez que embora o mesmo tenha levado à equação de Euler (1.21), a dedução desta foi levada a cabo empregando-se o parâmetro  $\alpha$ . Essa dedução contempla somente uma maneira particular de se realizar a variação de  $J$ , dentre infinitas outras.

A dedução da equação de Euler como uma condição necessária e suficiente para o extremum é realizada através da *diferenciação forte* do funcional. Assumindo novamente que o funcional  $J[y]$ , dado por (1.17), está definido sobre um conjunto de funções  $y(x) \in \mathcal{C}^2[x_1, x_2]$ , e assumindo que  $y = y(x)$  determina o extremum de  $J[y]$ , então a partir de qualquer outra função  $\tilde{y}(x) \in \mathcal{C}^2[x_1, x_2]$ , consistente com a condição de limites de integração fixos,  $\tilde{y}(x_1) = y(x_1)$  e  $\tilde{y}(x_2) = y(x_2)$ ,<sup>7</sup> pode-se definir a variação ou deslocamento virtual

$$\delta y = \delta y(x) = \tilde{y}(x) - y(x),$$

com  $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$ , conforme representado na figura 1.6.

<sup>7</sup>E consistente também com os vínculos impostos a  $y(x)$ , como será posteriormente visto.



**Figura 1.6:** Variação forte  $\delta y = \tilde{y}(x) - y(x)$  da forma funcional de  $y(x)$ .

O deslocamento virtual  $\delta y$  irá resultar, por sua vez, na variação  $\Delta J$  de  $J[y]$ , definida por

$$\begin{aligned}\Delta J[y, \delta y] &= \Delta J \doteq J[\tilde{y}] - J[y] \\ &= J[y(x) + \delta y(x)] - J[y(x)].\end{aligned}$$

Serão apresentadas a seguir algumas definições envolvidas na diferenciação forte de um funcional.

**Definição 1.5 (Norma de uma função em uma classe).** Seja  $y(x) \in \mathcal{C}[a, b]$  (o conjunto de todas as funções contínuas em  $a \leq x \leq b$ ). Sendo  $Y$  o contradomínio de  $y(x)$ , a norma de  $y(x)$  em  $\mathcal{C}[a, b]$  é o número  $\|y\|_{\mathcal{C}} \in Y$  dado por

$$\|y\|_{\mathcal{C}} = \max_{a \leq x \leq b} |y(x)|.$$

Se a classe funcional formar também um espaço vetorial, então a norma  $\|y\|_{\mathcal{C}}$ , dotada de propriedades adicionais, pode também ser a norma do espaço, em cuja situação será constituído então um *espaço vetorial normado*.<sup>8</sup>

**Definição 1.6 (Diferencial forte de funcional).** Se existir um funcional  $L[y(x), \delta y]$ , o qual é linear (definição 1.4) em relação a  $\delta y(x)$ , tal que qualquer acréscimo

$$\Delta J[y, \delta y] = J[y(x) + \delta y(x)] - J[y(x)]$$

do funcional  $J[y]$  admitir a representação

$$\Delta J = L[y, \delta y] + \beta[y, \delta y] \|\delta y\|,$$

com  $\beta[y, \delta y] \rightarrow 0$  quando  $\|\delta y\| \rightarrow 0$ , então  $L[y, \delta y]$  será denominado o *diferencial forte* do funcional  $J[y]$ , o qual é representado por  $\delta J \doteq L[y, \delta y]$ .

**Definição 1.7 (Mínimo absoluto de um funcional).** Diz-se que um funcional  $J[y]$  possui um *mínimo absoluto* em  $y = y(x)$  se para qualquer função  $\tilde{y}(x)$  dentro de seu domínio se cumprir

$$J[y] \leq J[\tilde{y}],$$

sendo que  $J[y] = J[\tilde{y}]$  se e somente se  $\tilde{y}(x) = y(x)$ .

Pode-se estabelecer também a definição do máximo absoluto do funcional, o que é realizado de forma simétrica à definição de mínimo.

A partir das definições acima, pode-se deduzir os seguintes teoremas, que serão apresentados sem demonstração.

**Teorema 1.1 (Extremum de um funcional).** Se um funcional diferenciável  $J[y]$  admitir um extremum (máximo ou mínimo) no ponto  $y = y(x)$  interior ao seu domínio de definição, então

$$\delta J[y(x)] = 0.$$

As funções para as quais  $\delta J = 0$  são denominadas *pontos estacionários* de  $J$ .

**Teorema 1.2 (Teorema fundamental do cálculo de variações).** Dada uma função  $f(x) \in \mathcal{C}(a, b)$ , se

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = 0,$$

para toda função  $\varphi(x) \in \mathcal{C}^1(a, b)$ , então  $f(x) = 0$  neste intervalo.

<sup>8</sup>Ver, por exemplo, [Apostila de Física-Matemática](#), seção 4.7.

As demonstrações dos teoremas acima não serão aqui apresentadas. Pode-se, outrossim, apresentar a seguinte argumentação, justificada pelos mesmos. Dado o funcional  $J[y]$ , para todas as funções  $\tilde{y}(x) = y(x) + \delta y(x) \in \mathcal{C}^2[x_1, x_2]$  existem funções  $\delta y(x) \in \mathcal{C}^2[x_1, x_2]$  tais que  $\|\delta y(x)\| < \epsilon$ , sendo  $\epsilon > 0$ ; ou seja, sempre é possível encontrar-se uma função  $\delta y(x)$  tal que  $0 < \epsilon \ll 1$ . Neste caso, para um determinado valor fixo de  $x_1 \leq x \leq x_2$ , e nas condições estabelecidas pela definição 1.6, é possível desenvolver-se  $J[\tilde{y}]$  (caso isso faça sentido) em uma série de Taylor em torno de  $y(x)$  como

$$\Delta J[y, \delta y] = \underbrace{\left. \frac{\partial J}{\partial \tilde{y}} \right|_{\tilde{y}=y}}_{\delta J[y]} (\delta y) + \underbrace{\frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 J}{\partial \tilde{y}^2} \right|_{\tilde{y}=y}}_{\delta^{(2)} J[y]} (\delta y)^2 + \dots$$

A condição necessária para que  $y = y(x)$  seja um extremum de  $J[y]$  é, portanto,

$$\delta J[y] = 0, \text{ para } \delta y(x) \text{ arbitrário.}$$

Porém, esta condição apenas define um *extremum fraco*, pois a mesma não especifica se o ponto estacionário é de máximo ou mínimo. Para tanto, é necessário também examinar  $\delta^{(2)} J[y]$ ; se  $\delta^{(2)} J[y]$  for negativo (positivo), para todo  $x_1 \leq x \leq x_2$ , então  $y = y(x)$  é um ponto de máximo (mínimo) de  $J[y]$ .

A argumentação acima serve apenas para traçar um paralelo entre o problema de se encontrar os extremos de funcionais com a procura dos pontos de máximo ou mínimo de funções. Para os casos de interesse na mecânica, os funcionais  $J[y]$  usualmente estão na forma (1.17), para a qual a argumentação não é aplicável. Contudo, o desenvolvimento apresentado a seguir é sempre válido.

A partir das definições e teoremas acima, Calcula-se agora a variação de (1.17), resultando

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{x_1}^{x_2} [G\{\tilde{y}(x), \tilde{y}'(x); x\} - G\{y(x), y'(x); x\}] dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} [G\{y + \delta y, y' + \delta y'; x\} - G\{y(x), y'(x); x\}] dx. \end{aligned}$$

Para variações infinitesimais, isto é, para  $\tilde{y}(x)$  suficientemente próximas de  $y(x)$  de tal forma que seja possível determinar-se  $\|\delta y\| \rightarrow 0, \forall x_1 \leq x \leq x_2$ , pode-se desenvolver a forma funcional de  $G\{y + \delta y, y' + \delta y'; x\}$  em uma série de Taylor como

$$G\{y + \delta y, y' + \delta y'; x\} = G\{y, y'; x\} + \frac{\partial G}{\partial y} \delta y + \frac{\partial G}{\partial y'} \delta y' + \mathcal{O}(\delta y^2, \delta y'^2, \delta y \delta y').$$

Mantendo então somente os termos de primeira ordem na série, resulta

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial G}{\partial y} \delta y + \frac{\partial G}{\partial y'} \delta y' \right) dx.$$

No segundo termo da integral acima, é importante notar que

$$\delta y' = \tilde{y}'(x) - y'(x) = \frac{d\tilde{y}}{dx} - \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (\tilde{y} - y) = \frac{d}{dx} (\delta y).$$

Ou seja,

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial G}{\partial y} \delta y + \frac{\partial G}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y) \right] dx.$$

Novamente, o segundo termo é desenvolvido via integração por partes, o que leva a

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial G}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y) dx = \left. \frac{\partial G}{\partial y'} \delta y \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} (\delta y) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} \delta y dx.$$

Ou seja,

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} \right) \delta y dx.$$

Portanto, a partir dos teoremas acima, o extremum de  $J[y]$  irá ocorrer para  $\delta J = 0$ . Além disso, como  $\delta y$  é uma variação arbitrária em torno do ponto estacionário do funcional, pelo

teorema 1.2 resulta que a condição necessária e suficiente para a determinação do extremum é dada por

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} = 0,$$

a qual é justamente a equação de Euler (1.21), já deduzida na seção 1.2.3.

### 1.2.5 UMA SEGUNDA FORMA PARA A EQUAÇÃO DE EULER

Quando o funcional  $G\{\dots\}$  em (1.17) não depende explicitamente na variável independente  $x$ , a equação resultante de (1.21) pode ser integrada, o que irá então fornecer uma segunda forma para a equação de Euler, sendo agora uma equação diferencial de primeira ordem para  $y(x)$ .

Inicialmente, observa-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} G\{y, y'; x\} &= \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} + \frac{\partial G}{\partial x} = y' \frac{\partial G}{\partial y} + y'' \frac{\partial G}{\partial y'} + \frac{\partial G}{\partial x} \\ &\implies y'' \frac{\partial G}{\partial y'} = \frac{dG}{dx} - \frac{\partial G}{\partial x} - y' \frac{\partial G}{\partial y}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial G}{\partial y'} \right) = y'' \frac{\partial G}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} \implies \frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial G}{\partial y'} \right) = \frac{dG}{dx} - \frac{\partial G}{\partial x} - y' \left( \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} \right).$$

Se  $G\{\dots\}$  satisfaz a equação de Euler (1.21), então o último termo acima é nulo. Este resultado pode então ser colocado na forma

$$\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left( G - y' \frac{\partial G}{\partial y'} \right) = 0. \quad (1.22a)$$

Esta é a chamada segunda forma da equação de Euler, equivalente a (1.21).

Agora, se  $\partial G/\partial x = 0$ , esta equação pode ser integrada exatamente, resultando em

$$G - y' \frac{\partial G}{\partial y'} = \text{constante}. \quad (1.22b)$$

Esta última forma fornece uma equação diferencial de primeira ordem para  $y(x)$ .

**Exercício 1.3 (Geodésica).** Uma *geodésica* é a curva de menor distância entre dois pontos quaisquer sobre uma superfície arbitrária. Encontre a geodésica sobre uma superfície esférica.

*Resolução.* Dada uma esfera de raio  $\rho$ , escreve-se inicialmente as coordenadas de  $(x, y, z)$  em coordenadas esféricas como

$$x = \rho \cos \theta \cos \varphi \qquad y = \rho \cos \theta \sin \varphi \qquad z = \rho \sin \theta.$$

Então, o elemento de comprimento  $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$  sobre a esfera é obtido a partir de

$$dx = \rho \cos \theta \cos \varphi d\theta - \rho \sin \theta \sin \varphi d\varphi \qquad dy = \rho \cos \theta \sin \varphi d\theta + \rho \sin \theta \cos \varphi d\varphi \qquad dz = -\rho \sin \theta d\theta,$$

de onde é obtido<sup>9</sup>

$$dl = \rho \sqrt{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2}.$$

Portanto, a distância entre os pontos  $A \doteq (\theta_1, \varphi_1)$  e  $B \doteq (\theta_2, \varphi_2)$  sobre a esfera fica

$$\ell = \int_A^B dl = \int_A^B \rho \sqrt{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \sqrt{\left( \frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2 + \sin^2 \theta} d\varphi.$$

Ou seja, o funcional

$$\ell[\theta] = \rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\theta'^2 + \sin^2 \theta} d\varphi,$$

<sup>9</sup>A expressão obtida para  $dl$  é o caso particular (quando  $\rho = \text{cte.}$ ) da extensão de um elemento de arco em coordenadas esféricas polares, dada em geral por  $dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$ , e derivada em detalhes em [Física-Matemática](#), seção 1.5.2.

sendo  $\theta' = d\theta/d\varphi$ , irá fornecer a distância entre os pontos  $A$  e  $B$  ao longo de um caminho sobre a esfera.

Para a aplicação da equação de Euler, identifica-se

$$G = G\{\theta, \theta'\} = \sqrt{\theta'^2 + \text{sen}^2 \theta},$$

o qual é independente de  $\varphi$ . Pode-se empregar então a segunda forma dada por (1.22b), de onde resulta

$$\begin{aligned} \sqrt{\theta'^2 + \text{sen}^2 \theta} - \theta' \frac{\partial}{\partial \theta'} \sqrt{\theta'^2 + \text{sen}^2 \theta} &= a = \text{cte.}, \\ \sqrt{\theta'^2 + \text{sen}^2 \theta} - \frac{\theta'^2}{\sqrt{\theta'^2 + \text{sen}^2 \theta}} &= a. \end{aligned}$$

Esta equação pode ser escrita como

$$\text{sen}^2 \theta = a \sqrt{\theta'^2 + \text{sen}^2 \theta},$$

a qual pode ser resolvida escrevendo-se  $d\varphi/d\theta = 1/\theta'$ , resultando em

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{a \csc^2 \theta}{\sqrt{1 - a^2 \csc^2 \theta}}.$$

Esta EDO pode ser resolvida para  $\varphi = \varphi(\theta)$ , resultando em

$$\varphi = -\text{sen}^{-1} \left( \frac{1}{\beta} \cotan \theta \right) + \alpha,$$

sendo  $\beta^2 = (1 - a^2)/a^2$  e  $\alpha = \text{cte.}$

Escrevendo a solução na forma equivalente

$$\cotan \theta = -\beta \text{sen}(\varphi - \alpha),$$

escreve-se

$$\cos \theta = -\beta \cos \alpha \text{sen} \theta \text{sen} \varphi + \beta \text{sen} \alpha \text{sen} \theta \cos \varphi$$

e, retornando às coordenadas Cartesianas, resulta

$$z = \beta \text{sen} \alpha x - \beta \cos \alpha y \implies z = Ax - By,$$

com  $A = \beta \text{sen} \alpha$  e  $B = \beta \cos \alpha$ .

Esta solução corresponde à equação de um plano que passa pela origem  $(0, 0, 0)$ . A intersecção deste plano com a esfera de raio  $\rho$  determina as geodésicas sobre esta última. A figura 1.7 ilustra algumas dessas geodésicas sobre uma esfera de raio  $\rho = 1$ . Já a figura 1.8 ilustra a diferença das distâncias entre duas cidades situadas à mesma latitude, tanto ao longo da geodésica quanto ao longo da paralela. A curva geodésica é menos extensa devido a curvatura do globo.

## 1.2.6 EXTENSÕES AO PROBLEMA BÁSICO DO CÁLCULO VARIACIONAL

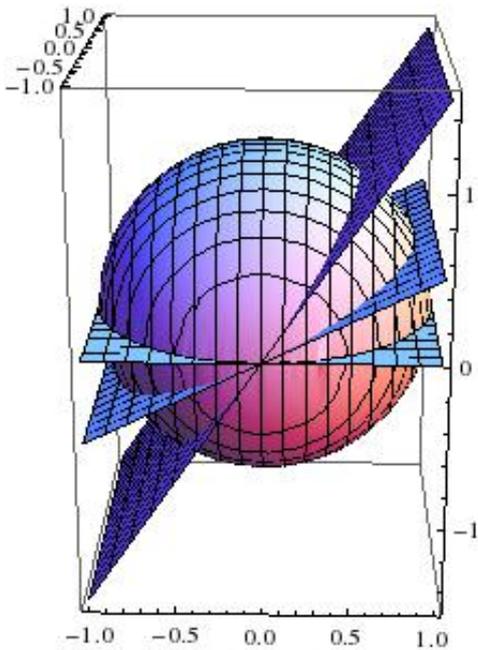
Diversas extensões à forma básica do funcional  $J[y]$  dado por (1.17) são possíveis. Nesta seção serão discutidas algumas dessas extensões relevantes para a mecânica clássica e para a física em geral.

### 1.2.6.1 FUNCIONAIS COM DIVERSAS VARIÁVEIS DEPENDENTES

A discussão realizada nas seções 1.2.2 – 1.2.5 assumia a existência de uma única função incógnita  $y(x)$ , a ser descoberta a partir de um princípio extremante. Contudo, na física com frequência um funcional é proposto com dependência em diversas funções  $y_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) incógnitas. Estas devem também ser descobertas a partir dos métodos do cálculo variacional.

Considera-se então um funcional contido no integrando de (1.17) que depende de  $n \geq 1$  incógnitas, até as suas primeiras derivadas, tal como

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} G\{\{y_i(x)\}, \{y_i'(x)\}; x\} dx, \quad (1.23a)$$



**Figura 1.7:** Algumas geodésicas sobre a esfera de raio unitário. As geodésicas são obtidas pelas equações de plano  $z = 0$ ,  $z = x/2$  e  $z = 3x/2$ .

onde, para  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$G \equiv G \{ \{y_i(x)\}, \{y'_i(x)\}; x \} \doteq G \{ y_1(x), y'_1(x), y_2(x), y'_2(x), \dots, y_n(x), y'_n(x); x \}, \quad (1.23b)$$

sendo que a condição de limites fixos ainda é mantida para todas as incógnitas.

Aplicando novamente os métodos apresentados na seção 1.2.4 ao novo funcional  $J[\{y_i\}]$ , a condição de ocorrência do extremum resulta em

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial G}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial G}{\partial y'_i} \delta y'_i \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial G}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'_i} \right) \delta y_i dx = 0. \quad (1.24)$$

Assumindo que todas as variações  $\delta y_i$  são arbitrárias e independentes, o teorema 1.2 leva ao seguinte conjunto de equações, as quais determinam os pontos estacionários do funcional,

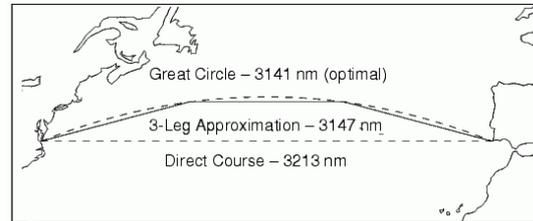
$$\frac{\partial G}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'_i} = 0, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.25)$$

Ou seja, resulta um conjunto de equações de Euler, uma para cada função  $y_i(x)$ .

A suposição de que as variações  $\delta y_i$  são arbitrárias e independentes não é válida em muitas situações relevantes para a física. Neste caso, as características do sistema físico impõe relações entre diversas funções do conjunto  $\{y_i(x)\}$ , relações essas chamadas de *vínculos*. O tratamento de problemas variacionais com vínculos será abordado em diversos pontos deste texto, começando pela seção 1.2.7.

### 1.2.6.2 FUNCIONAIS DEPENDENDO DE FUNÇÕES DE DIVERSAS VARIÁVEIS INDEPENDENTES

Em muitos problemas físicos, particularmente em teorias de campos clássicos ou quânticos, o funcional  $J$  depende de funções de mais de uma variável independente. Por exemplo, no caso



**Figura 1.8:** Distâncias entre Norfolk, EUA ( $37^\circ \text{ N}, 76^\circ \text{ O}$ ) e Cabo São Vicente, Portugal ( $37^\circ \text{ N}, 9^\circ \text{ O}$ ), medidas ao longo da geodésica (*great circle*, 3141 nm) e ao longo da paralela (*direct course*, 3213 nm). A distância pela geodésica é 72 nm (milhas náuticas) ( $\approx 133,34 \text{ km}$ ) menor.

em que  $J$  depende da função  $z = z(x, y) \in C^2(D)$  (a qual tem duas variáveis independentes  $\{x, y\}$ ) e de suas derivadas (parciais) primeiras, a forma genérica do funcional é

$$J[z] = \iint_D G\{z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y); x, y\} dx dy, \quad (1.26)$$

sendo  $z_x = \partial z / \partial x$ ,  $z_y = \partial z / \partial y$  e  $D$  uma região do plano  $x \times y$  na qual a função  $z$  possui derivadas contínuas até a segunda ordem.

A derivação da equação de Euler para este caso será realizada na seção 4.6 quando forem estudadas oscilações transversais em uma corda contínua. O formalismo também irá servir como uma introdução a teorias de campos clássicos.

### 1.2.6.3 FUNCIONAIS DEPENDENDO DE DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

Nesta extensão, sejam as funções  $y(x) \in C^{n+1}[x_1, x_2]$ , busca-se o *extremum* do funcional

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} G\{y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x); x\} dx,$$

para o qual valem as *condições de fronteira* (i.e., os limites fixos)

$$\left. \begin{aligned} y(x_1) &= a_0, & y'(x_1) &= a_1, & \dots, & y^{(n)}(x_1) &= a_n \\ y(x_2) &= b_0, & y'(x_2) &= b_1, & \dots, & y^{(n)}(x_2) &= b_n. \end{aligned} \right\}$$

Sem demonstração, o *extremum* consiste nas soluções da *equação de Euler-Poisson*

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial G}{\partial y''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial G}{\partial y^{(n)}} = 0.$$

Este tipo de funcional pode surgir, por exemplo, em problemas de mecânica de corpos extensos flexíveis, isto é, não rígidos. Este tipo de sistema não será discutido neste texto.

### 1.2.6.4 FUNCIONAIS COM CONDIÇÕES DE FRONTEIRA VARIÁVEIS

As aplicações do cálculo variacional que serão consideradas neste texto assumem que as condições de fronteira do funcional  $J$  são fixas. A flexibilização desta condição para um funcional do tipo (1.26) assume que a região de fronteira também é sujeita a variações, isto é,  $D = D(s)$ , sendo  $s$  um parâmetro livre cuja variação descreve a variação da região de fronteira.

Este tipo de cálculo variacional é empregado na demonstração do teorema de Noether.<sup>10</sup> Este teorema de grande importância para teorias de campo afirma que toda simetria diferenciável (i.e., contínua) de um sistema físico implica em uma lei de conservação. O teorema de Noether não será empregado neste texto, mas a conservação de quantidades físicas devida a simetrias do sistema serão discutidas nas seções 1.9 e 2.2.

### 1.2.7 EQUAÇÕES DE EULER COM VÍNCULOS

A questão que se impõe agora é como modificar o tratamento do cálculo variacional quando há duas ou mais variáveis dependentes  $y_i(x)$  ( $i \geq 2$ ), mas estas não podem sofrer variações independentes. Isto é, uma variação  $\delta y_1$ , aplicada a  $y_1(x)$ , implica necessariamente em variações impostas também sobre pelo menos uma das outras variáveis  $y_2, y_3, \dots$ . Neste caso, a hipótese de variações independentes que levou ao conjunto de equações de Euler (1.25) não é mais válida e o formalismo deve ser modificado. Estas dependências ou condições impostas às variações de duas ou mais variáveis são denominadas *vínculos*. Nesta seção será discutido o caso onde os vínculos são impostos sobre as variáveis dependentes somente. Outros tipos importantes de vínculos e sua classificação serão apresentados na seção 1.3.

<sup>10</sup>Demonstrado em 1915 pela matemática alemã Emmy Noether (1882 – 1935).

### 1.2.7.1 VÍNCULOS ALGÉBRICOS ENTRE AS VARIÁVEIS DEPENDENTES

Considera-se inicialmente o caso particular quando existem duas variáveis dependentes  $y(x)$  e  $z(x)$  (coordenadas), relacionadas entre si por uma equação de vínculo

$$f(y, z, x) = 0. \quad (1.27)$$

Neste caso o funcional (1.23b) fica escrito

$$G = G\{y, y', z, z'; x\}$$

e o extremo do funcional  $J[y, z]$  é determinado por (1.24), o qual se reduz a

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} \right) \delta y + \left( \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial z'} \right) \delta z \right] dx = 0.$$

Porém, ao contrário do que ocorreu no tratamento apresentado na seção 1.2.6.1, quando as variações das variáveis  $\delta y_i$  foram supostas independentes, agora estas não o são. Uma variação  $\delta y$  deve necessariamente determinar a variação  $\delta z$  através da equação de vínculo (1.27). Como o vínculo entre as variáveis dependentes  $y$  e  $z$  deve sempre ser obedecido, então qualquer variação  $\delta y$  deve implicar em uma variação  $\delta z$  de forma a manter  $f(y, z, x)$  invariável, ou seja,  $\delta f = 0$ . Assim,

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0 \implies \delta z = -\frac{\partial f / \partial y}{\partial f / \partial z} \delta y,$$

ou seja, foi obtida uma relação entre as variações das coordenadas. Inserindo esta expressão no integrando acima, resulta

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} \right) - \left( \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial z'} \right) \frac{\partial f / \partial y}{\partial f / \partial z} \right] \delta y dx = 0.$$

Agora é possível empregar-se novamente o teorema fundamental 1.2 e concluir que o ponto estacionário do funcional é dado por

$$\left( \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} \right) - \left( \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial z'} \right) \frac{\partial f / \partial y}{\partial f / \partial z} = 0.$$

Esta expressão pode ser escrita como

$$\left( \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{-1} = \left( \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial z'} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^{-1}.$$

No resultado acima, observa-se que o lado esquerdo envolve somente derivadas de  $G$  e  $f$  em relação a  $y$  e  $y'$ , ao passo que o lado direito envolve somente derivadas em  $z$  e  $z'$ . Como ambas as variáveis dependentes são funções da variável independente  $x$ , a igualdade somente será satisfeita se ambos os lados forem iguais à mesma função de  $x$ , a qual será escrita como  $-\lambda(x)$ . Isto permite desacoplar as equações em  $y$  e  $z$ , formando o sistema

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} + \lambda(x) \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (1.28a)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial z'} + \lambda(x) \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \quad (1.28b)$$

A solução completa do problema envolve agora a determinação de 3 funções:  $y(x)$ ,  $z(x)$  e  $\lambda(x)$ . Isto é possível, em princípio, porque há 3 equações: o vínculo (1.27) e as equações de Euler (1.28a,b). A função  $\lambda(x)$  também é conhecida como o *multiplicador indeterminado de Lagrange*.

Para o caso geral de existirem  $n$  coordenadas (variáveis dependentes)  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  com  $m (< n)$  vínculos na forma

$$f_j = f_j(y_1, y_2, \dots, y_n, x) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

o tratamento acima pode ser facilmente generalizado, conforme é discutido a seguir.

Dado novamente o funcional (1.23a), observa-se que, para um conjunto de  $m$  funções  $\{\lambda_j(x)\}$ , inicialmente indeterminadas, segue que

$$\lambda_j(x) f_j(y_1, \dots, y_n, x) = 0 \implies \int_{x_1}^{x_2} \lambda_j(x) f_j(y_1, \dots, y_n, x) = 0, \quad (j = 1, \dots, m).$$

Portanto, o funcional (1.23a) pode ser escrito de forma equivalente como

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} \left[ G\{\{y_i(x)\}, \{y'_i(x)\}; x\} + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) f_j(\{y_i\}, x) \right] dx,$$

o que não altera o seu valor.

A condição de ocorrência do extremum ( $\delta J = 0$ ) resulta agora em

$$\delta J[\{y_i\}] = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial G}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial G}{\partial y'_i} \right) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \right] \delta y_i \right\} dx = 0.$$

Agora, a condição necessária e suficiente para que  $\delta J$  se anule para quaisquer variações  $\{\delta y_i\}$  arbitrárias é

$$\sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial G}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial G}{\partial y'_i} \right) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \right] \delta y_i = 0. \quad (1.29)$$

Se todas as variáveis dependentes no conjunto  $\{y_i(x)\}$  sofressem variações independentes, então a condição acima demandaria que os termos dentro de  $[\dots]$  fossem individualmente nulos. Contudo, as funções  $\{y_i(x)\}$  também devem satisfazer aos vínculos  $f_j(\{y_i\}, x) = 0$  ( $j = 1, \dots, m$ ). Devido a estes vínculos,  $m$  variáveis em  $\{y_i(x)\}$  são dependentes das  $n-m$  restantes e a imposição  $[\dots] = 0$  não pode ser imediatamente realizada. A técnica dos multiplicadores indeterminados de Lagrange permite resolver este problema, levando a uma nova forma para as equações de Euler-Lagrange em sistemas vinculados.

As  $m$  funções  $\lambda_j(x)$  podem ser determinadas se o conjunto  $\{y_i(x)\}$  for ordenado de tal forma que as primeiras  $m$  variáveis sejam dependentes das  $n-m$  restantes e se for imposto na equação (1.29) que os primeiros  $m$  termos do lado esquerdo sejam identicamente nulos, *i. e.*, que

$$\underbrace{\frac{\partial G}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial G}{\partial y'_i} \right) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \frac{\partial f_j}{\partial y_i}}_{\Phi_i\{\{y_i\}, \{y'_i\}; x\}} = 0, \quad (i = 1, \dots, m).$$

Como  $G\{\{y_i\}, \{y'_i\}; x\}$  é um funcional conhecido, então as quantidades  $\Phi_i$  definidas acima também o são. O mesmo se aplica a  $\phi_{ij}(x) \doteq \partial f_j / \partial y_i$ . Portanto,

$$\Phi_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j \phi_{ij} = 0, \quad (i = 1, \dots, m)$$

consiste em um sistema linear de equações para as incógnitas  $\{\lambda_j\}$  que pode, em princípio, ser resolvido e de onde resultam  $\lambda_j = \lambda_j(\{y_i\}, \{y'_i\}, x)$ . Obtendo-se as soluções finais  $y_i = y_i(x)$ , resultam finalmente os multiplicadores indeterminados de Lagrange  $\lambda_j = \lambda_j(x)$ .

Uma vez determinados os  $m$  multiplicadores de Lagrange, a equação (1.29) se reduz a

$$\sum_{i=m+1}^n \left[ \frac{\partial G}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial G}{\partial y'_i} \right) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \right] \delta y_i = 0,$$

a qual contém as variações  $\delta y_i$  ( $i = m+1, \dots, n$ ) independentes. Portanto, agora a imposição  $[\dots] = 0$  pode ser realizada.

Desta maneira, a solução completa do problema pode ser obtida pela solução do sistema de equações

$$\frac{\partial G}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \frac{\partial f_j}{\partial y_i} = 0, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.30a)$$

$$f_j(y_1, \dots, y_n, x) = 0, \text{ ou}$$

$$\frac{df_j}{dx} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial y_i} y_i' + \frac{\partial f_j}{\partial x} = 0, \quad (j = 1, \dots, m). \quad (1.30b)$$

Neste sistema, há  $n + m$  incógnitas (coordenadas + vínculos), com  $n + m$  equações, o que torna o sistema, em princípio, solúvel.

### 1.2.7.2 EQUAÇÃO DE EULER COM VÍNCULO INTEGRAL

Uma outra situação de interesse surge quando o vínculo também está escrito em termos de uma integração. Para caracterizar o problema, considera-se novamente o funcional  $J[y]$  dado em (1.17), porém agora com um vínculo imposto sobre o *extremum* do mesmo, sendo este vínculo expresso na forma de um segundo funcional  $K[y] = \mathcal{K}$ , onde  $\mathcal{K}$  é um valor constante que deve sempre ser respeitado. Este novo funcional, portanto, fica escrito como

$$K[y] = \int_{x_1}^{x_2} g\{y, y'; x\} dx = \mathcal{K}.$$

A solução este problema de vínculos é determinada pelo seguinte teorema.

**Teorema 1.3.** *Dado o funcional*

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} G\{y, y'; x\} dx,$$

tal que  $y(x) \in C^1[x_1, x_2]$  e tal que  $y(x_1) = y_1$  e  $y(x_2) = y_2$ . Dado também o funcional

$$K[y] = \int_{x_1}^{x_2} g\{y, y'; x\} dx = \mathcal{K},$$

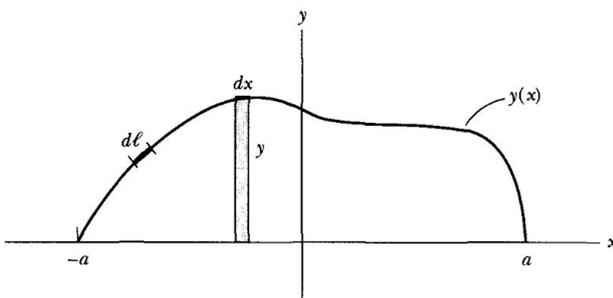
onde  $\mathcal{K} \in \mathbb{R}$  é constante. Seja  $y = y(x)$  um extremum de  $J[y]$ . Então, se  $y(x)$  não for um extremum de  $K[y]$ , existe uma constante  $\lambda$  tal que  $y(x)$  é um extremum do funcional

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} (G + \lambda g) dx, \quad (1.31)$$

isto é,  $y(x)$  satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} + \lambda \left( \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial g}{\partial y'} \right) = 0. \quad (1.32)$$

**Exemplo 1.7 (O Problema de Dido).** Um problema onde o uso de um vínculo integral se faz necessário é o *problema de Dido*. Dada uma curva  $y(x)$  de extensão fixa  $\ell$  e que cruza as abscissas nos pontos  $(-a, 0)$  e  $(a, 0)$ , qual será a forma de  $y(x)$  que maximiza a área sob a mesma?



**Figura 1.9:** Deseja-se encontrar a função  $y(x)$  tal que a área delimitada pela mesma seja a maior possível, para um perímetro fixo.

**Resolução:** A situação está representada na figura 1.9. A área hachurada indica um elemento de área  $dA = y dx$ . Então a área total sob a curva é

$$A[y] = \int_{-a}^a y dx.$$

Deseja-se maximizar  $A[y]$  mantendo-se a extensão total da curva constante. Este vínculo é expresso por

$$L[y] = \int_{-a}^a d\ell = \int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2} dx = \ell,$$

onde  $d\ell$  é o elemento de arco ao longo da curva. Identificam-se então em (1.32) os funcionais

$$G\{y, y'; x\} = y \qquad g\{y, y'; x\} = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Assim,

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial G}{\partial y'} = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial g}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

e a equação (1.32) fica

$$1 - \lambda \frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0 \implies \frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = \frac{1}{\lambda},$$

cujas solução geral é

$$y(x) = \pm \sqrt{\lambda^2 - (x - c_1)^2} + c_2, \quad (c_1, c_2 = \text{ctes.})$$

a qual pode ser reescrita na forma

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = \lambda^2,$$

a qual é a equação de uma (semi) circunferência de raio  $\lambda$ . Aplicando as condições de contorno,

$$(a + c_1)^2 + c_2^2 = \lambda^2, \quad (a - c_1)^2 + c_2^2 = \lambda^2 \quad \rightsquigarrow a + c_1 = \pm(a - c_1) \Rightarrow c_1 = 0, \\ a^2 + c_2^2 = \lambda^2 \Rightarrow c_2 = -\sqrt{\lambda^2 - a^2}.$$

Ou seja, necessariamente  $a \leq \lambda$ , e

$$x^2 + \left( y + \sqrt{\lambda^2 - a^2} \right)^2 = \lambda^2,$$

o que mostra que o centro da circunferência localiza-se ao longo do eixo  $y$ , no ponto  $(0, c_2)$ . A situação mais simples ocorre se  $a = \lambda$ , quando então

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

resultando então em uma semicircunferência de raio  $a$  centrada na origem. Neste caso, a extensão da semicircunferência determina o valor da constante  $\lambda$ :

$$\ell = \pi a = \pi \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{\ell}{\pi}.$$

**Exemplo 1.8 (O “caminho” de Gibbs para a entropia).** Uma aplicação interessante da ação de vínculos sobre variações foi proposta por Josiah Willard Gibbs (1839 – 1930) para a determinação da probabilidade de ocupação de um determinado estado físico de um sistema estatístico em equilíbrio termodinâmico.

Dado um sistema estatístico com  $W$  estados discretos de energia acessíveis, a sua entropia total ( $S$ ), em equilíbrio termodinâmico, é dada pela fórmula de Boltzmann

$$S[p_i] = -k_B \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i,$$

sendo  $k_B = 1,3807 \times 10^{-23}$  J/K a constante de Boltzmann e  $0 \leq p_i \leq 1$  a probabilidade de ocupação do  $i$ -ésimo estado físico com energia  $\varepsilon_i$ .

De acordo com Gibbs, a probabilidade de ocupação de um determinado estado físico é tal que a entropia é máxima, sob os vínculos do ensemble em questão. Deste ponto de vista, a entropia  $S[p_i]$  é interpretada como um funcional das probabilidades  $\{p_i\}$  ( $i = 1, \dots, W$ ), o qual será maximizado sob um ou mais vínculos. Essas probabilidades serão obtidas para dois ensembles, o microcanônico e o canônico.

- *Ensemble microcanônico.* Neste ensemble, o número de partículas, o volume e a energia total do sistema são fixos. Neste caso, a maximização da entropia será obtida com o emprego de um único vínculo:

$$f_1(p_1, \dots, p_W) = \sum_{i=1}^W p_i = 1,$$

isto é, a exigência de normalização da distribuição das probabilidades de ocupação dos estados.

Como  $S$  é um funcional das probabilidades  $\{p_i\}$  e como essas, por sua vez, são simplesmente números e não funções, a maximização desejada será obtida a partir do funcional

$$\tilde{S}[p_i] = S[p_i] + \lambda_1 f_1(p_i) = -k_B \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i + \lambda_1 \left( \sum_{i=1}^W p_i \right),$$

de forma semelhante ao realizado em (1.31). Neste caso,

$$\begin{aligned} \delta \tilde{S} &= \delta(S + \lambda_1 f_1) = 0, \\ \sum_{i=1}^W [-k_B (\ln p_i + 1) + \lambda_1] \delta p_i &= 0 \implies -k_B (\ln p_i + 1) + \lambda_1 = 0 \\ \implies p_i &= e^{\lambda_1/k_B - 1} = \text{cte}. \end{aligned}$$

Ou seja, todos os estados têm a mesma probabilidade de ocorrência. O valor do multiplicador de Lagrange  $\lambda_1$  é obtido retornando-se à condição de normalização, de onde se obtém

$$\sum_{i=1}^W p_i = \sum_{i=1}^W e^{\lambda_1/k_B - 1} = e^{\lambda_1/k_B - 1} W = 1 \implies \lambda_1 = (1 - \ln W) k_B \implies p_i = W^{-1}.$$

Portanto, a entropia de um ensemble microcanônico fica simplesmente

$$S = k_B \ln W,$$

a qual é a famosa expressão obtida por Boltzmann.

- *Ensemble canônico.* Neste ensemble, o sistema ainda possui número de partículas constante, mas pode trocar energia com o ambiente. Ao atingir o equilíbrio termodinâmico, o sistema passa a ter uma energia interna fixa, a qual é determinada por um parâmetro intensivo denominado *temperatura*. Neste caso, a maximização da entropia será realizada por meio de um vínculo adicional, dado pela exigência de energia média  $\langle E \rangle$  fixa:

$$f_2(p_1, \dots, p_W; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_W) \doteq \langle E \rangle = \sum_{i=1}^W p_i \varepsilon_i = U,$$

sendo  $U$  denominado a *energia interna* do sistema.

Então, o funcional a ser maximizado é agora

$$\tilde{S}[p_i] = S[p_i] + \lambda_1 f_1(p_i) + \lambda_2 f_2(p_i) = -k_B \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i + \lambda_1 \left( \sum_{i=1}^W p_i \right) + \lambda_2 \left( \sum_{i=1}^W p_i \varepsilon_i \right).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \delta \tilde{S} = 0 &\rightsquigarrow \left\{ \sum_{i=1}^W [-k_B (\ln p_i + 1) + \lambda_1 + \lambda_2 \varepsilon_i] \right\} \delta p_i = 0, \\ &\implies -k_B (\ln p_i + 1) + \lambda_1 + \lambda_2 \varepsilon_i = 0 \\ &\implies p_i = p_i(\varepsilon_i) = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 \varepsilon_i)/k_B - 1}. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Retornando à condição de normalização, determina-se  $\lambda_1$ :

$$\sum_{i=1}^W p_i = 1 \implies e^{1-\lambda_1/k_B} \doteq Z(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_W) = \sum_{i=1}^W e^{\lambda_2 \varepsilon_i / k_B},$$

sendo  $Z(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_W)$  denominada a *função de partição do ensemble canônico*.

Para obter o segundo multiplicador de Lagrange, retorna-se a (1.33), multiplica-se por  $p_i$  e realiza-se a soma, resultando

$$S + \sum_{i=1}^W (\lambda_1 - k_B) p_i + \lambda_2 \sum_{i=1}^W p_i \varepsilon_i = 0 \rightsquigarrow S - k_B \ln Z + \lambda_2 U = 0 \implies S = k_B \ln Z - \lambda_2 U.$$

Empregando-se agora a conhecida relação termodinâmica

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U},$$

resulta  $\lambda_2 = -T^{-1}$ .

Portanto, a probabilidade de ocupação do  $i$ -ésimo estado físico no ensemble canônico resulta

$$p_i(\varepsilon_i) = Z^{-1} e^{-\varepsilon_i/k_B T} = \frac{e^{-\varepsilon_i/k_B T}}{\sum_{i=1}^W e^{-\varepsilon_i/k_B T}},$$

a qual é a conhecida *distribuição de Boltzmann*.

Todo o formalismo do cálculo variacional desenvolvido nesta seção será agora empregado na formulação Lagrangiana da mecânica clássica.

## 1.3 VÍNCULOS NA MECÂNICA CLÁSSICA

A existência de vínculos em grande parte dos sistemas físicos é um dos grandes motivadores para o desenvolvimento e uso do cálculo variacional, uma vez que o mesmo possibilita um tratamento mais simplificado da dinâmica de sistemas vinculados do que é possível na formulação Newtoniana.

*Vínculos* são limitações à dinâmica de um sistema físico. Esses vínculos em geral são de natureza geométrica ou cinemática. Na mecânica, a existência de vínculos sobre a dinâmica das partículas terá uma influência equivalente às forças que agem sobre as mesmas. Um exemplo imediato de dinâmica com vínculos pode ser fornecido pelo problema do movimento de uma partícula deslocando-se sob a ação da força peso sobre uma superfície esférica. A forma geométrica da superfície sobre a qual a partícula se desloca implica na existência de uma força adicional sobre a mesma, além do peso; no caso, a força normal, a qual é sempre perpendicular à superfície de contato. Se, além disso, existirem forças de atrito atuando sobre a partícula, então estas também serão determinadas pela forma geométrica da esfera.

Na formulação Newtoniana, a ação desses vínculos deve ser traduzida na forma de forças, as quais são determinadas tanto pela dinâmica das partículas quanto pelas limitações geométricas impostas pelos vínculos. Usualmente, esse tratamento não pode ser feito de uma maneira trivial. Por outro lado, na formulação Lagrangiana, a ação dos vínculos é realizada através da imposição de *equações de vínculos*, os quais são incorporados pelo cálculo variacional de uma maneira relativamente mais simples, pois não demanda a definição de campos vetoriais complicados (as forças de vínculo).

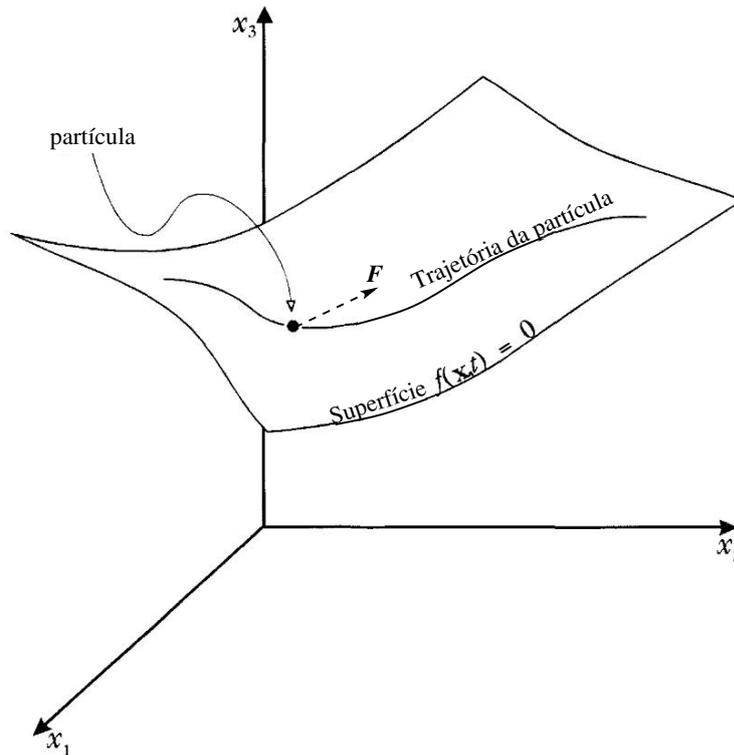
### 1.3.1 EQUAÇÕES DE VÍNCULOS

O movimento de um sistema dinâmico é com frequência delimitado por agentes externos que aplicam forças sobre o sistema e que são, muitas vezes, difíceis de serem determinadas ou mesmo desconhecidas. Por outro lado, em geral é possível expressar-se esses vínculos na forma de equações de vínculos, as quais são determinadas pela natureza geométrica ou cinemática desses.

Considerando a dinâmica de um conjunto de  $N$  partículas que se deslocam no  $E^3$ , assume-se que estas têm seu movimento delimitado por um conjunto de  $K < 3N$  equações de vínculos na forma

$$f_\ell(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, t) = 0, \quad (\ell = 1, \dots, K), \quad (1.34)$$

sendo  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) a posição instantânea da  $i$ -ésima partícula e onde se assume que as funções  $f_\ell$  são diferenciáveis nos seus argumentos. A figura 1.10 ilustra o caso de uma partícula movendo-se sob a ação de uma força resultante  $\mathbf{F}$ , porém com movimento restrito por uma equação de vínculo do tipo  $f(\mathbf{r}, t) = 0$ . A ação conjunta das forças e do vínculo é tal que a trajetória da partícula fica sempre restrita à superfície.



**Figura 1.10:** Uma partícula movendo-se no  $E^3$  sob a ação de uma força resultante  $\mathbf{F}$  e restrita a uma superfície determinada por uma equação na forma  $f(\mathbf{r}, t) = 0$ .

### 1.3.2 CLASSIFICAÇÃO DOS VÍNCULOS

Uma classe particular importante de vínculos são os denominados **holônomo**<sup>11</sup> ou **integráveis**. Estes ocorrem quando as equações de vínculo (1.34) se reduzem a

$$f_\ell(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad (\ell = 1, \dots, K), \quad (1.35)$$

as quais descrevem restrições de natureza puramente geométrica, sem dependência na cinemática da partícula.

Se um vínculo holônomo não depende do tempo, este é denominado também **fixo** ou **esclerônomo**. Por outro lado, se a dependência temporal existe, o vínculo móvel também é denominado **reônomo**.<sup>12</sup>

Vínculos gerais como as equações (1.34), as quais dependem das velocidades das partículas, são então denominados **não holônomo**s. Os exemplos a seguir ilustram alguns tipos de vínculos usuais na mecânica.

**Exemplo 1.9.** Uma partícula está restrita a uma superfície fixa. Sendo  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$  o vetor posição da mesma em um sistema Cartesiano, em relação ao qual a superfície permanece

<sup>11</sup>Do grego *hólos* (inteiro, completo) e *nómos* (regra, lei).

<sup>12</sup>Do inglês *scleronomic* e *rheonomic*, respectivamente.

fixa, então as coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  não são variáveis independentes mas devem satisfazer a equação de superfície

$$f(\mathbf{r}) = f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

a qual consiste em um vínculo esclerônimo. Se a superfície for uma esfera de raio  $R$  centrada na origem, a equação de vínculo é

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 - R^2 = 0.$$

**Exemplo 1.10.** Uma partícula está restrita a uma superfície móvel ou deformável. Neste caso, o vínculo reônimo é dado por

$$f(x_1, x_2, x_3, t) = 0,$$

onde se nota a dependência temporal explícita na equação.

**Exemplo 1.11.** Duas partículas se movem no espaço sempre unidas por uma haste rígida. Este é um caso onde as forças de vínculo são difíceis de modelar. Porém, a equação de vínculo é, simplesmente,

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 - L^2 = 0,$$

sendo  $L$  o comprimento da haste.

**Exemplo 1.12 (Pêndulo duplo).** Um pêndulo duplo oscila em um plano vertical fixo, conforme está representado na figura 1.11. Se o movimento das partículas ocorre no plano  $(x, y)$ , então as equações de vínculo nos movimentos das mesmas são:

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 &= 0 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

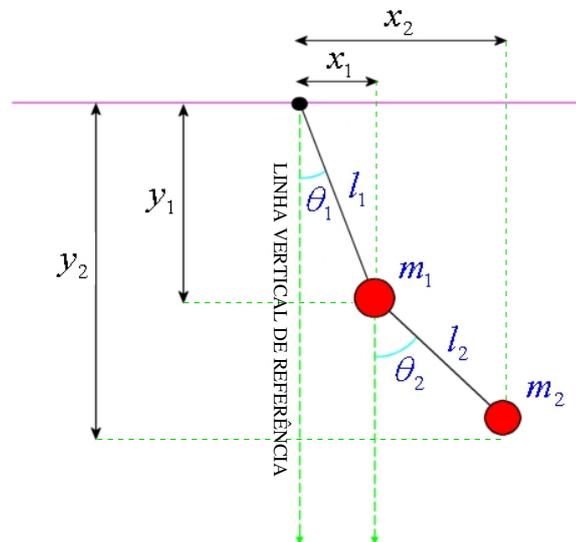


Figura 1.11: Pêndulo duplo plano.

**Exercício 1.4 (Cilindro rolando sobre plano inclinado).** Considere um cilindro rolando sem deslizar sobre um plano inclinado, conforme representado na figura 1.12. Determine a equação de vínculo em termos das coordenadas generalizadas  $y$  e  $\theta$ .

*Resolução.* Definindo como condição inicial  $\theta(y=0) = 0$ , sendo  $\theta$  o ângulo de rotação do cilindro em torno de seu centro de simetria, então a relação entre as duas coordenadas é  $y = R\theta$ , sendo  $R$  o raio do cilindro. Ou seja, a equação de vínculo pode ser escrita

$$f(y, \theta) = y - R\theta = 0.$$

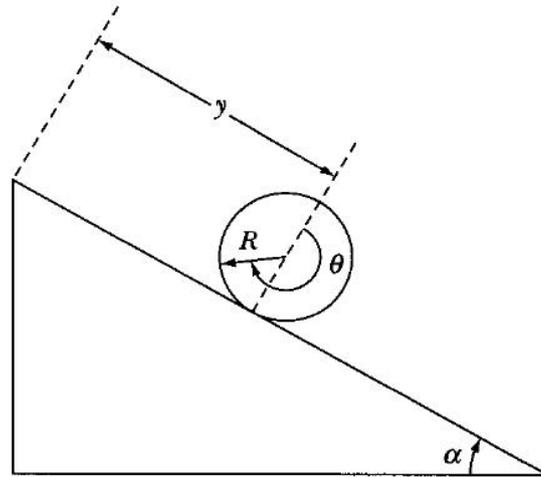


Figura 1.12: Um cilindro rola plano abaixo sem deslizar.

Esta equação exprime a condição de que o aumento na coordenada  $y$  ocorre somente devido à rotação do cilindro, sem permitir o deslizamento.

Neste exercício e no próximo serão oferecidos também importantes exemplos da diferença entre vínculos holônomos e não holônomos. No caso do cilindro, a equação de vínculo  $f(y, \theta)$  poderia ser diferenciada, resultando em

$$g(\dot{y}, \dot{\theta}) = \dot{y} - R\dot{\theta} = 0,$$

a qual, aparentemente, se trata de um vínculo não holônomo, conforme a classificação acima. Contudo, este vínculo é, de fato, holônomo, pois a equação  $g(\dot{y}, \dot{\theta}) = 0$  pode ser integrada, resultando em  $f(y, \theta)$ . Já no exercício a seguir, os vínculos não são integráveis.

**Exercício 1.5 (Disco rolando sobre superfície horizontal. Parte 1).** Considere um disco de raio  $R$  que rola sobre um plano horizontal, conforme a figura 1.13. O disco pode agora rolar e também girar em torno de um eixo de rotação vertical (paralelo a  $x_3$ ). O disco não pode, contudo, “tombar”, isto é girar em torno da reta horizontal oblíqua ilustrada na figura. Determine as equações de vínculo do movimento do disco e classifique as mesmas.

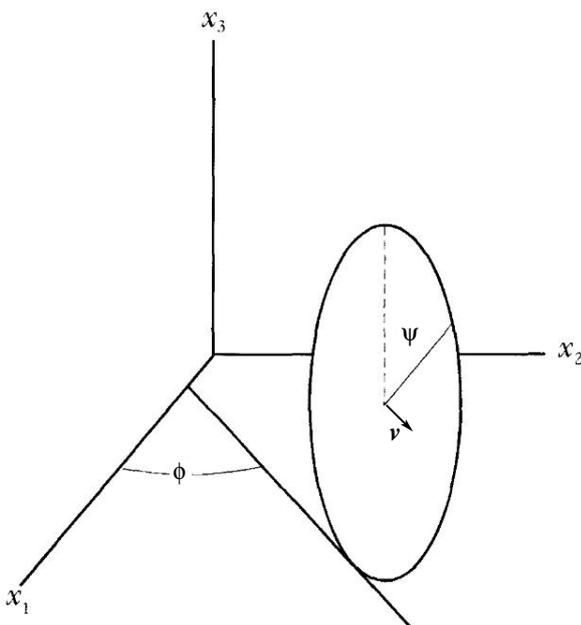


Figura 1.13: Disco rolando sem deslizar ou tombar sobre uma superfície horizontal.

*Resolução.* Como  $\dot{\psi}$  é a velocidade angular do disco em relação ao centro geométrico, então  $R|\dot{\psi}|$  é o módulo da velocidade deste ponto em relação à origem do referencial. Portanto, as equações

de vínculos podem ser escritas

$$f_1 = \dot{x}_1 - R\dot{\psi} \cos \phi = 0 \qquad f_2 = \dot{x}_2 - R\dot{\psi} \sin \phi = 0.$$

Ao contrário do exercício anterior, os vínculos  $f_1$  e  $f_2$  não são integráveis, uma vez que a coordenada  $\phi$  também é uma variável dependente neste caso. Portanto, este é um exemplo de vínculos não holônomos.

Uma discussão didática acerca das diferenças entre vínculos holônomos e não holônomos pode ser consultada em (LEMOS, 2003).

## 1.4 O PRINCÍPIO DE HAMILTON

Princípios de minimização possuem uma longa história na física. A ideia subjacente a esses princípios é a suposição de que a natureza sempre tende a se comportar de tal forma que certas propriedades fundamentais são “economizadas,” isto é, possuem os mínimos valores dentre todas as possibilidades de evolução dos sistemas naturais.

O primeiro princípio de minimização conhecido se deve a Hero de Alexandria (~10 – 70 AD), que demonstrou que um raio de luz refletindo-se em um espelho sempre percorre a trajetória mais curta possível. Como consequência deste princípio, verifica-se que os ângulos de incidência e reflexão são sempre os mesmos. Este princípio fundamental da óptica geométrica foi posteriormente generalizado por Fermat em 1657, afirmando que um raio de luz sempre se propaga de um ponto a outro em um meio diáfano ao longo da trajetória de *menor tempo*. Com base neste princípio, é possível deduzir não somente as leis de reflexão da óptica geométrica, mas também a lei de Snell da refração.

As primeiras proposições de princípios de minimização aplicados à mecânica podem ser traçados a partir de Jordanus Nemorarius, no século XIII. A partir da formulação Newtoniana da mecânica, as ideias de Jordanus foram desenvolvidas pelo matemático suíço Johann Bernoulli (1667 – 1748), o qual propôs o *Princípio dos Trabalhos Virtuais*, segundo o qual para um sistema de partículas em equilíbrio, a sua configuração será tal que dentre todos os deslocamentos virtuais possíveis das mesmas, consistentes com os vínculos impostos ao sistema, o trabalho total realizado pelas forças que atuam sobre as partículas ao longo destes deslocamentos virtuais é sempre nulo.

O princípio dos trabalhos virtuais foi posteriormente generalizado para a dinâmica de um sistema de partículas pelo filósofo natural francês Jean le Rond d'Alembert (1717 – 1783). Em sua obra *Traité de dynamique*,<sup>13</sup> publicada em 1743, foi formulado o *Princípio de d'Alembert*, segundo o qual um sistema de partículas sempre evolui de tal forma que

$$\sum_i \left( \mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \tag{1.36}$$

sendo  $\mathbf{F}_i^{(a)}$  a força total aplicada à  $i$ -ésima partícula do sistema,  $\mathbf{p}_i$  o seu *momentum* linear e  $\delta \mathbf{r}_i$  qualquer deslocamento virtual consistente com os vínculos impostos ao sistema. O Princípio de d'Alembert já representou um avanço em relação à formulação Newtoniana, ao excluir qualquer referência às forças de vínculo. Por outro lado, os deslocamentos virtuais não são independentes entre si, pois eles devem respeitar esses vínculos. Os deslocamentos virtuais  $\delta \mathbf{r}_i$  eram também denominados *velocidades virtuais* pelos filósofos naturais do século XVIII. Por esta razão, o princípio de d'Alembert também é conhecido como o *Princípio das Velocidades Virtuais*.

Outra contribuição foi realizada pelo filósofo natural francês Pierre Louis Maupertuis (1698 – 1759) em sua obra *Ensaio de Cosmologia*, publicada em 1750. O *Princípio de Mínima Ação* foi proposto a partir de seu dogma religioso pessoal de que Deus, em sua infinita sabedoria, criou o universo de tal forma que este sempre evoluirá com base no princípio da economia. Assim, todos os corpos do universo irão sempre se movimentar de tal forma que sua *ação* será minimizada. Na definição de Maupertuis, a ação de um corpo é o produto de sua massa pela distância que o mesmo percorre e pela velocidade com a qual está se deslocando. Em sua obra, Maupertuis afirmou que os princípios de parcimônia no comportamento da natureza demonstram a infinita sabedoria do Criador e, portanto, demonstram irrefutavelmente a existência de Deus.

<sup>13</sup>Tratado de dinâmica.

A coroação dos esforços realizados durante o século XVIII, pelos estudiosos mencionados acima e por outros, para desenvolver uma formulação racional e consistente da mecânica foi alcançada no tratado *Mécanique Analytique*,<sup>14</sup> publicado em 1787 pelo matemático e astrônomo italo-francês Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813). Nesta importante obra, Lagrange deriva, entre outras contribuições, as *equações de Euler-Lagrange*. A sua dedução foi fortemente baseada nos princípios de Maupertuis e d'Alembert, fazendo uso também do formalismo do cálculo de variações, ao qual Lagrange prestou diversas contribuições.

Já durante o século XIX, novas contribuições foram apresentadas, por exemplo, pelo físico e matemático alemão Carl Friederich Gauss (1777 – 1855). Em seu artigo *Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik*,<sup>15</sup> Gauss escreveu:

... Na natureza das coisas, não pode haver nenhum novo princípio na ciência do equilíbrio e movimento que não inclua os princípios precedentes, ou que não possa ser deduzido a partir destes.

Contudo, um novo princípio pode não ser totalmente sem valor. É sempre interessante e instrutivo considerar-se as leis da natureza a partir de um novo e vantajoso ponto de vista, de forma a resolver este ou aquele problema de maneira mais simples, ou de forma a se obter uma representação mais precisa.

Dentro deste espírito, Gauss propôs então o *Princípio do Menor Vínculo*, segundo o qual

(...) o movimento de um sistema de pontos materiais (...) ocorre a cada momento em máxima concordância com o movimento livre ou sob o menor vínculo. (...) A medida do vínculo, (...) é considerada como a soma dos produtos das massas e dos quadrados dos desvios do movimento livre.

Por movimento livre Gauss se refere às acelerações que os corpos teriam somente devidas às ações das forças aplicadas ao sistema livre de vínculos. Então, para um sistema de  $N$  corpos, se  $\mathbf{a}_k^{\text{livre}} = \mathbf{F}_k^{(a)}/m_k$  é a aceleração livre de vínculos da  $k$ -ésima partícula do sistema e  $\mathbf{a}_k$  é a aceleração do mesmo corpo devida ao movimento vinculado, a medida para o vínculo (*Zwang*) do sistema, denotado por  $Z$ , é

$$Z = \sum_{k=1}^N m_k \left| \mathbf{a}_k - \frac{\mathbf{F}_k}{m_k} \right|^2,$$

e o movimento real de cada partícula é tal que  $Z$  é minimizado.

O princípio de menor vínculo foi mais tarde empregado pelo físico alemão Heinrich Rudolf Hertz (1857 – 1894) em sua obra *Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt*,<sup>16</sup> publicada em 1894. Nesta obra, Hertz propõe seu *Princípio de Menor Curvatura*, segundo o qual o movimento de um sistema isolado de corpos materiais ocorre ao longo de uma trajetória de menor curvatura com uma velocidade constante, de forma consistente com os vínculos impostos. Sendo um sistema composto por  $N$  corpos, a quantidade

$$K = \sum_{i=1}^N \left| \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{ds^2} \right|^2$$

é a medida da curvatura local da trajetória do sistema em um espaço de configuração de dimensão  $3N$ , sendo  $\mathbf{r}_k$  a posição instantânea da  $k$ -ésima partícula e  $ds^2$  o elemento de arco ao longo da trajetória. Segundo Hertz, a trajetória do sistema é tal que a quantidade  $K$  é minimizada. A determinação da trajetória que minimiza  $K$  é equivalente à obtenção da curva geodésica, ao longo da qual o sistema evolui. A importância do princípio da menor curvatura está no estabelecimento de uma fundamentação conceitual para o posterior desenvolvimento da relatividade generalizada em espaços curvos.

A formulação mais conhecida de princípios extremantes aplicados à mecânica é devida ao físico, astrônomo e matemático irlandês Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865), descrita em dois artigos publicados em 1834 e 1835 na importante revista *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. O *Princípio de Hamilton* possui a seguinte formulação:

<sup>14</sup>Mecânica analítica.

<sup>15</sup>Acerca de uma nova lei fundamental da mecânica.

<sup>16</sup>Os princípios da mecânica apresentados em um novo contexto.

**Princípio 1.1 (Princípio de Hamilton).** *Dentre todas as possíveis trajetórias ao longo das quais um sistema dinâmico pode se mover entre dois pontos, dentro de um determinado intervalo de tempo e de forma consistente com os vínculos impostos ao mesmo, a trajetória real seguida é aquela que minimiza a integral no tempo da diferença entre as energias cinética e potencial do sistema.*

Considera-se inicialmente o movimento de uma única partícula em um campo de forças conservativas. As energias cinética e potencial da mesma são:

$$T = T(\dot{\mathbf{r}}) \text{ e } U = U(\mathbf{r}),$$

ou seja, a energia cinética é função somente da velocidade da partícula, ao passo que a energia potencial depende somente de sua posição. Define-se então a denominada *função de Lagrange* ou, simplesmente, a *Lagrangiana* da partícula como a diferença

$$L = T(\dot{\mathbf{r}}) - U(\mathbf{r}).$$

Rigorosamente, a Lagrangiana é um funcional onde os pontos do domínio são as coordenadas da partícula  $x_i = x_i(t) \in \mathcal{C}^2[t_1, t_2]$  ( $i = 1, 2, 3$ ), as quais são funções implícitas do tempo, que atua como a variável independente; ou seja,

$$L = L\{\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}\} = T(\dot{\mathbf{r}}) - U(\mathbf{r}).$$

Nota-se também que no caso de forças conservativas, a Lagrangiana não depende explicitamente do tempo.

Assim, o princípio de Hamilton se refere à integral no tempo

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\{\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}\} dt = \int_{t_1}^{t_2} [T(\dot{\mathbf{r}}) - U(\mathbf{r})] dt. \quad (1.37)$$

Observa-se que o funcional  $S$  tem a dimensão de energia  $\times$  tempo, ou massa  $\times$  deslocamento  $\times$  velocidade; ou seja,  $S$  possui a mesma dimensão da ação definida no princípio de Maupertuis. Em decorrência, a quantidade  $S$  é denominada a **integral de ação** ou, simplesmente, a **ação** do sistema. Deste ponto de vista, o princípio de Hamilton é uma generalização do princípio de mínima ação proposto por Maupertuis.

Então, o princípio de Hamilton afirma que dentre todas as trajetórias da partícula, aquela realmente seguida irá minimizar a sua integral de ação. Este ponto extremante é obtido através do cálculo de

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\{\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}\} dt = 0. \quad (1.38)$$

Como somente são consideradas as trajetórias possíveis no intervalo de tempo  $t_2 - t_1$  que levam a partícula do ponto inicial  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$  ao ponto final  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$ , os limites de integração são pontos fixos na variação de  $S$ . Portanto, as trajetórias serão determinadas novamente pelas equações (1.25), as quais passam a ser escritas

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.39)$$

Estas são as *equações de movimento de Euler-Lagrange* para uma partícula movimentando-se sob a ação de forças conservativas.

Como a energia cinética de uma partícula de massa  $m$  é simplesmente

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2,$$

a aplicação das equações (1.39) sobre a Lagrangiana, com

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \text{ e } \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i,$$

resulta nas equações de movimento

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \implies \frac{d}{dt} (m \dot{x}_i) = -\frac{\partial U}{\partial x_i} = F_i,$$

onde  $F_i$  é a  $i$ -ésima coordenada da força total sobre a partícula. Ou seja, o princípio de Hamilton resulta nas mesmas equações obtidas a partir da formulação Newtoniana. Alguns exemplos simples são apresentados a seguir.

**Exemplo 1.13 (O oscilador harmônico unidimensional).** Abordando o exemplo clássico de uma partícula movimentando-se ao longo do eixo  $x$  sob a ação de uma força restauradora do tipo  $F = -kx$ , a qual é conservativa e possui a função energia potencial dada por

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2,$$

sendo  $k$  a constante elástica, a Lagrangiana do sistema é

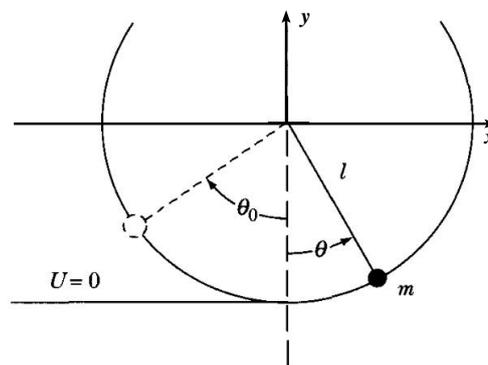
$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2.$$

Destá, obtém-se a partir de (1.39) as equações de movimento:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \implies m\ddot{x} + kx = 0,$$

cuja solução é bem conhecida.

**Exemplo 1.14 (O pêndulo plano).** Outro problema clássico em mecânica. A massa  $m$  ilustrada na figura 1.14 oscila sem atrito sob a ação da gravidade a partir do ângulo inicial  $\theta_0$ .



**Figura 1.14:** O pêndulo plano, no qual a massa  $m$  oscila sem atrito a partir do ângulo inicial  $\theta_0$ .

Estabelecendo o ponto  $\theta = 0$  como o nível  $U = 0$ , a energia potencial do pêndulo é  $U(\theta) = mgl(1 - \cos \theta)$ . Assim a Lagrangiana da partícula fica escrita, em coordenadas polares, como

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta).$$

A coordenada polar  $\theta$  será denominada uma *coordenada generalizada*, sendo tratada da mesma forma que uma coordenada retangular. Neste caso, a equação de Euler-Lagrange (1.39) fica escrita como

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \implies -mgl \sin \theta - ml^2 \frac{d}{dt} \dot{\theta} = 0,$$

ou seja,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0,$$

a qual é a conhecida equação de movimento do pêndulo plano. A solução exata desta equação será discutida no exercício 2.4.

## 1.5 COORDENADAS GENERALIZADAS

Os exemplos anteriores de aplicação do formalismo Lagrangiano estavam restritos ao caso extremamente particular de uma única partícula se movimentando ao longo de uma única dimensão espacial.

Um sistema físico geral pode ser composto por uma coleção de  $N$  partículas puntiformes, algumas das quais podem estar conectadas entre si de tal forma que a distância típica entre as mesmas pode ser considerada arbitrariamente pequena. Estas coleções de partículas formam então corpos extensos.

Para especificar o estado deste sistema geral em um dado instante de tempo, é necessário empregar um conjunto de  $N$  vetores posição. Ou seja, o número total de coordenadas no espaço Euclidiano  $E^3$  é igual a  $3N$ . Se o sistema tiver a sua dinâmica restringida por um conjunto de  $m < 3N$  equações de vínculo, então as  $3N$  coordenadas não são independentes entre si; de fato, um total de  $m$  coordenadas sempre será dependente das demais. Neste caso, o sistema é dito possuir  $n = 3N - m$  graus de liberdade.

Para se descrever a dinâmica deste sistema de  $N$  partículas, é necessário primeiro distinguir os componentes dos vetores posição e velocidade para cada partícula. Em um sistema Cartesiano, estes vetores podem ser distinguidos por um índice grego  $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, \dots, N$ , enquanto que as coordenadas individuais de cada partícula continuam sendo identificadas por índices latinos  $i, j, k, \dots = 1, 2, 3$ . Desta forma a posição e velocidade da  $\alpha$ -ésima partícula do sistema podem ser representadas por

$$\mathbf{r}_\alpha = \sum_{i=1}^3 x_{\alpha,i} \hat{\mathbf{x}}_i, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N) \quad (1.40a)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_\alpha = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_{\alpha,i} \hat{\mathbf{x}}_i, \quad (1.40b)$$

sendo  $\hat{\mathbf{x}}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) os vetores ortonormais canônicos no  $E^3$ . Nesta representação, a Lagrangiana total do sistema passa a ser escrita como

$$L = L\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t\} \\ = L\{x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, \dots, x_{N,1}, x_{N,2}, x_{N,3}, \dot{x}_{1,1}, \dot{x}_{1,2}, \dot{x}_{1,3}, \dots, \dot{x}_{N,1}, \dot{x}_{N,2}, \dot{x}_{N,3}; t\}, \quad (1.40c)$$

existindo também um total de  $m$  equações de vínculos na forma

$$f_k(x_{1,1}, \dots, x_{N,3}; t) = f_k(\{x_{\alpha,i}\}, t) = f_k(\{\mathbf{r}_\alpha\}, t) = 0, \quad \begin{cases} \alpha = 1, 2, \dots, N \\ i = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, \dots, m, \end{cases} \quad (1.40d)$$

vínculos estes que neste ponto serão considerados holônomos.<sup>17</sup>

Como é possível perceber, a notação começa a se tornar complicada. Além disso, em muitos sistemas o emprego de um sistema de coordenadas Cartesiano não é adequado. Um sistema em particular pode apresentar certas simetrias ou configurações geométricas as quais são melhor descritas com o uso de um sistema de coordenadas curvilíneas. Esta situação já ocorreu no exemplo 1.14 do pêndulo plano, onde foi conveniente adotar-se o sistema plano-polar. De fato, o emprego deste sistema explicitou que o número de graus de liberdade do pêndulo é igual a um, uma vez que a massa oscila no plano  $xy$ , porém com o vínculo  $x^2 + y^2 = l^2$ .

A descrição matemática do comportamento de um sistema em geral pode ser consideravelmente simplificada com o emprego de um sistema de *coordenadas generalizadas*, escolhido de tal forma que:

1. Os vetores posição e velocidade de cada partícula do sistema são univocamente determinados a cada instante por esse novo sistema de coordenadas.
2. Os vínculos holônomos na forma (1.35 ou 1.40d) são identicamente satisfeitos neste sistema.

Em geral, é conveniente escolher um conjunto de coordenadas generalizadas tal que todas sejam independentes entre si.

As novas coordenadas podem apresentar as características comuns às leis de transformação. Por exemplo, elas podem ter dimensão de comprimento ou uma outra dimensão física. Podem até mesmo ser adimensionais, como foi o caso da escolha  $q = \theta$  realizada no exemplo 1.14.

Nesta descrição, portanto, o sistema de  $N$  partículas restringido por  $m$  equações de vínculo passa a ser descrito por um conjunto de  $n = 3N - m$  coordenadas generalizadas, quando os vínculos forem todos holônomos. Denotando estas coordenadas por  $q_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ), deve existir

<sup>17</sup>O tratamento de vínculos não holônomos será realizada na seção 1.8.4.

então um conjunto de *leis de transformação* do tipo

$$x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \equiv x_{\alpha,i}(\{q_j\}, t) \equiv x_{\alpha,i}(\mathbf{q}, t), \quad \begin{cases} \alpha = 1, \dots, N \\ i = 1, 2, 3 \\ j = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (1.41a)$$

onde  $\mathbf{q} \doteq (q_1, q_2, \dots, q_n)$ . Para que as leis de transformação acima sejam válidas, é necessário também existir as transformações inversas

$$q_j = q_j(x_{1,1}, \dots, x_{N,3}, t) = q_j(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t), \quad (j = 1, \dots, n). \quad (1.41b)$$

Por sua vez, os componentes do vetor velocidade de cada partícula devem ser expressos pelo conjunto de leis de transformação

$$\dot{x}_{\alpha,i} = \dot{x}_{\alpha,i}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = \dot{x}_{\alpha,i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (1.41c)$$

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(x_{1,1}, \dots, x_{N,3}, \dot{x}_{1,1}, \dots, \dot{x}_{N,3}, t) = \dot{q}_j(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, t). \quad (1.41d)$$

As quantidades  $\{\dot{q}_j\}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) são denominadas *velocidades generalizadas*.

Finalmente, as  $m = 3N - n$  equações de vínculos holônomos são dadas por (1.40d) e devem ser igualmente satisfeitas pelas coordenadas generalizadas, quando então passam a ser escritas como

$$f_k(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (1.41e)$$

**Exemplo 1.15 (Pêndulo plano).** Retornando ao exemplo 1.14, o vínculo  $x^2 + y^2 - l^2 = 0$  foi explicitamente empregado na escolha da nova coordenada generalizada  $q = \theta$ , o que reduziu a dimensionalidade da Lagrangiana ao número de graus de liberdade do sistema ( $n = 1$ ) e possibilitou a derivação imediata da equação de movimento do pêndulo.

Um procedimento alternativo seria partir do conjunto de equações de Euler-Lagrange com  $N = 1$ ,  $i = 1, 2$  para as coordenadas Cartesianas da partícula e usar o método dos multiplicadores de Lagrange, introduzido na seção 1.2.7, para tratar o seu movimento vinculado. Neste caso, a partir do sistema (1.30) resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \\ f(x, y) = x^2 + y^2 - l^2 &= 0, \end{aligned}$$

sendo

$$L = L\{x, y\} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mg(y - l) \longrightarrow \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy,$$

onde a constante  $mg$  foi ignorada na Lagrangiana por não alterar as equações de movimento. Ou seja, as equações de movimento vinculadas ficam

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - 2x\lambda(t) &= 0 \\ m\ddot{y} + mg - 2y\lambda(t) &= 0 \\ x^2 + y^2 &= l^2. \end{aligned}$$

Observa-se que o sistema de equações é de difícil tratamento. Por isso, é conveniente mudar para o sistema de coordenadas plano-polares, cujas leis de transformação são

$$\begin{aligned} x = r \cos \theta \text{ e } y = r \sin \theta &\implies \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta} \text{ e } \dot{y} = -\dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta} \\ \implies \ddot{x} &= \ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r} \sin \theta \dot{\theta} - r \sin \theta \ddot{\theta} - \dot{r} \dot{\theta}^2 + r \cos \theta \ddot{\theta} \\ \text{e } \ddot{y} &= -\ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r} \cos \theta \dot{\theta} + r \cos \theta \ddot{\theta} - \dot{r} \dot{\theta}^2 + r \sin \theta \ddot{\theta}. \end{aligned}$$

Portanto, a dinâmica do pêndulo é descrita por

$$\begin{aligned} m \left( \ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r} \sin \theta \dot{\theta} - r \sin \theta \ddot{\theta} - \dot{r} \dot{\theta}^2 + r \cos \theta \ddot{\theta} \right) - 2r \sin \theta \lambda(t) &= 0 \\ m \left( -\ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r} \cos \theta \dot{\theta} + r \cos \theta \ddot{\theta} - \dot{r} \dot{\theta}^2 + r \sin \theta \ddot{\theta} \right) + mg + 2r \cos \theta \lambda(t) &= 0 \end{aligned}$$

$$r^2 = l^2 = \text{constante.}$$

Com a equação de vínculo, observa-se uma simplificação no sistema de equações:

$$\begin{aligned} ml \left( -\text{sen } \theta \dot{\theta}^2 + \cos \theta \ddot{\theta} \right) - 2l \text{sen } \theta \lambda(t) &= 0 \quad (\times \cos \theta) \\ ml \left( \cos \theta \dot{\theta}^2 + \text{sen } \theta \ddot{\theta} \right) + mg + 2l \cos \theta \lambda(t) &= 0 \quad (\times \text{sen } \theta). \end{aligned}$$

Realizando-se as multiplicações indicadas acima e somando-se as equações, resulta

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \text{sen } \theta = 0,$$

a qual é a equação de movimento desejada. Observa-se neste exemplo como a dedução foi bem mais trabalhosa.

Retornando agora ao problema da descrição do estado físico do sistema de  $N$  partículas restringido por  $m$  vínculos, como o número de graus de liberdade é  $n = 3N - m$ , diz-se também que  $n$  é a *dimensionalidade* deste sistema. Então, escolhendo um conjunto adequado de  $n$  coordenadas generalizadas, é possível passar-se a representar o estado do sistema em um espaço Euclidiano de dimensão  $n$ , denominado *espaço de configuração* e que pode ser representado por  $E^n$ .

Cada dimensão deste espaço corresponde a uma das coordenadas  $q_j$  independentes e a evolução temporal do sistema de partículas é representado por uma curva no  $E^n$ , sendo que os pontos ao longo da mesma são obtidos pela evolução paramétrica das coordenadas  $q_j = q_j(t)$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Para um dado instante  $t$ , o conjunto de coordenadas  $\{q_j(t)\}$  representa a configuração do sistema físico neste instante.

## 1.6 EQUAÇÕES DE EULER-LAGRANGE EM COORDENADAS GENERALIZADAS (VÍNCULOS HOLÔNOMOS)

Tendo em vista a discussão acima sobre coordenadas generalizadas, o Princípio de Hamilton pode ser rerepresentado da seguinte maneira.

**Princípio 1.2 (Princípio de Hamilton).** *Dentre todas as possíveis trajetórias ao longo das quais um sistema dinâmico pode se mover entre dois pontos no seu espaço de configuração dentro de um determinado intervalo de tempo, a trajetória real seguida é aquela que minimiza a integral no tempo da Lagrangiana do sistema.*

Dadas então as leis de transformação (1.41), a energia cinética total do sistema passa a ser escrita como

$$T = T(\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

e a energia potencial total como

$$U = U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = U(\mathbf{q}, t).$$

Em consequência, a Lagrangiana do sistema passa a ser escrita como

$$L = L\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\} = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - U(\mathbf{q}, t).$$

Inserindo esta Lagrangiana em (1.38) e calculando-se novamente a variação da integral de ação, obtém-se diretamente as *equações de Euler-Lagrange em coordenadas generalizadas*

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad (j = 1, \dots, n).} \quad (1.42)$$

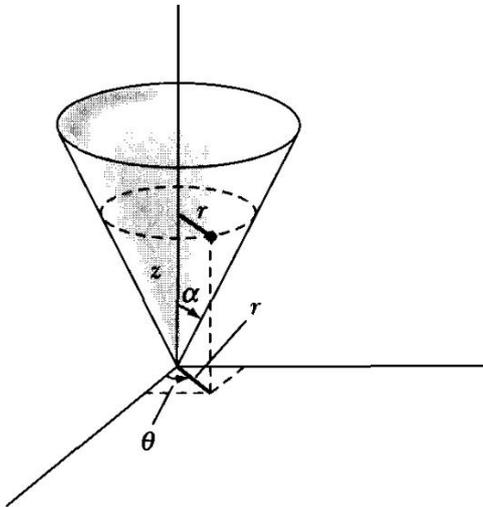
É importante enfatizar que a validade das equações de Euler-Lagrange é garantida pelo cumprimento das seguintes condições:

1. As forças aplicadas no sistema (excetuando-se as forças de vínculo) devem ser deriváveis a partir de potenciais. Isto não necessariamente implica em que as forças sejam conservativas.

2. As equações de vínculo devem ser holônomas. Se houver vínculos não holônomos agindo sobre o sistema, a derivação das equações de Euler-Lagrange deve ser revisada.

Alguns problemas envolvendo a formulação Lagrangiana serão discutidos a seguir.

**Exercício 1.6.** Uma partícula de massa  $m$  é restringida a se mover sobre a superfície interna de um cone liso de ângulo de abertura  $\alpha$ , conforme representado na figura 1.15. Se somente é aplicada a força peso sobre  $m$ , determine as coordenadas generalizadas, as equações de vínculo e encontre as equações de movimento.



**Figura 1.15:** Uma partícula movendo-se no interior de um cone com ângulo de abertura  $\alpha$ . São empregadas coordenadas cilíndricas como coordenadas generalizadas.

*Resolução.* Como coordenadas generalizadas, emprega-se as coordenadas cilíndricas.<sup>18</sup> Contudo, a equação de vínculo é

$$z = r \cot \alpha;$$

portanto, o sistema possui 2 graus de liberdade com as coordenadas

$$q_1 = r \text{ e } q_2 = \theta.$$

A velocidade em coordenadas cilíndricas é

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 \cot^2 \alpha = \dot{r}^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha + r^2 \dot{\theta}^2,$$

onde foi empregado o vínculo. A energia potencial é

$$U = mgz = mgr \cot \alpha.$$

Então, a Lagrangiana fica

$$L \{r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}\} = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - mgr \cot \alpha.$$

As equações de Euler-Lagrange ficam então

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= 0. \end{aligned}$$

Mas como  $L$  não depende de  $\theta$ , a segunda equação se reduz a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} = \text{constante}.$$

Como  $mr^2 \dot{\theta} = mr^2 \omega$  é o momento angular sobre o eixo  $z$ , esta equação exprime simplesmente a conservação do momento angular nesta direção.

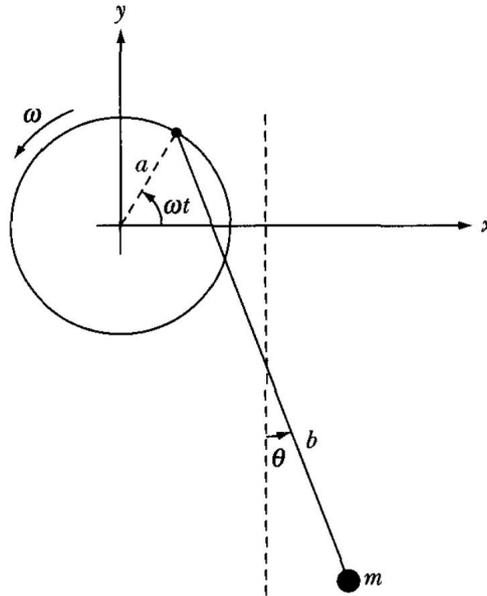
A outra equação fica

$$r \dot{\theta}^2 - g \cot \alpha - \ddot{r} \operatorname{cosec}^2 \alpha = 0 \implies \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + g \sin \alpha \cos \alpha = 0.$$

Pode-se eliminar  $\dot{\theta}$  nesta equação com a expressão para o momento angular.

<sup>18</sup>Ver, por exemplo, [Apostila de Física-Matemática](#), seção 1.5.1.

**Exercício 1.7.** O ponto de apoio na extremidade de um pêndulo de comprimento  $b$  está preso à borda de um disco vertical de raio  $a$ , o qual está girando com velocidade angular constante  $\omega$ , como ilustrado na figura 1.16. Obtenha a expressão para os componentes Cartesianos da velocidade e aceleração da massa  $m$ . Obtenha também a equação de movimento do pêndulo.



**Figura 1.16:** Um pêndulo simples conectado a um disco em rotação com velocidade angular constante.

**Resolução.** Posiciona-se a origem do sistema de coordenadas no centro do disco em rotação. Neste caso, as coordenadas Cartesianas da posição da massa  $m$  ficam

$$x = b \sin \theta + a \cos(\omega t) \quad \text{e} \quad y = -b \cos \theta + a \sin(\omega t).$$

Neste caso, as componentes da velocidade são

$$\dot{x} = b \cos \theta \dot{\theta} - a\omega \sin(\omega t) \quad \text{e} \quad \dot{y} = b \sin \theta \dot{\theta} + a\omega \cos(\omega t).$$

Portanto, as componentes da aceleração são:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= b (\cos \theta \ddot{\theta} - \sin \theta \dot{\theta}^2) - a\omega^2 \cos(\omega t) \\ \ddot{y} &= b (\sin \theta \ddot{\theta} + \cos \theta \dot{\theta}^2) - a\omega^2 \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Tomando-se a energia potencial nula em  $y = 0$ , a Lagrangiana do sistema se torna:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \\ &= \frac{1}{2} m (b^2 \dot{\theta}^2 + a^2 \omega^2 + 2ab\omega \sin(\theta - \omega t) \dot{\theta}) - mg [a \sin(\omega t) - b \cos \theta]. \end{aligned}$$

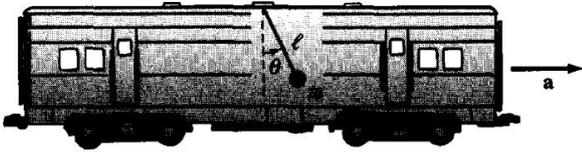
Como a única variável dinâmica restante é  $\theta = \theta(t)$ , as derivadas de  $L$  são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mb [g \sin \theta - a\omega \cos(\theta - \omega t) \dot{\theta}] \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= mb [b\dot{\theta} + a\omega \sin(\theta - \omega t)], \end{aligned}$$

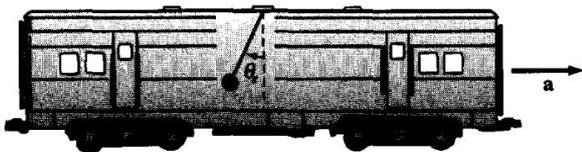
e a equação de movimento resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= 0 \\ g \sin \theta - a\omega \cos(\theta - \omega t) \dot{\theta} + b\ddot{\theta} + a\omega \cos(\theta - \omega t) (\dot{\theta} - \omega) &= 0, \\ \boxed{b\ddot{\theta} + g \sin \theta - a\omega^2 \cos(\theta - \omega t) = 0.} \end{aligned}$$

**Exercício 1.8.** Um pêndulo simples foi instalado no teto de um vagão de trem que se move com aceleração constante, conforme ilustrado na figura 1.17. (a) Encontre o ângulo de equilíbrio  $\theta_e$ , para o qual o pêndulo fica em equilíbrio com o movimento do trem. (b) Encontre a frequência de pequenas oscilações do pêndulo.



(a)



(b)

**Figura 1.17:** (a) Um pêndulo está fixo no teto de um vagão que se move com aceleração constante. (b) Existe um ângulo  $\theta_e$  no qual o pêndulo está em equilíbrio.

*Resolução.* (a) Sejam  $\ell$  o comprimento do pêndulo,  $m$  a massa do mesmo,  $a$  a aceleração do vagão e  $\theta$  o ângulo que o pêndulo faz com a linha vertical, a posição e a velocidade instantâneas do pêndulo serão sempre medidas em relação a um referencial inercial fixo ao solo. Este referencial será posicionado de tal forma que o eixo  $x$  é horizontal e o eixo  $y$  é vertical. A energia potencial gravitacional será assumida nula quando  $\theta = \pm\pi/2$ , ou seja, quando o pêndulo estiver na horizontal. Desta forma,

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad U(y) = mg(y - y_P),$$

sendo  $y_P$  a distância do solo ao ponto fixo do pêndulo. Assim, a Lagrangiana do pêndulo é

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mg(y - y_P).$$

Agora, deve-se levar em conta que o movimento de  $m$  é vinculado. A partícula está sempre a uma distância constante do ponto fixo  $P$ , mas este se move com aceleração constante, junto com o vagão, na direção  $x$ . Então, as fórmulas cinéticas do ponto fixo são:

$$y_P = \text{cte.} \quad x_P(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

Desta maneira,

$$x(t) = x_P(t) + \ell \sin \theta \quad y(t) = y_P - \ell \cos \theta,$$

sendo que  $\theta > 0$  significa uma oscilação no sentido anti-horário em relação à vertical.

Inserindo as equações de vínculos (holônomos) na Lagrangiana, resulta então

$$L = \frac{1}{2}m \left[ \left( v_0 + at + \ell \cos \theta \dot{\theta} \right)^2 + \ell^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 \right] + mgl \cos \theta.$$

Ou seja, a única variável dinâmica é  $\theta = \theta(t)$ . As derivadas de  $L$  são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= m \left[ - \left( v_0 + at + \ell \cos \theta \dot{\theta} \right) \ell \sin \theta \dot{\theta} + \ell^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 \right] - mgl \sin \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m \left[ \left( v_0 + at + \ell \cos \theta \dot{\theta} \right) \ell \cos \theta + \ell^2 \sin^2 \theta \dot{\theta} \right] \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m \left[ \ell^2 \ddot{\theta} - (v_0 + at) \ell \sin \theta \dot{\theta} + a \ell \cos \theta \right]. \end{aligned}$$

A equação de Euler-Lagrange fica então

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta + \frac{a}{\ell} \cos \theta = 0.$$

Embora a equação de movimento tenha sido obtida, a sua solução analítica é tão difícil quanto a equação de um pêndulo simples. Contudo, é possível encontrar o ângulo de equilíbrio  $\theta_e$  como sendo aquele para o qual  $\dot{\theta}_e = \ddot{\theta}_e = 0$ . Este ângulo é

$$\tan \theta_e = -\frac{a}{g} \implies \theta_e = -\tan^{-1} \left( \frac{a}{g} \right).$$

O sinal “-” indica que  $\theta_e$  está orientado no sentido oposto à aceleração.

(b) Dado então o ângulo de equilíbrio, é possível obter a equação do pêndulo quando as oscilações são de pequenas amplitudes em torno de  $\theta_e$ . Para tanto, define-se a variável  $\eta(t) = \theta(t) - \theta_e$ , em termos da qual a equação de movimento fica escrita

$$\ddot{\eta} + \frac{1}{\ell} \sqrt{a^2 + g^2} \sin \eta = 0.$$

Assumindo por fim que  $|\eta| \ll |\theta_e|$ , a equação de movimento pode ser aproximada por

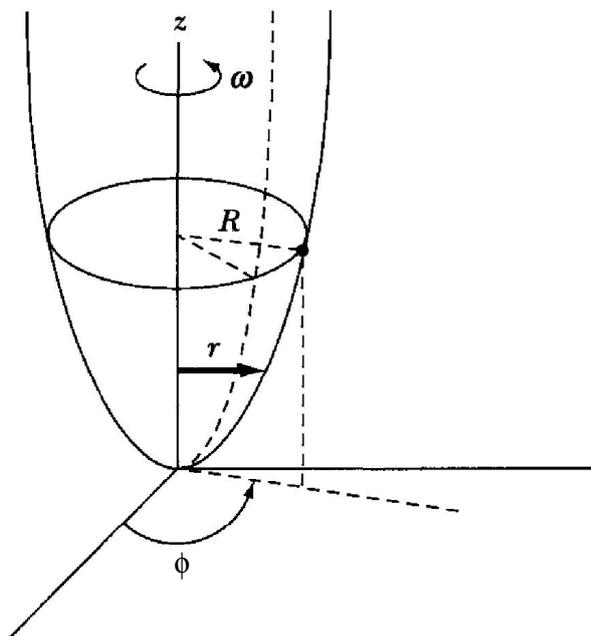
$$\ddot{\eta} + \omega_0^2 \eta = 0,$$

a qual é a equação de um oscilador harmônico com frequência angular

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\ell} \sqrt{a^2 + g^2}.$$

É interessante observar como a frequência aumenta com a aceleração do trem.

**Exercício 1.9.** Uma conta desliza sem atrito sobre um arame liso e curvado ao longo da parábola  $z = cr^2$ , como ilustrado na figura 1.18. A conta roda ao longo de uma circunferência de raio  $R$  quando o arame está girando em torno de seu eixo de simetria vertical com uma velocidade angular  $\omega$ . Encontre o valor da constante  $c$  para a conta permanecer em equilíbrio.



**Figura 1.18:** Uma conta desliza sobre um arame liso que está rotando em torno do eixo  $z$ .

**Resolução.** Como o problema tem simetria cilíndrica, serão escolhidas como coordenadas generalizadas  $r$ ,  $\phi$  e  $z$ , que definem um sistema de coordenadas cilíndricas. Neste sistema, a energia cinética da partícula fica

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{z}^2 + r^2\dot{\phi}^2).$$

Determinando para a energia potencial  $U(z=0) = 0$ , esta fica escrita  $U = mgz$ . As equações de vínculo para este problema são

$$z = cr^2 \implies \dot{z} = 2cr\dot{r} \implies T = \frac{1}{2}m[(1 + 4c^2r^2)\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2], \quad U = mgcr^2,$$

$$\phi = \omega t \implies \dot{\phi} = \omega = \text{cte.}$$

A última equação resulta da exigência que a partícula permaneça sempre sobre o arame que está girando em torno de  $z$ .

Assim, a única variável dinâmica restante é  $r$ , resultando a Lagrangiana

$$L\{r, \dot{r}\} = \frac{1}{2}m[(1 + 4c^2r^2)\dot{r}^2 + \omega^2r^2] - mgcr^2$$

e da equação de Euler-Lagrange temos

$$(1 + 4c^2r^2)\ddot{r} + 4c^2r\dot{r}^2 + (2gc - \omega^2)r = 0,$$

cujas soluções fornecem o movimento geral da partícula.

Entretanto, foi solicitado em que condições a conta permanece em equilíbrio, ou seja, com  $r = R = \text{cte}$ . Nesta situação,  $\dot{r} = \ddot{r} = 0$  e a equação de movimento se reduz a

$$(2gc - \omega^2)R = 0,$$

de onde segue que

$$c = \frac{\omega^2}{2g},$$

conforme solicitado.

**Exercício 1.10.** Considere o sistema de polias duplas com massas desprezíveis ilustrado na figura 1.19. Determine as equações de movimento das massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , empregando as coordenadas indicadas.

**Resolução.** Sendo  $\ell_1$  e  $\ell_2$  os comprimentos totais das cordas que prendem as massas a partir das linhas tracejadas horizontais, se as distâncias  $x$  e  $y$  são medidas a partir dos centros das polias, então

$$\text{para } m_1 : v_1 = \dot{x}$$

$$\text{para } m_2 : v_2 = \frac{d}{dt}(\ell_1 - x + y) = -\dot{x} + \dot{y}$$

$$\text{para } m_3 : v_3 = \frac{d}{dt}(\ell_1 - x + \ell_2 - y) = -\dot{x} - \dot{y}.$$

Portanto,

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x} - \dot{y})^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{x} + \dot{y})^2.$$

Definindo-se  $U = 0$  em  $x = 0$ ,

$$U = -m_1gx - m_2g(\ell_1 - x + y) - m_3g(\ell_1 - x + \ell_2 - y).$$

Portanto, as equações de movimento para  $x$  e  $y$  podem ser obtidas, resultando no sistema de equações

$$m_1\ddot{x} + m_2(\ddot{x} - \ddot{y}) + m_3(\ddot{x} + \ddot{y}) = (m_1 - m_2 - m_3)g$$

$$-m_2(\ddot{x} - \ddot{y}) + m_3(\ddot{x} + \ddot{y}) = (m_2 - m_3)g,$$

o qual pode ser resolvido.

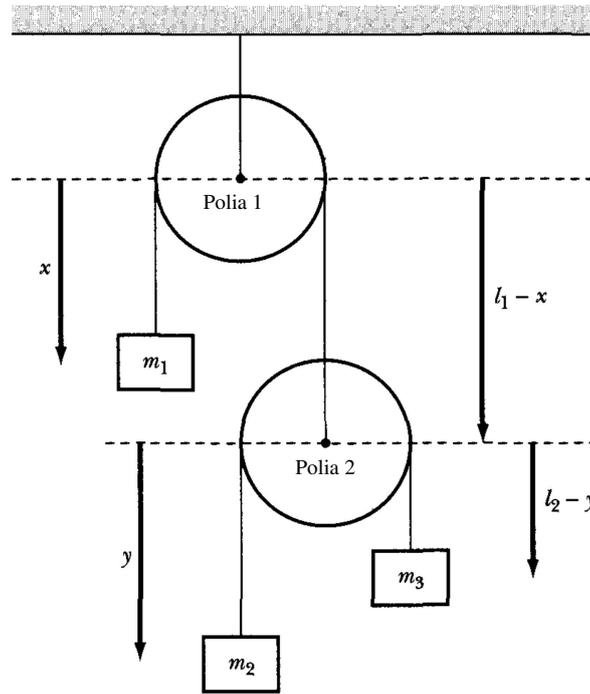


Figura 1.19: Uma máquina de Atwood com duas polias.

**Exercício 1.11 (Pêndulo duplo).** Retornando ao exemplo 1.12 do pêndulo duplo, derive as equações de movimento das massas.

*Resolução.* Verificando a figura 1.11, as seguintes transformações de coordenadas são convenientes:

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1 \quad y_1 = l_1 \cos \theta_1 \quad x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \quad y_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 & \dot{y}_1 &= -l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ \dot{x}_2 &= l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 & \dot{y}_2 &= -l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 - l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2. \end{aligned}$$

Então, as energias cinética e potencial ficam escritas

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ U &= -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2. \end{aligned}$$

Finalmente, as equações de Lagrange para  $\theta_1$  e  $\theta_2$  resultam nas equações de movimento

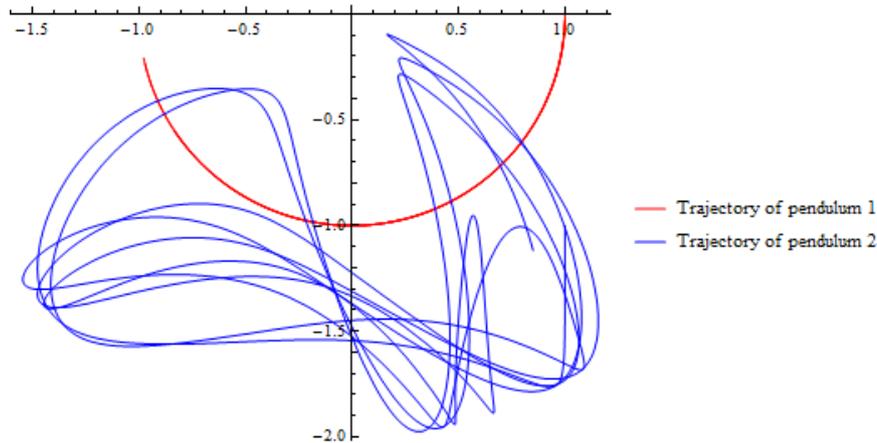
$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 &= 0 \\ m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + m_2 g l_2 \sin \theta_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.43)$$

A figura 1.20 ilustra a solução numérica do sistema de equações para o pêndulo duplo para um certo conjunto de condições iniciais. Simulações que visualizam dinamicamente as soluções de (1.43) estão disponíveis para Mathematica,<sup>19</sup> python<sup>20</sup> ou em outras fontes.<sup>21</sup>

<sup>19</sup><http://www.wolfram.com/mathematica/new-in-9/advanced-hybrid-and-differential-algebraic-equations/double-pendulum.html>.

<sup>20</sup>[https://matplotlib.org/stable/gallery/animation/double\\_pendulum.html](https://matplotlib.org/stable/gallery/animation/double_pendulum.html).

<sup>21</sup> Simulações do pêndulo duplo podem ser visualizadas em [https://www.youtube.com/watch?v=QXf95\\_EKS6E](https://www.youtube.com/watch?v=QXf95_EKS6E) ou <https://www.youtube.com/watch?v=zX2R3BxB74>. Um vídeo mostrando um pêndulo duplo pode ser visto em <https://www.youtube.com/watch?v=U39RMUzCjiU>. Note que este é um pêndulo físico, cuja dinâmica deve ser descrita incluindo-se também os conceitos abordados no capítulo 3.



**Figura 1.20:** Trajetórias das massas  $m_1$  (curva vermelha) e  $m_2$  (curva azul) de um pêndulo duplo, obtidas a partir da solução numérica do sistema de equações (1.43). As condições iniciais são  $x_1(0) = 1$ ,  $y_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 1$  e  $y_2(0) = -1$ , com ambas partindo do repouso.

## 1.7 POTENCIAIS GENERALIZADOS E FORÇAS DISSIPATIVAS

Nesta seção será realizada uma breve discussão a respeito da generalidade das equações de Euler-Lagrange e serão também apresentadas situações importantes nas quais, dentre todas as forças aplicadas ao sistema de partículas, podem existir forças não conservativas tais como forças que dependem de velocidade, forças dissipativas ou forças motrizes. Nos dois últimos casos, as expressões obtidas serão importantes para a discussão a respeito de vínculos não holônomos, a ser realizada na próxima seção.

### 1.7.1 FORÇAS E POTENCIAIS GENERALIZADOS EM SISTEMAS HOLONÔMICOS

Como foi mencionado na seção anterior, quando os vínculos são holônomos as equações de Euler-Lagrange podem ser escritas na forma (1.42) mesmo se as forças não forem conservativas, basta que as forças sejam deriváveis de potenciais. O importante exemplo da Lagrangiana de uma partícula carregada no campo eletromagnético será apresentado a seguir.

**Exemplo 1.16 (Lagrangiana da carga em um campo eletromagnético).** Considera-se uma partícula de massa  $m$  e carga  $q$  submetida a um campo eletromagnético com  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  e  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ . A força exercida pelos campos sobre  $q$  é a força de Lorentz<sup>22</sup>

$$\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right).$$

Escrevendo os campos em termos do potencial escalar elétrico  $\phi = \phi(\mathbf{r}, t)$  e do potencial vetor  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ , como

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q \left[ -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right] \\ &= -q \nabla \left( \phi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) - \frac{q}{c} \left[ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} \right], \end{aligned} \quad (1.44)$$

pois  $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}$ .

<sup>22</sup>No sistema de Gaussiana unidades.

Deseja-se escrever agora a força de Lorentz como uma *força generalizada*, a qual é obtida a partir de uma função *potencial generalizado*, dependente de velocidade. A expressão genérica para tais forças generalizadas é apresentada mais adiante, na equação (1.49). Ou seja, deseja-se escrever a força de Lorentz acima como

$$F_k(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_k} U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t), \quad (k = 1, 2, 3), \quad (1.45)$$

sendo  $U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$  o potencial generalizado em questão.

Para tanto, observa-se inicialmente que à medida que a carga  $q$  se desloca no espaço sob a ação dos campos, esta passa por regiões onde os mesmos variam, tanto devido às suas dependências explícitas no tempo quanto devido às dependências espaciais. Então, se o potencial vetor for escrito da seguinte maneira:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}(t), t),$$

sendo  $\mathbf{r}(t)$  a posição instantânea da carga, a expressão acima ilustra como os campos experimentados pela partícula variam ao longo de sua trajetória. Pode-se calcular então

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}.$$

Assim, a  $k$ -ésima componente da força de Lorentz em (1.44) resulta escrita como

$$F_k = -q \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \phi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) - \frac{q}{c} \frac{dA_k}{dt}.$$

Como nem  $\phi$  nem  $\mathbf{A}$  dependem explicitamente da velocidade da partícula, a seguinte identidade é válida:

$$A_k = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} - c\phi).$$

Portanto, a força de Lorentz pode ser expressa na forma (1.45) como

$$F_k = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left( q\phi - \frac{q}{c} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} \right) + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} \left( q\phi - \frac{q}{c} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} \right),$$

onde se identifica o potencial generalizado

$$U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = q\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{q}{c} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t),$$

de modo que a Lagrangiana da carga no campo eletromagnético fica escrita

$$L\{\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t\} = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - q\phi(\mathbf{r}, t) + \frac{q}{c} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t).$$

Será realizada agora a derivação da Lagrangiana de um sistema de partículas cuja dinâmica é determinada tanto por potenciais generalizados quanto por vínculos holônomos. Na derivação, será assumido que existe um conjunto de  $n$  coordenadas generalizadas, sendo  $n$  número de graus de liberdade do sistema, de acordo com a discussão realizada nas seções 1.5 e 1.6.

Retornando inicialmente ao caso particular de forças conservativas, a função energia potencial total do sistema é escrita como  $U = U(\mathbf{q}, t)$  e as equações de Euler-Lagrange ficam

$$\frac{\partial}{\partial q_k} [T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - U(\mathbf{q}, t)] - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0, \quad (k = 1, \dots, n),$$

as quais podem ser escritas como

$$\frac{\partial}{\partial q_k} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial}{\partial q_k} U(\mathbf{q}, t) = -F_k(\mathbf{q}, t), \quad (1.46)$$

onde

$$F_k(\mathbf{q}, t) = -\frac{\partial}{\partial q_k} U(\mathbf{q}, t)$$

são as componentes das forças conservativas em termos das coordenadas generalizadas. A forma acima para a equação de Euler-Lagrange foi justamente aquela obtida por Lagrange a partir do Princípio de d'Alembert.

Na última expressão acima, a função energia potencial  $U(\mathbf{q}, t)$  é um campo escalar que atua no espaço de configuração  $E^n$ , ao passo que as forças conservativas  $F_k(\mathbf{q}, t)$  são campos vetoriais que atuam também no  $E^n$ . Estes campos vetoriais podem ser expressos na forma de uma  $n$ -upla como  $\mathbf{F}(\mathbf{q}, t) = (F_1, F_2, \dots, F_n) \in E^n$ .

A relação entre estes campos que atuam no espaço de configuração do sistema com as forças e os potenciais no  $E^3$ , os quais atuam sobre as partículas do sistema, pode ser estabelecida da seguinte maneira. Retornando à discussão realizada na seção 1.5 a respeito de coordenadas generalizadas, a força total que atua sobre a  $\alpha$ -ésima partícula do sistema pode ser expressa como  $\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_\alpha, \dots, \mathbf{r}_N)$ , onde já se assume que todas as forças no sistema são conservativas. Neste caso, de acordo com os resultados obtidos na seção 1.1.2.3, a força total sobre cada partícula sempre pode ser expressa em termos de uma função energia potencial como

$$\mathbf{F}_\alpha = -\nabla_\alpha U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x_{\alpha,i}} \hat{\mathbf{x}}_i.$$

Levando em conta agora as leis de transformação (1.41), observa-se que para todo  $j = 1, \dots, n$ ,

$$\sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_j} = -\sum_{\alpha=1}^N \nabla_\alpha U \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_j} = -\sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x_{\alpha,i}} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} = -\frac{\partial}{\partial q_j} U(\mathbf{q}, t).$$

Ou seja, o campo de forças que atua no espaço de configuração do sistema está relacionado com as forças que atuam individualmente sobre as partículas do sistema através de

$$F_j(\mathbf{q}, t) = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_j}, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (1.47)$$

Agora a hipótese de forças exclusivamente conservativas será descartada. Assume-se que existem forças não conservativas, porém tais que elas podem ser derivadas a partir de um potencial dependente também das velocidades generalizadas. O exemplo 1.16, onde a Lagrangiana de uma carga no campo eletromagnético foi derivada, servirá de modelo para tais potenciais generalizados.

As forças em questão devem ser deriváveis a partir de potenciais do tipo

$$U = U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t),$$

através da relação

$$F_{\alpha,i}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) = -\frac{\partial U}{\partial x_{\alpha,i}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_{\alpha,i}}.$$

Neste caso,

$$\sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_j} = -\sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x_{\alpha,i}} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_{\alpha,i}}.$$

Mas,

$$\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_{\alpha,i}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial U}{\partial v_{\alpha,i}} \right) - \frac{\partial U}{\partial v_{\alpha,i}} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j}.$$

Além disso, dadas as leis de transformação  $\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha(\mathbf{q}, t)$  e  $\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , observa-se que

$$\mathbf{v}_\alpha = \dot{\mathbf{r}}_\alpha = \frac{d\mathbf{r}_\alpha}{dt} = \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_\ell} \dot{q}_\ell + \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t},$$

de forma que

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_j}. \quad (1.48a)$$

Da mesma maneira,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} = \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial}{\partial q_\ell} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \dot{q}_\ell + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_\ell} \dot{q}_\ell + \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \right) = \frac{\partial v_{\alpha,i}}{\partial q_j}. \quad (1.48b)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_j} &= - \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial U}{\partial x_{\alpha,i}} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial v_{\alpha,i}} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \right) + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial U}{\partial v_{\alpha,i}} \right) \\ &= - \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial U}{\partial x_{\alpha,i}} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial v_{\alpha,i}} \frac{\partial v_{\alpha,i}}{\partial q_j} \right) + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial v_{\alpha,i}} \frac{\partial v_{\alpha,i}}{\partial \dot{q}_j} \right), \end{aligned}$$

o qual se reduz a

$$\sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_j} = - \frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j},$$

sendo  $U = U(\{\mathbf{r}_\alpha\}, \{\dot{\mathbf{r}}_\alpha\}, t)$ , ou seja, ainda dado em termos das grandezas cinemáticas das partículas do sistema.

Então, se o potencial puder ser escrito agora em termos das coordenadas e velocidades generalizadas como  $U = U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , sendo denominado neste caso *potencial generalizado* ou *potencial dependente de velocidades*, e se as *forças generalizadas*  $Q_k = Q_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  forem obtidas a partir das expressões

$$Q_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = - \frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}, \quad (j = 1, \dots, n), \quad (1.49a)$$

onde

$$Q_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_j}, \quad (1.49b)$$

então, retornando a (1.46) e substituindo  $F_k$  por  $Q_k$ , resulta

$$\frac{\partial}{\partial q_k} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = -Q_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial U}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k},$$

a qual pode ser colocada novamente na forma das equações (1.42), com a Lagrangiana do sistema escrita como

$$L\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\} = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t).$$

## 1.7.2 FORÇAS GENERALIZADAS DISSIPATIVAS OU MOTRIZES

Nem todas as forças podem ser derivadas a partir de potenciais. Quando isso ocorre, a discussão realizada acima a respeito de forças e potenciais generalizados não é mais válida. Por exemplo, forças dissipativas que se originam do atrito entre dois corpos ou da viscosidade de um fluido são, em geral, dependentes da velocidade da partícula, mas não podem ser derivadas a partir de um potencial, como foi feito para a força de Lorentz. Nesta situação, é necessário ampliar o conceito de forças e potenciais generalizados, de forma a incluir esses casos.

Considera-se novamente a força total que atua sobre a  $\alpha$ -ésima partícula do sistema. Esta força será escrita agora como

$$\mathbf{F}_\alpha^{\text{tot}} = \mathbf{F}_\alpha + \mathbf{f}_\alpha,$$

sendo  $\mathbf{F}_\alpha$  a força discutida na seção anterior, a qual pode ser derivada a partir de um potencial, mesmo que não seja conservativa, e  $\mathbf{f}_\alpha$  a força total que não pode ser obtida a partir do potencial. Então, seguindo a definição realizada em (1.47), define-se  $Q'_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) como a parte das forças generalizadas que não é oriunda de nenhum potencial, através de

$$Q'_j = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{f}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_j}. \quad (1.50)$$

Desta forma, as componentes das forças generalizadas totais existentes no espaço de configuração podem ser escritas como

$$Q_j = - \frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} + Q'_j, \quad (j = 1, \dots, n).$$

Substituindo agora esta expressão em (1.46), as equações de Euler-Lagrange tornam-se

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = -Q'_k, \quad (1.51)$$

onde, novamente,

$$L\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\} = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t).$$

Uma vez que as forças generalizadas  $Q'_k$  não são derivadas a partir de uma função energia potencial, elas, em geral, violam a conservação da energia mecânica do sistema. Quando a energia mecânica decresce, as forças  $Q'_k$  são denominadas *forças generalizadas dissipativas*; quando a energia aumenta, elas são denominadas *forças generalizadas motrizes*.

Usualmente, forças motrizes são dependentes explicitamente do tempo. Assim, serão consideradas em mais detalhes as forças dissipativas, pois elas não necessitam de uma dependência temporal explícita.

### AS FUNÇÕES DISSIPATIVA E DE RAYLEIGH

De particular importância dentre as forças dissipativas são aquelas que se originam da viscosidade do meio através do qual as partículas do sistema se movimentam. Essas forças são usualmente dependentes das velocidades das partículas e são sempre dirigidas nos sentidos opostos aos movimentos das mesmas. Ou seja, se  $\mathbf{f}_\alpha$  é a força dissipativa que atua sobre a  $\alpha$ -ésima partícula, então

$$\mathbf{f}_\alpha = -g_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) \mathbf{v}_\alpha. \quad (1.52)$$

Muitas vezes, a função  $g_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) > 0$  é determinada empiricamente e é do tipo  $g_\alpha \propto v_\alpha^\ell$ , com  $\ell = 0, 1, \dots$ , dependendo de  $|\mathbf{v}_\alpha|$ . A força  $\mathbf{f}_\alpha$  modelada acima sempre irá realizar um trabalho negativo sobre cada partícula do sistema, levando à dissipação da energia total do sistema.

De (1.50) segue que

$$Q'_j = - \sum_{\alpha=1}^N g_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) \mathbf{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_j}.$$

Mas, empregando novamente a identidade (1.48a), resulta que

$$Q'_j = - \sum_{\alpha=1}^N g_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) \mathbf{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_j}.$$

Por outro lado,

$$\mathbf{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_\alpha^2}{\partial \dot{q}_j} = v_\alpha \frac{\partial v_\alpha}{\partial \dot{q}_j}.$$

Assumindo também que  $g_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) = g_\alpha(v_\alpha)$ , ou seja, que não há uma direção preferencial para a força dissipativa, resulta então

$$Q'_j = - \sum_{\alpha=1}^N g_\alpha(v_\alpha) v_\alpha \frac{\partial v_\alpha}{\partial \dot{q}_j} \doteq - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j}, \quad (1.53a)$$

sendo  $\mathcal{F}$  a *função dissipativa*, dada por

$$\mathcal{F} = \sum_{\alpha=1}^N \int_0^{v_\alpha} g_\alpha(v') v' dv', \quad (1.53b)$$

o que pode ser verificado a partir da regra de Leibniz (1.16).

Portanto, as equações de Euler-Lagrange na forma (1.51) são escritas agora como

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (1.54)$$

Quando a função  $g_\alpha(v_\alpha) = b_\alpha = \text{cte.}$ , a força dissipativa é proporcional à velocidade e a função dissipativa em (1.53) fica escrita simplesmente

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N b_\alpha v_\alpha^2, \quad (1.55)$$

sendo então denominada *função de Rayleigh*.

O exemplo a seguir ilustra o uso da função de Rayleigh para um sistema dissipativo.

**Exemplo 1.17 (Pêndulo simples com resistência do ar proporcional à velocidade).** Retoma-se o problema de um pêndulo simples, mas agora será incluída uma força dissipativa atuando sobre o mesmo devido à pequena viscosidade do ar. Usando novamente coordenadas plano-polares e já considerando o vínculo sobre a massa, a Lagrangiana do pêndulo simples é

$$L\{\theta, \dot{\theta}\} = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell \cos \theta,$$

sendo  $\ell$  o comprimento do pêndulo e definindo  $U(\theta = \pi/2) = 0$ .

Se a velocidade do pêndulo for pequena o suficiente, a força resistiva será sempre proporcional à mesma. Dessa forma, a expressão (1.52) pode ser escrita

$$f = -gv,$$

sendo  $g = \text{cte}$ . Com esta expressão a função de Rayleigh (1.55) é, simplesmente,

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}bv^2 = \frac{1}{2}b\ell^2\dot{\theta}^2.$$

Então, a equação de Euler-Lagrange na presença de forças dissipativas (1.54) fica

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\theta}} = 0,$$

fornecendo a equação de movimento

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0.$$

No caso de pequenas oscilações ( $|\theta| \ll 1$ ), esta se reduzirá à equação de um oscilador harmônico amortecido.

## 1.8 FORMALISMO LAGRANGIANO COM VÍNCULOS NÃO HOLÔNOMOS

Nesta seção, o formalismo Lagrangiano será estendido para o caso mais geral de um sistema restringido por vínculos não holônomos. Inicialmente, os vínculos continuarão supostos todos holônomos, mas serão obtidas expressões equivalentes às discutidas na seção anterior, sendo explicitada a relação entre as forças de vínculos e as forças generalizadas. Posteriormente o caso mais geral será discutido.

Conforme discutido na seção 1.2.7, quando um sistema com  $N$  partículas é sujeito a  $m$  equações de vínculos, o número de graus de liberdade se reduz a  $n = 3N - m$  e o formalismo do cálculo variacional deve ser modificado pelo método dos multiplicadores de Lagrange. No caso de vínculos holônomos e com o uso de coordenadas generalizadas adequadamente escolhidas, foi argumentado na seção 1.6 que as equações de Euler-Lagrange podem ser escritas em termos das  $n$  coordenadas generalizadas, as quais satisfazem automaticamente os vínculos. Contudo, mesmo neste caso em certas situações é vantajoso manter-se os multiplicadores de Lagrange, principalmente quando as forças de vínculo agem somente durante um intervalo finito de tempo na dinâmica total do sistema.

Por outro lado, quando há vínculos não holônomos presentes, é em geral impossível introduzir-se coordenadas generalizadas tais que os vínculos sejam satisfeitos e o tratamento formal do problema deve necessariamente envolver o uso dos multiplicadores de Lagrange.

### 1.8.1 TRATAMENTO GERAL

Retorna-se às coordenadas e às velocidades de cada uma das  $N$  partículas do sistema. Porém, para economizar a notação, ao invés de se identificar coordenadas e velocidades por  $x_{\alpha,i}$  e  $v_{\alpha,i}$

respectivamente, será mantida a notação em termos das variáveis  $q_j$  e  $\dot{q}_j$ . Assim, o sistema deverá ser descrito por  $3N$  coordenadas e velocidades, juntamente com  $m$  equações de vínculos do tipo

$$f_\ell(q_1, \dots, q_{3N}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}t) \equiv f_\ell(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0, \quad (\ell = 1, \dots, m), \quad (1.56a)$$

sendo que as coordenadas  $q_1, \dots, q_{3N}$  continuam sendo interpretadas como coordenadas generalizadas. Estas equações também podem ser escritas na forma diferencial como

$$df_\ell = \sum_{j=1}^{3N} \left( \frac{\partial f_\ell}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial f_\ell}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j + \frac{\partial f_\ell}{\partial t} dt \right) = 0. \quad (1.56b)$$

Como já argumentado em diversos momentos, estes vínculos são devidos a restrições impostas aos movimentos das partículas do sistema que podem ser de natureza geométrica e/ou cinemática. No formalismo Newtoniano estas restrições surgem devido a forças de contato (força normal) ou a forças dissipativas/motrizas. Por essa razão, diz-se que as equações (1.56) descrevem a ação de *forças de vínculo* que atuam sobre o sistema físico.

Retornando agora à formulação do Princípio de Hamilton em (1.38), a trajetória do sistema deve ser tal que a integral de ação é minimizada, isto é,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{3N} \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt = 0.$$

É importante observar aqui que a Lagrangiana  $L = T - U$  somente leva em conta as forças aplicadas às partículas do sistema, sem inclusão das forças de vínculos. Porém, agora as variações  $\{\delta q_j\}$  não são mais independentes entre si, justamente devido a esses vínculos. De fato, em (1.56) observa-se que dentre estas variações,  $m$  ( $< 3N$ ) são linearmente dependentes das  $n = 3N - m$  restantes através do sistema de equações

$$\delta f_\ell(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{j=1}^{3N} \left( \frac{\partial f_\ell}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial f_\ell}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) = 0, \quad (\ell = 1, \dots, m). \quad (1.57)$$

A questão que se impõe agora é como levar em conta estas relações de dependência (entre as variações das coordenadas generalizadas) durante o processo de minimização da ação do sistema, quando  $\delta \dot{q}_j \neq 0$ . A solução deste dilema pode ser obtida através da aplicação, sem muito rigor, de propriedades conhecidas de espaços vetoriais com produto interno em álgebra abstrata.<sup>23</sup>

Na ausência de vínculos, as variações  $\{\delta q_j\}$  são todas independentes entre si. Assumindo que tanto o conjunto de funções  $\delta q_j = \delta q_j(t)$  quanto os funcionais

$$\Lambda_j\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\} = \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad (j = 1, \dots, 3N)$$

são componentes de vetores em um espaço vetorial com produto interno de dimensão  $3N$ , aqui identificado por  $\mathcal{F}^{3N}$ , então a condição  $\delta S = 0$  pode ser escrita como<sup>24</sup>

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{j=1}^{3N} \Lambda_j \delta q_j \right) dt = 0.$$

De acordo com o teorema 1.2, este resultado leva às equações de Euler-Lagrange conhecidas para um sistema sem vínculos.

<sup>23</sup>Ver, por exemplo, [Apostila de Física-Matemática](#), capítulo 4.

<sup>24</sup>Em  $\mathcal{F}^{3N}$ , os vetores são as  $3N$ -uplas  $h \doteq (h_1(t), \dots, h_{3N}(t))$ , sendo  $h_j(t)$  ( $j = 1, \dots, 3N$ ) funções da classe  $C^1[t_1, t_2]$ , integráveis neste intervalo, enquanto que os escalares são os números reais. Dados  $h, g \in \mathcal{F}^{3N}$ , a adição vetorial é definida como  $h + g = (h_1 + g_1, \dots, h_{3N} + g_{3N}) \in \mathcal{F}^{3N}$ , o vetor nulo é  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$  e o produto do vetor  $h$  pelo escalar  $\alpha \in \mathbb{R}$  é  $\alpha h \doteq (\alpha h_1, \dots, \alpha h_{3N}) \in \mathcal{F}^{3N}$ . O produto interno entre  $h$  e  $g$  é definido como

$$\langle h, g \rangle \doteq \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{j=1}^{3N} h_j g_j \right) dt = \alpha \in \mathbb{R}.$$

Entretanto, a mesma condição pode ser agora interpretada como o resultado do produto interno entre os vetores  $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_{3N})$  e  $\delta q = (\delta q_1, \dots, \delta q_{3N})$ , ambos do espaço  $\mathcal{F}^{3N}$ . Este produto interno pode ser escrito como

$$\delta S = \langle \Lambda, \delta q \rangle = 0,$$

ou seja,  $\Lambda \perp \delta q$ . Como as componentes do vetor  $\delta q$ , em um sistema sem vínculos, são todas independentes entre si, cada variação arbitrária  $\delta q_j$  serve como base de um subespaço  $\mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}^{3N}$  de dimensão um. Por isto, o conjunto  $\{\delta q_j\}$  é linearmente independente. Como as variações são arbitrárias, então qualquer combinação das mesmas gera uma nova variação arbitrária. Por esta razão, o vetor  $\delta q$  necessariamente pertence a uma base de  $\mathcal{F}^{3N}$ . Portanto, a condição de produto interno nulo entre  $\Lambda$  e  $\delta q$  implica que  $\Lambda$  é ortogonal a qualquer vetor da base de  $\mathcal{F}^{3N}$ , implicando por sua vez, que  $\Lambda = 0$ , ou seja, é um vetor nulo, de onde se obtém novamente as equações de Euler-Lagrange (1.42).

Por outro lado, em um sistema vinculado um total de  $m$  variações em  $\delta q$  são linearmente dependentes das  $n = 3N - m$  restantes. Sem perda de generalidade, pode-se assumir que as variações  $\delta q_{n+1}, \dots, \delta q_{3N}$  são escritas em termos de  $\delta q_1, \dots, \delta q_n$ . Portanto, nesta situação o vetor  $\delta q = (\delta q_1, \dots, \delta q_n)$  pertence agora à base do subespaço  $\mathcal{F}^n \subset \mathcal{F}^{3N}$ . Neste caso,  $\Lambda$  não é mais um vetor nulo, pois a condição  $\langle \Lambda, \delta q \rangle = 0$  implica em que o vetor  $\Lambda$  é simplesmente ortogonal ao subespaço  $\mathcal{F}^n$ ; ou seja,  $\Lambda \in \mathcal{F}^m = \mathcal{F}^{3N-n}$ , sendo  $\mathcal{F}^m$  o complemento ortogonal de  $\mathcal{F}^n$ .

Retorna-se agora a (1.57) e multiplica-se cada equação do sistema por uma função  $\mu_\ell(t) \in C^1[t_1, t_2]$  suficientemente bem comportada, somando-se então as equações e integrando a resultante em  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Com isso, obtém-se

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{\ell=1}^m \sum_{j=1}^{3N} \mu_\ell(t) \left( \frac{\partial f_\ell}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial f_\ell}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^{3N} \sum_{\ell=1}^m \left[ \mu_\ell \frac{\partial f_\ell}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \mu_\ell \frac{\partial f_\ell}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j \right\} dt = 0,$$

resultado este que pode ser escrito como

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{j=1}^{3N} \left( \sum_{\ell=1}^m \chi_{\ell j} \right) \delta q_j \right] dt \equiv \left\langle \sum_{\ell=1}^m \chi_\ell, \delta q \right\rangle = 0,$$

onde cada  $\chi_\ell$  é um vetor no  $\mathcal{F}^{3N}$  cujos componentes são

$$\chi_{\ell j} = \mu_\ell \frac{\partial f_\ell}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \mu_\ell \frac{\partial f_\ell}{\partial \dot{q}_j} \right).$$

Este resultado deve ser válido para todos os vetores  $\chi_\ell$  possíveis (obtidos a partir de todas as funções  $\mu_\ell(t)$  possíveis), o que implica em que os vetores  $\chi_\ell$  não somente são ortogonais ao subespaço  $\mathcal{F}^n$ , mas também que eles varrem um subespaço  $\mathcal{F}_\chi \subset \mathcal{F}^{3N}$  que é complemento ortogonal de  $\mathcal{F}^n$ . Portanto, como todo espaço vetorial finito pode ser dado pela soma direta de um subespaço pelo seu complementar ortogonal e como tanto  $\mathcal{F}^m$  (que contém  $\Lambda$ ) quanto  $\mathcal{F}_\chi$  são ambos complementares ortogonais a  $\mathcal{F}^n$ , segue que  $\mathcal{F}_\chi = \mathcal{F}^m$ .

Por consequência, como os vetores  $\chi_\ell$  varrem  $\mathcal{F}^m$ , deve existir um conjunto de coeficientes  $\{\alpha_\ell\}$  ( $\ell = 1, \dots, m$ ) os quais permitem escrever

$$\Lambda = \sum_{\ell=1}^m \alpha_\ell \chi_\ell,$$

ou seja,

$$\Lambda_j = \sum_{\ell=1}^m \alpha_\ell \chi_{\ell j} = - \sum_{\ell=1}^m \left[ \lambda_\ell(t) \frac{\partial f_\ell}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \lambda_\ell(t) \frac{\partial f_\ell}{\partial \dot{q}_j} \right) \right],$$

onde se definiu

$$\lambda_\ell(t) = -\alpha_\ell \mu_\ell(t),$$

os quais são os multiplicadores de Lagrange.

Assim, as equações de Euler-Lagrange para um sistema vinculado ficam escritas

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad (j = 1, \dots, 3N), \quad (1.58a)$$

onde

$$\mathcal{L}\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\} = L\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\} + \sum_{\ell=1}^m \lambda_{\ell}(t) f_{\ell}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (1.58b)$$

Estas  $3N$  equações, em conjunto com as  $m$  equações de vínculos (1.56) permitem, em princípio, encontrar-se as  $3N + m$  incógnitas.

Embora solúvel a princípio, o sistema (1.56) + (1.58) possui um sério inconveniente: para sistemas não holônomos ele implica em um conjunto de  $m$  equações de primeira ordem para os multiplicadores  $\{\lambda_{\ell}(t)\}$ , o que por sua vez implica em condições iniciais para as forças de vínculo e/ou para as  $\{\dot{q}_j\}$ . Tais condições iniciais não têm sentido físico em geral. Uma alternativa para a solução deste conflito, válida em casos particulares, será apresentada na seção 1.8.4.

## 1.8.2 SISTEMAS HOLONÔMICOS COM MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Como mencionado anteriormente, mesmo com vínculos holônomos é às vezes conveniente empregar-se o método dos multiplicadores de Lagrange. Se os vínculos são holônomos, as equações (1.56) ficam escritas simplesmente

$$f_{\ell}(\mathbf{q}, t) = 0, \quad (\ell = 1, \dots, m) \quad (1.59)$$

ou

$$\sum_{j=1}^{3N} (a_{\ell j} dq_j + a_{\ell t} dt) = 0,$$

onde

$$a_{\ell j} = a_{\ell j}(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial f_{\ell}}{\partial q_j} \text{ e } a_{\ell t} = a_{\ell t}(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial f_{\ell}}{\partial t},$$

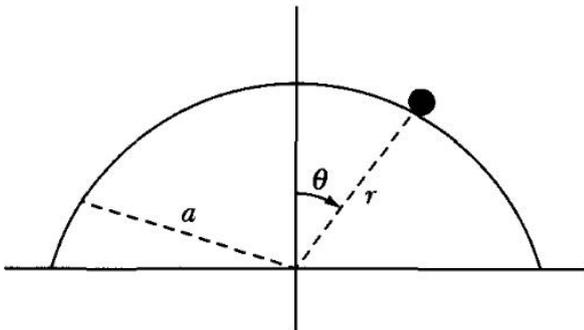
e as equações (1.58) ficam

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{\ell=1}^m \lambda_{\ell}(t) \frac{\partial f_{\ell}}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, \dots, 3N). \quad (1.60)$$

Este sistema de equações simplesmente reproduz as expressões já obtidas na seção 1.2.7.

Embora não necessário no caso de vínculos holônomos, o emprego dos multiplicadores de Lagrange pode ser útil quando a dinâmica do sistema é tal que os vínculos se tornam inválidos ou são violados a partir de um determinado ponto. O exercício a seguir ilustra uma situação onde isso ocorre.

**Exercício 1.12.** Uma partícula de massa  $m$  é liberada do repouso quase no ápice de um hemisfério fixo de raio  $a$ , conforme ilustrado na figura 1.21. Encontre a força de vínculo e determine o ângulo  $\theta_c$  no qual a partícula abandona o hemisfério.



**Figura 1.21:** Uma partícula de massa  $m$  movendo-se sem atrito sobre um hemisfério de raio  $a$ .

**Resolução.** Empregando coordenadas esféricas e assumindo  $U(\theta = \pi/2) = 0$ , a Lagrangiana da partícula fica

$$L\{r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}\} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr \cos \theta.$$

Note que já foi assumido que o movimento da partícula ocorre sobre um plano. A equação de vínculo sobre o movimento da partícula é

$$f(r, \theta) = r - a = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0.$$

Assim, as equações de Euler-Lagrange (1.60) ficam

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial r} = 0 &\implies m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta - \lambda(t) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 &\implies \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) - gr \sin \theta = 0, \end{aligned}$$

onde  $\lambda(t)$  é o multiplicador de Lagrange. Tendo obtido o sistema de equações acima, aplica-se agora o vínculo  $r = a = \text{cte.}$ , resultando

$$ma\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta + \lambda = 0, \quad \ddot{\theta} = \frac{g}{a} \sin \theta.$$

A segunda equação pode ser integrada da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{g}{a} \sin \theta, \\ \int \dot{\theta} d\dot{\theta} = \frac{g}{a} \int \sin \theta d\theta \implies \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = -\frac{g}{a} \cos \theta + \alpha. \end{aligned}$$

Foi dito que a partícula foi abandonada do repouso quase no ápice do hemisfério, isto é, em um ângulo  $0 < \theta_0 \ll \theta_c$ . Assim,

$$\dot{\theta}^2 = 2\frac{g}{a} (\cos \theta_0 - \cos \theta).$$

Inserindo esta solução na primeira equação, resulta

$$2mg (\cos \theta_0 - \cos \theta) - mg \cos \theta + \lambda = 0 \implies \lambda = (3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0) mg,$$

obtendo-se assim a expressão para força de vínculo, a qual é a força normal que o hemisfério exerce sobre a partícula.

Observa-se então que a força de vínculo se torna nula para  $\theta \geq \theta_c$ , dado por  $\lambda(\theta_c) = 0$ ; ou seja, em

$$\theta_c = \cos^{-1} \left( \frac{2}{3} \cos \theta_0 \right) \gtrsim 48,2^\circ.$$

A partir deste ângulo a partícula abandona o hemisfério e se movimenta como um projétil. Uma análise das forças mostra que a força de vínculo é, de fato, a força normal exercida pelo hemisfério sobre a partícula. O vínculo some quando essa força normal se anula.

### 1.8.3 LAGRANGIANAS EQUIVALENTES

Antes de se abordar o problema dos vínculos não holônomos, é necessário realizar a derivação de uma importante propriedade matemática da Lagrangiana.

**Definição 1.8 (Lagrangianas equivalentes).** Duas Lagrangianas  $L_1 \{q, \dot{q}; t\}$  e  $L_2 \{q, \dot{q}; t\}$  são ditas *equivalentes* se diferem entre si pela derivada total em relação ao tempo de uma função arbitrária das coordenadas generalizadas e do tempo  $g(q, t)$ , ou seja,

$$L_2 \{q, \dot{q}; t\} - L_1 \{q, \dot{q}; t\} = \frac{d}{dt} g(q, t).$$

Desta definição, o seguinte teorema segue.

**Teorema 1.4.** *Lagrangianas equivalentes originam as mesmas equações de movimento.*

*Demonstração.* Sendo  $L_1\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\}$  e  $L_2\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\}$  duas Lagrangianas equivalentes, calculam-se as integrais de ação  $S_1$  e  $S_2$  associadas às mesmas a partir da definição de equivalência, resultando em

$$\int_{t_1}^{t_2} L_2\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\} dt = \int_{t_1}^{t_2} L_1\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} g(\mathbf{q}, t) dt,$$

ou seja,

$$S_2 = S_1 + g(\mathbf{q}(t_2), t_2) - g(\mathbf{q}(t_1), t_1).$$

Como os instantes  $t_1$  e  $t_2$  são fixos, a aplicação do Princípio de Hamilton ao resultado acima resultará em

$$\delta S_2 = \delta S_1.$$

Portanto, as equações de movimento resultantes serão as mesmas.  $\square$

O teorema acima também pode ser demonstrado diretamente a partir das equações de Euler-Lagrange para cada Lagrangiana.

### 1.8.4 SISTEMAS NÃO HOLONÔMICOS

Em uma situação mais geral, deseja-se um método que permita integrar uma classe de vínculos não holônomos, porém sem surgir o inconveniente mencionado anteriormente a respeito das condições iniciais para os multiplicadores de Lagrange. Isto é possível para uma classe particular de vínculos não holônomos, determinados pelas equações

$$f_\ell(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{j=1}^{3N} a_{\ell j}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_j + a_{\ell t}(\mathbf{q}, t) = 0, \quad (\ell = 1, \dots, m), \quad (1.61a)$$

cuja forma diferencial pode ser expressa como

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{\ell j}(\mathbf{q}, t) dq_j + a_{\ell t}(\mathbf{q}, t) dt = 0, \quad (\ell = 1, \dots, m); \quad (1.61b)$$

ou seja, para vínculos lineares nas velocidades generalizadas. Quando  $a_{\ell j}(\mathbf{q}, t) = 0$ , as equações (1.61a) se reduzem às equações de vínculos holônomos (1.59) em coordenadas generalizadas.

Embora vínculos na forma (1.61) sejam uma classe particular de vínculos não holônomos, diversos sistemas físicos os apresentam. Em particular, será mostrado na seção 3.8.3 que este tipo de vínculo surge quando há rolamento de corpos rígidos.

De acordo com a discussão realizada anteriormente, vínculos não holônomos não são integráveis, i. e., não é possível encontrar-se um fator integrante que transforme a equação diferencial de primeira ordem acima em uma diferencial exata. A justificativa para esta afirmação segue do seguinte argumento. Suponha, outrossim, que exista um conjunto de funções  $\{h_\ell(\mathbf{q}, t)\}$  ( $\ell = 1, \dots, m$ ) tais que, para cada  $f_\ell(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  em (1.61a) seja possível escrever

$$\sum_{j=1}^{3N} h_\ell(\mathbf{q}, t) a_{\ell j}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_j + h_\ell(\mathbf{q}, t) a_{\ell t}(\mathbf{q}, t) = \frac{d}{dt} H_\ell(\mathbf{q}, t) = 0.$$

Neste caso, os fatores integrantes  $h_\ell$  permitem integrar as equações (1.61a), gerando os vínculos holônomos  $H_\ell(\mathbf{q}, t) - C_\ell = 0$  ( $\ell = 1, \dots, m$ ), sendo  $C_\ell = \text{cte}$ . Mas, se os fatores integrantes existem, então

$$\frac{\partial H_\ell}{\partial q_j} = h_\ell(\mathbf{q}, t) a_{\ell j}(\mathbf{q}, t), \quad \frac{\partial H_\ell}{\partial t} = h_\ell(\mathbf{q}, t) a_{\ell t}(\mathbf{q}, t).$$

Como as funções  $H_\ell(\mathbf{q}, t)$  devem ser funções suaves das coordenadas e do tempo, é necessário que as seguintes identidades sejam satisfeitas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_\ell}{\partial q_r \partial q_j} &= \frac{\partial^2 H_\ell}{\partial q_j \partial q_r} \implies \frac{\partial}{\partial q_r} (h_\ell a_{\ell j}) = \frac{\partial}{\partial q_j} (h_\ell a_{\ell r}) \quad (r \neq j), \\ \frac{\partial^2 H_\ell}{\partial q_j \partial t} &= \frac{\partial^2 H_\ell}{\partial t \partial q_j} \implies \frac{\partial}{\partial q_j} (h_\ell a_{\ell t}) = \frac{\partial}{\partial t} (h_\ell a_{\ell j}), \end{aligned}$$

para todo  $\ell = 1, \dots, m$  e  $j, r = 1, \dots, 3N$ . Se estas identidades não forem todas satisfeitas, então não existem fatores integrantes e os vínculos são não holônomos.

Contudo, para vínculos na forma (1.61), pode-se argumentar que uma vez obtida a solução das equações de movimento, as funções  $q_j = q_j(t)$  se tornam conhecidas e tais que satisfazem os vínculos. É razoável supor, portanto, que existe uma função  $\hat{f}_\ell = \hat{f}_\ell(\mathbf{q}(t), t)$  tal que

$$\frac{d\hat{f}_\ell}{dt} = f_\ell \implies \hat{f}_\ell(\mathbf{q}(t), t) = \int f_\ell(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt,$$

sendo  $f_\ell(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  um vínculo na forma (1.61). Ou seja, as equações de vínculo podem ser escritas como<sup>25</sup>

$$f_\ell(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{d}{dt} \hat{f}_\ell(\mathbf{q}, t) = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial \hat{f}_\ell}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \hat{f}_\ell}{\partial t},$$

o que permite identificar

$$\frac{\partial \hat{f}_\ell}{\partial q_j} = a_{\ell j}(\mathbf{q}, t) \qquad \frac{\partial \hat{f}_\ell}{\partial t} = a_{\ell t}(\mathbf{q}, t).$$

Observa-se também que

$$\frac{\partial f_\ell}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \hat{f}_\ell}{\partial q_j}.$$

Esta será a forma adotada para os vínculos não holônomos nesta seção.

Retornando agora às equações de Euler-Lagrange que devem ser empregadas para sistemas vinculados em geral, dadas por (1.58a,b), a Lagrangiana para este sistema vinculado pode ser escrita como

$$\bar{\mathcal{L}}\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\} = L\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\} + \sum_{\ell=1}^m \eta_\ell(t) f_\ell = L\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\} + \sum_{\ell=1}^m \eta_\ell(t) \frac{d\hat{f}_\ell}{dt},$$

onde  $\{\eta_\ell(t)\}$  são os multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos e  $L\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\} = T\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\} - U\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\}$  é a parte da Lagrangiana associada às forças generalizadas deriváveis de potenciais.

Considera-se agora uma outra Lagrangiana  $\mathcal{L}\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\}$  definida por

$$\mathcal{L}\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\} \doteq L\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\} - \sum_{\ell=1}^m \dot{\eta}_\ell \hat{f}_\ell.$$

Observa-se então que

$$\bar{\mathcal{L}}\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\} - \mathcal{L}\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\} = \sum_{\ell=1}^m \left( \eta_\ell \frac{d\hat{f}_\ell}{dt} + \frac{d\eta_\ell}{dt} \hat{f}_\ell \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{\ell=1}^m \eta_\ell(t) \hat{f}_\ell(\mathbf{q}, t) \right).$$

De acordo com o teorema sobre Lagrangianas equivalentes, como a diferença entre  $\bar{\mathcal{L}}$  e  $\mathcal{L}$  é a derivada temporal de uma função do tempo e das coordenadas generalizadas, estas devem resultar nas mesmas equações de movimento. Portanto, pode-se empregar a forma dada por  $\mathcal{L}\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\}$ , ao invés de  $\bar{\mathcal{L}}\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\}$ , para a determinação da dinâmica do sistema vinculado.

Como as funções  $\eta_\ell$  são indeterminadas, pode-se escrever sem perda de generalidade  $\dot{\eta}_\ell(t) = -\lambda_\ell(t)$ , resultando então na seguinte Lagrangiana

$$\mathcal{L}\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\} = L\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\} + \sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell(t) \hat{f}_\ell(\mathbf{q}, t).$$

A partir desta, as equações de Euler-Lagrange (1.58a) ficam

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell \frac{\partial f_\ell}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad (j = 1, \dots, 3N). \quad (1.62)$$

Esta equação é empregada mesmo em situações em que  $\hat{f}_\ell$  é não linear em  $\{\dot{q}_j\}$ .

A equação de Euler-Lagrange (1.62) com as equações de vínculo (1.61) são empregadas para a resolução da dinâmica de muitos sistemas clássicos vinculados, por exemplo para o problema do corpo rígido, abordado no capítulo 3. O exercício a seguir ilustra uma aplicação do formalismo desenvolvido nesta seção.

<sup>25</sup>Este argumento torna-se ainda mais convincente se for suposto que  $f_\ell(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \dot{\hat{f}}_\ell + (\eta_\ell)^{-1} \dot{\eta}_\ell \hat{f}_\ell$ , onde  $\eta_\ell(t)$  é o multiplicador de Lagrange e  $g_\ell$  é uma função tal que a expressão seja válida.

**Exercício 1.13.** Considere uma partícula movendo-se livremente sobre um plano, exceto pelo vínculo não holônomo

$$f(\dot{x}, y) = \dot{x} - \omega y = 0,$$

onde  $\omega = \text{cte.}$

(a) Mostre que o vínculo acima não é holônomo, *i. e.*, mostre que não existe um fator integrante que transforme  $f$  em um vínculo holônomo.

(b) Obtenha e resolva as equações de movimento e a força de vínculo.

*Resolução.* (a) Um vínculo que aparenta ser não holônomo é na verdade holônomo se existir um fator integrante não nulo  $h(x, y, t)$  tal que permita integrar a equação. Ou seja, se

$$h\dot{x} - \omega hy = \frac{d}{dt}H(x, y, t) = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0.$$

Se isso for verdade, então a equação acima se transforma na equação de vínculo holônomo

$$F(x, y, t) = H(x, y, t) - C = 0, \quad (C = \text{cte.})$$

Então, supondo que exista  $h(x, y, t)$ , identifica-se

$$\frac{\partial H}{\partial x} = h, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\omega hy.$$

Porém, neste caso as derivadas de 2ª ordem devem satisfazer as condições

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} &\implies \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \implies h = h(x, t), \\ \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t} &\implies \frac{\partial h}{\partial t} = -\omega y \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial y} &\implies -\omega h = 0 \implies h = 0. \end{aligned}$$

Ou seja, não existe um fator integrante  $h(x, y, t)$  e, portanto, o vínculo é de fato não holônomo.

(b) Para resolver a dinâmica da partícula, considera-se agora sua Lagrangiana, dada simplesmente por

$$L\{\dot{x}, \dot{y}\} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

Da equação de vínculo temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\omega, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0.$$

A solução é obtida a partir das equações (1.62). De acordo com as mesmas, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0 &\implies m\ddot{x} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0 &\implies \ddot{y} = 0 \implies \boxed{y(t) = y_0 + v_0 t.} \end{aligned}$$

Usando o vínculo,

$$\dot{x} = \omega y \implies \boxed{x(t) = \left(y_0 + \frac{1}{2}v_0 t\right)\omega t + x_0,}$$

resultando então para  $\lambda(t)$

$$\boxed{\lambda = m\ddot{x} = m\omega v_0.}$$

### 1.8.5 FORÇAS DE VÍNCULO E FORÇAS GENERALIZADAS

O termo “forças de vínculo” foi anteriormente empregado em relação aos vínculos impostos ao sistema e os multiplicadores de Lagrange. Essa relação será agora discutida em maiores detalhes, visando o esclarecimento do significado físico do termo.

### 1.8.5.1 VÍNCULOS NÃO HOLÔNOMOS

Retornando à discussão realizada na seção 1.7.2 a respeito de forças generalizadas que não são deriváveis de potenciais, realizou-se a separação da força total que atua sobre a  $\alpha$ -ésima partícula como

$$\mathbf{F}_\alpha^{\text{tot}} = \mathbf{F}_\alpha + \mathbf{f}_\alpha,$$

sendo  $F_\alpha$  a força derivável de um potencial que pode depender do tempo e  $f_\alpha$  a força que não é derivável de potenciais e que será aqui relacionada com as forças de vínculo. Definiu-se então a força generalizada  $Q'_j$  conforme a expressão (1.50) e as equações de Euler-Lagrange foram escritas como em (1.51). Ou seja, a força generalizada não potencial fica expressa como

$$Q'_j = - \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right), \quad (1.63a)$$

onde a Lagrangiana contém somente as contribuições das forças generalizadas  $Q_j(q, \dot{q}, t)$ , deriváveis de potenciais.

Por outro lado, a seção 1.8.4 discutiu a evolução do mesmo sistema de partículas em termos de vínculos não holônomos, os quais foram denominados de forças de vínculo devido ao seu efeito na dinâmica do sistema. Foram derivadas então as equações de movimento (1.62).

Obviamente, a dinâmica do sistema é única e ambas as descrições devem produzir os mesmos resultados. Por conseguinte, para que ambos os sistemas de equações descrevam a mesma dinâmica, é necessário estabelecer a seguinte relação entre as forças generalizadas e as forças de vínculo:

$$Q'_j = \sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell(t) \frac{\partial f_\ell}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell a_{\ell j}. \quad (1.63b)$$

Em suma, tanto a definição (1.50) quanto as expressões (1.63a,b) servem para determinar as forças de vínculo que atuam sobre o sistema.

### 1.8.5.2 VÍNCULOS HOLÔNOMOS

A equação de vínculos holônomos (1.59) é um caso particular da equação (1.61a). Contudo, ao tomar a derivada total no tempo da primeira, resulta

$$\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_\ell}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f_\ell}{\partial t} = 0,$$

a qual pode ser escrita na forma (1.61a) com as identificações

$$a_{\ell j} = \frac{\partial f_\ell}{\partial q_j}, \quad a_{\ell t} = \frac{\partial f_\ell}{\partial t},$$

embora, é claro, que os vínculos não deixem de ser integráveis.

Desta forma, as expressões (1.50) e (1.63a,b) são igualmente válidas para identificar as forças de vínculo em sistemas holonômicos.

Uma outra relação entre vínculos holônomos e forças de vínculo que ilustra a origem física destes últimos, passa pela definição do *momento canônico conjugado*.

**Definição 1.9 (Momento canônico conjugado).** Seja  $L\{q, \dot{q}; t\}$  a Lagrangiana de um sistema físico com  $n$  graus de liberdade. A quantidade  $p_k$ , definida por

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (1.64)$$

é denominada o *momento canônico conjugado à coordenada  $q_k$* .

Como a dimensão física da Lagrangiana é de energia ( $[L] = ML^2T^{-2}$ ), a dimensão do momento conjugado é

$$[p] = [L] [q]^{-1} T \xrightarrow{\text{se } [q] = L} [p] = MLT^{-1};$$

isto é, o momento canônico tem a dimensão de *momentum* linear se a coordenada conjugada  $q_k$  possuir dimensão de comprimento. Entretanto, como será ilustrado em exemplos posteriores, mesmo neste caso o momento conjugado não necessariamente será igual ao *momentum* linear.

O momento conjugado a uma coordenada desempenha um papel importante na análise das leis de conservação do sistema físico que será realizada na seção 1.9. Ainda mais importante é o papel desempenhado pelos momentos conjugados no formalismo Hamiltoniano, que será abordado no capítulo 2.

Seja então um sistema com  $N$  partículas submetido a  $m$  vínculos holônomos, descritos pelas funções  $f_\ell = f_\ell(\mathbf{q}, t)$ ; por conseguinte, este sistema possui  $n = 3N - m$  graus de liberdade.

Empregando o método dos multiplicadores de Lagrange, a dinâmica deste sistema será descrita pelas equações de Euler-Lagrange (1.60), as quais podem ser escritas como

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell(t) \frac{\partial f_\ell}{\partial q_j}, \quad (j = 1, \dots, 3N).$$

A expressão acima pode ser comparada com a segunda lei de Newton  $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ . De acordo com essa interpretação, o lado direito da equação contém as forças (generalizadas) que atuam sobre o sistema.

Se a energia cinética total do sistema depende somente das velocidades generalizadas, então a taxa de variação do momento canônico será

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell(t) \frac{\partial f_\ell}{\partial q_j} = -\frac{\partial}{\partial q_j} \left( U - \sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell(t) f_\ell \right) = -\frac{\partial U_{\text{ef}}}{\partial q_j},$$

sendo

$$U_{\text{ef}} = U - \sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell(t) f_\ell,$$

o qual atua como um *potencial efetivo* que determina a dinâmica do sistema. O primeiro termo consiste no potencial generalizado. Já o gradiente do segundo termo irá gerar as *forças de vínculo*, ou *forças reativas*, aplicadas ao mesmo. A força reativa na  $j$ -ésima direção oriunda dos vínculos impostos ao sistema será então

$$Q_j^{\text{reat}} = \sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell(t) \frac{\partial f_\ell}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, 3N),$$

o que mostra que em sistemas holonômicos,  $Q_j^{\text{reat}}$  é a força generalizada dada por (1.63b).

A contribuição do  $k$ -ésimo vínculo a  $Q_j^{\text{reat}}$  é

$$Q_{kj}^{\text{reat}} = \lambda_k(t) \frac{\partial f_k}{\partial q_j} \quad (k = 1, \dots, m).$$

Dessa forma, a dimensão física de  $\lambda_\ell$  é

$$[\lambda_\ell] = [f_\ell]^{-1} [q] [p] T^{-1}.$$

Dependendo das quantidades envolvidas, o multiplicador de Lagrange pode realmente ter a dimensão de força.

**Exemplo 1.18 (“Variações sobre o tema:” pêndulo plano).** Retorna-se ao problema do pêndulo plano simples, abordado com multiplicadores de Lagrange no exemplo 1.15. A dinâmica deste sistema será aqui analisada de acordo com as expressões obtidas nesta seção.

(i) Empregando coordenadas plano-polares (ver figura 1.14),

$$x = r \sin \theta \qquad y = -r \cos \theta,$$

escreve-se a Lagrangiana como

$$L \{r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}\} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + mgr \cos \theta.$$

Nota-se que é inicialmente assumido que  $\dot{r} \neq 0$ . A equação de vínculo pode ser escrita como

$$f(r) = r - l = 0.$$

Assim, as equações de Euler-Lagrange são

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} mr\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta - m\ddot{r} + \lambda = 0 \\ -gr \sin \theta - \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0. \end{cases}$$

Empregando agora o vínculo,  $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ , a segunda equação se reduz à conhecida equação do pêndulo

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0,$$

enquanto que a primeira equação fornece o valor do multiplicador de Lagrange

$$\lambda = -m (l\dot{\theta}^2 + g \cos \theta).$$

Realizando a decomposição de forças na figura 1.14, observa-se que  $\lambda$  contém  $T_r = -T = -mg \cos \theta$ , sendo  $T_r$  a componente da força de tensão do cabo na direção radial e  $T$  seu módulo. O outro termo é proporcional à aceleração radial da partícula. Portanto, de fato  $\lambda$  é a força que cria o vínculo imposto à partícula.

(ii) Do ponto de vista das forças de vínculo dadas por (1.63a, b), obtém-se que para o pêndulo simples,

$$Q'_\theta = Q_\theta^{\text{reat}} = 0, \quad Q'_r = Q_r^{\text{reat}} = \lambda(t) = -m (l\dot{\theta}^2 + g \cos \theta).$$

Ou seja, as forças de vínculo (reativas) atuam somente na direção radial em um pêndulo simples.

(iii) Finalmente, a partir da definição (1.50), obtém-se novamente

$$Q'_\theta = T \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = 0, \quad Q'_r = T \cdot \hat{\mathbf{r}} = T_r.$$

## 1.9 PROPRIEDADES DE SIMETRIA DAS EQUAÇÕES DE EULER-LAGRANGE E LEIS DE CONSERVAÇÃO

Algumas propriedades matemáticas importantes da Lagrangiana de um sistema e de suas correspondentes equações de Euler-Lagrange serão apresentadas nesta seção.

### 1.9.1 INVARIÂNCIA SOB TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS

Durante a discussão realizada na seção 1.6, assumiu-se que o Princípio de Hamilton proposto inicialmente no espaço Euclidiano  $E^3$  também é válido quando são realizadas as transformações para as coordenadas generalizadas, em cuja situação a dinâmica passa a ser descrita no espaço de configuração do sistema. Com essa suposição, foram derivadas as equações de Euler-Lagrange (1.42). A validade dessa suposição será agora demonstrada. De fato, será mostrado aqui que as equações de Euler-Lagrange são invariantes em forma frente a *qualquer* transformação de coordenadas.

Parte-se da suposição de que as equações de Euler-Lagrange determinam corretamente a dinâmica do sistema quando este possui um total de  $n$  graus de liberdade, sendo o seu espaço de configuração determinado pelas coordenadas generalizadas  $\{q_1, \dots, q_n\}$ , as quais podem ser as coordenadas  $\{x_{\alpha,i}\}$  das partículas no espaço  $E^3$ . Define-se agora um conjunto de  $n$  novas coordenadas  $\{s_1, \dots, s_n\}$ , relacionadas a  $\{q_j\}$  através das leis de transformação

$$s_k = s_k(q_1, \dots, q_n, t), \quad (k = 1, \dots, n). \quad (1.65a)$$

Nota-se que a lei de transformação pode depender explicitamente do tempo. Porém, uma condição importante é imposta. Empregando conceitos de análise funcional, a definição dos mapeamentos  $s_k(\mathbf{q}, t)$ , onde as coordenadas  $\{q_j\}$  fazem o papel de elementos do domínio da função e as coordenadas  $\{s_k\}$  são as imagens, devem sempre ser tais que o mapeamento é *bijetivo*, ou seja, sobrejetivo e injetivo, a cada instante de tempo.

Uma discussão mais moderna a respeito das condições impostas sobre as leis de transformação emprega conceitos avançados de geometria e topologia. Não se deseja realizar aqui uma discussão aprofundada sobre este assunto. Basta mencionar que o conjunto das coordenadas generalizadas  $\{q_j\}$ , as quais variam de forma contínua dentro de seus domínios de validade, definem um *espaço topológico métrico*, no qual as noções geométricas de pontos no espaço contidos em uma vizinhança e de distância entre dois pontos quaisquer podem ser definidas sem ambiguidades.

Adicionalmente, a dinâmica do sistema não está necessariamente restrita a um espaço Euclidiano, caracterizado por ser *plano*. A dinâmica pode ocorrer também em espaços *curvos*, tal como ocorre com partículas confinadas a se deslocar sobre superfícies esféricas (ou hiperesféricas). Porém, aqui uma nova condição é imposta: mesmo se o espaço topológico for curvo, essa curvatura deve ser suficientemente “suave” para que a vizinhança em torno de qualquer ponto deste espaço se assemelhe a um espaço Euclidiano plano. Adicionando então esta última condição à propriedade de diferenciabilidade do espaço topológico (por ser métrico e contínuo), caracteriza o mesmo como uma *variedade diferenciável*.<sup>26</sup>

Portanto, empregando a linguagem de espaços topológicos, os conjuntos das coordenadas  $\{q_j\}$  e  $\{s_k\}$  definem duas variedades diferenciáveis que podem ser identificadas por  $\mathcal{Q}$  e  $\mathcal{S}$ , respectivamente, e que estão relacionadas entre si pelo mapeamento

$$r : \mathcal{Q} \mapsto \mathcal{S},$$

o qual é operacionalizado pelas leis de transformação (1.65a). Pelas condições impostas ao mapeamento, o mesmo é sempre bijetivo e é também diferenciável (nas coordenadas ou no parâmetro  $t$ ).

Agora, impõe-se uma última condição: este mapeamento deve ser *inversível*, por se tratar de duas descrições distintas do mesmo sistema físico. Ou seja, devem existir também as leis de transformações inversas

$$q_j = q_j(s_1, \dots, s_n, t), \quad (j = 1, \dots, n), \quad (1.65b)$$

as quais executam o mapeamento inverso  $r^{-1} : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{Q}$ , e este mapeamento inverso também deve ser diferenciável.

Na área de topologia, tal mapeamento bijetivo e inversível entre variedades diferenciáveis é denominado um *difeomorfismo*, e os espaços  $\mathcal{Q}$  e  $\mathcal{S}$  são ditos *difeomórficos* entre si.

Retornando às equações de movimento, e diferenciando (1.65b) no tempo, obtém-se

$$\dot{q}_j = \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial q_j}{\partial s_\ell} \dot{s}_\ell + \frac{\partial q_j}{\partial t} \implies \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{s}_k} = \frac{\partial q_j}{\partial s_k}.$$

Realizando a transformação (1.65a) na Lagrangiana original  $L\{q, \dot{q}, t\}$ , esta pode ser expressa como

$$\bar{L}\{s, \dot{s}, t\} = L\{q(s, t), \dot{q}(s, \dot{s}, t), t\}.$$

Agora, derivando  $\bar{L}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{L}}{\partial s_k} &= \sum_{\ell=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_\ell} \frac{\partial q_\ell}{\partial s_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell} \frac{\partial \dot{q}_\ell}{\partial s_k} \right) \\ \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{s}_k} &= \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell} \frac{\partial \dot{q}_\ell}{\partial \dot{s}_k} \stackrel{(1.48a)}{=} \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell} \frac{\partial q_\ell}{\partial s_k}, \end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{s}_k} &= \sum_{\ell=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell} \frac{\partial q_\ell}{\partial s_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_\ell}{\partial s_k} \right) \\ &\stackrel{(1.48b)}{\longrightarrow} \sum_{\ell=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell} \frac{\partial q_\ell}{\partial s_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell} \frac{\partial \dot{q}_\ell}{\partial s_k} \right). \end{aligned}$$

Portanto, obtém-se

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial s_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{s}_k} = \sum_{\ell=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_\ell} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell} \right) \frac{\partial q_\ell}{\partial s_k} = 0,$$

<sup>26</sup>Em inglês: *differentiable manifold*.

uma vez que as equações de Euler-Lagrange são supostas válidas no espaço  $\mathcal{Q}$ . Ou seja, demonstrou-se que estas equações também são válidas no espaço  $\mathcal{S}$  e são invariantes sob difeomorfismos.

## 1.9.2 SIMETRIA E LEIS DE CONSERVAÇÃO

Uma outra vantagem da formulação Lagrangiana será ressaltada agora: a obtenção de leis de conservação a partir das simetrias envolvidas na dinâmica de um sistema físico no espaço e no tempo. Essas leis de conservação serão obtidas a partir da procura das constantes de movimento contidas dentro da Lagrangiana. Essas constantes de movimento podem ser simplesmente coordenadas generalizadas que se conservam na dinâmica do sistema mas também são propriedades globais do sistema, tais como os *momenta* linear e angular e a energia totais.

### 1.9.2.1 CONSTANTES DE MOVIMENTO

Como mencionado, *constantes de movimento*, ou *integrais primeiras* são grandezas físicas conservadas, ou seja, que permanecem estacionárias, durante a evolução dinâmica do sistema. Tratam-se de funções  $g$  das coordenadas e velocidades generalizadas tais que

$$\frac{dg}{dt} = 0, \text{ ou } g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \text{constante.}$$

Um tipo de constante de movimento que é facilmente percebido na Lagrangiana do sistema é uma *coordenada cíclica*. As definições e teoremas a seguir determinam a sua existência.

**Definição 1.10 (Coordenada cíclica).** Seja  $L\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\}$  a Lagrangiana de um sistema físico com  $n$  graus de liberdade. Se a Lagrangiana não depender da coordenada  $q_k$ , ou seja, se

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0,$$

então esta coordenada é dita *cíclica*.

Com as definições de coordenada cíclica e momento canônico conjugado (definição 1.9), o seguinte teorema é válido quando os vínculos forem holônomos.

**Teorema 1.5.** *Seja  $L\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\}$  a Lagrangiana de um sistema físico com  $n$  graus de liberdade submetido a vínculos holônomos. Se a coordenada  $q_k$  for cíclica, então o seu momento conjugado<sup>27</sup> é uma constante de movimento.*

*Demonstração.* Como os vínculos são holônomos, então a equação de Euler-Lagrange da coordenada  $q_k$  é

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \implies \frac{dp_k}{dt} = 0.$$

□

**Exemplo 1.19 (Partícula submetida a força central. Formulação Lagrangiana).** Seja uma partícula movimentando-se sob a ação de uma força central. Neste caso, supõe-se que a força é sempre conservativa e o seu potencial é do tipo  $U = U(r)$ . Empregando coordenadas esféricas, a Lagrangiana completa da partícula fica então escrita

$$L\{r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}\} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - U(r). \quad (1.66)$$

Nesta Lagrangiana, observa-se que a coordenada  $\varphi$  é cíclica; portanto,

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi} = \text{constante.}$$

Verifica-se facilmente que  $p_\varphi$  é a componente  $z$  do *momentum* angular da partícula.

<sup>27</sup>Ver definição 1.9.

### 1.9.2.2 TRANSLAÇÕES E ROTAÇÕES VIRTUAIS

A possível existência de coordenadas cíclicas, as quais implicam na conservação do momento conjugado a elas, mostra que a dinâmica do sistema é invariante frente a deslocamentos arbitrários ao longo dessas coordenadas. Por exemplo, se a coordenada cíclica tiver dimensão de comprimento, então a dinâmica é invariante frente a uma translação arbitrária ao longo da mesma; por sua vez, se a coordenada for um ângulo, então o sistema é invariante frente a rotações. Estes deslocamentos podem ser tanto reais quanto virtuais (imaginários), e podem ser tanto passivos (quando é o referencial que é deslocado) quanto ativos (quando é o sistema físico que sofre a transformação).

A invariância na forma e/ou nas propriedades de um sistema físico frente a transformações arbitrárias indica a existência de uma *simetria* do mesmo. Quando as transformações são aplicadas ao sistema físico *per se*, a existência de uma simetria implica em que a “forma” do sistema, ou seja, a distância relativa entre dois pontos quaisquer do sistema, permanece invariante frente a transformação. Neste caso, diz-se que o sistema apresenta uma *isometria* frente a essa transformação em particular. Uma importante consequência da existência de simetrias na forma e/ou propriedades de um sistema consiste no surgimento de constantes de movimento que estarão associadas a essas simetrias.

Para verificar se a Lagrangiana de um sistema físico qualquer, composto por  $N$  partículas, contém informações sobre suas propriedades de simetria, estuda-se como a Lagrangiana do sistema varia devido a transformações virtuais do tipo

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\alpha &\longrightarrow \mathbf{r}'_\alpha = \mathbf{r}_\alpha + \delta\mathbf{r}_\alpha \\ \mathbf{v}_\alpha &\longrightarrow \mathbf{v}'_\alpha = \mathbf{v}_\alpha + \delta\mathbf{v}_\alpha, \end{aligned} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N),$$

onde  $\{\delta\mathbf{r}_\alpha\}$  e  $\{\delta\mathbf{v}_\alpha\}$  são variações realizadas sobre as coordenadas e velocidades das partículas. Sob estas transformações, a Lagrangiana  $L = L\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N; t\}$  sofre a variação

$$\delta L = L\{\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N, \mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_N; t\} - L\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N; t\}.$$

Se as variações forem suficientemente pequenas,

$$\delta L = \sum_{\alpha=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \cdot \delta\mathbf{r}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \cdot \delta\mathbf{v}_\alpha \right), \quad (1.67)$$

onde  $\partial L/\partial \mathbf{r}_\alpha$  e  $\partial L/\partial \mathbf{v}_\alpha$  indicam, respectivamente, os gradientes nas coordenadas e componentes da velocidade da  $\alpha$ -ésima partícula.

Diferentes tipos de transformações podem levar a diferentes tipos de variações na Lagrangiana e se esta for invariante frente a uma ou mais transformações, isto indicará a existência de simetrias no sistema físico que levarão às constantes de movimento associadas a estas últimas. Algumas dessas simetrias que levam às leis de conservação em sistemas de partículas serão abordadas a seguir.

### 1.9.2.3 TEOREMAS DE CONSERVAÇÃO

Será considerado um sistema composto por  $N$  partículas, submetidas a  $m$  equações de vínculos holônomos do tipo

$$f_\ell(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad (\ell = 1, \dots, m).$$

Neste caso, a Lagrangiana é dada por (1.58b),

$$\mathcal{L}\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N; t\} = L\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N; t\} + \sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell(t) f_\ell(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \quad (1.68)$$

e as equações de movimento podem ser dadas por (1.58a).

As leis de conservação consideradas aqui são as seguintes.

## CONSERVAÇÃO DO MOMENTUM LINEAR TOTAL

A conservação do *momentum* linear total de um sistema está associado à invariância da Lagrangiana do mesmo frente a translações rígidas, ou seja, deslocamentos virtuais que mantêm

as distâncias relativas fixas e não alteram as velocidades. Este tipo de transformações é descrito por

$$\delta r_\alpha = \epsilon \hat{e}_n, \quad \delta v_\alpha = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, N),$$

sendo  $|\epsilon| < 1$  um parâmetro real pequeno e  $\hat{e}_n$  um vetor unitário que indica a direção e o sentido da transformação. Nesta situação, o seguinte teorema se aplica.

**Teorema 1.6 (Conservação do momentum linear total).** *Seja um sistema de partículas cuja dinâmica é descrita pela Lagrangiana (1.68). Se a Lagrangiana permanecer invariante frente a uma translação rígida arbitrária ao longo de uma dada direção, então a componente do momentum linear total do sistema ao longo dessa direção é conservada.*

*Demonstração.* Se  $\mathcal{L}$  é invariante frente a uma translação rígida, então de (1.67),

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_\alpha} \cdot (\epsilon \hat{e}_n) = \epsilon \hat{e}_n \cdot \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_\alpha} = 0.$$

Como  $\epsilon$  é arbitrário, resulta que

$$\hat{e}_n \cdot \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_\alpha} = 0.$$

Contudo, observa-se que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_\alpha} \stackrel{(1.64)}{=} \mathbf{p}_\alpha = m_\alpha \dot{r}_\alpha,$$

onde  $\mathbf{p}_\alpha$  é o momento conjugado à coordenada  $r_\alpha$ , ou seja, o *momentum* linear da  $\alpha$ -ésima partícula.

Assim, da equação de movimento (1.58a) resulta que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\alpha} = \frac{d\mathbf{p}_\alpha}{dt}.$$

Portanto, se a Lagrangiana for invariante frente as translações rígidas,

$$\hat{e}_n \cdot \sum_{\alpha=1}^N \frac{d\mathbf{p}_\alpha}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \hat{e}_n \cdot \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{p}_\alpha \right) = \frac{d}{dt} (\hat{e}_n \cdot \mathbf{P}) = 0,$$

sendo  $\mathbf{P} \doteq \sum_{\alpha} \mathbf{p}_\alpha$  o *momentum* linear total do sistema de partículas.

Ou seja, se a Lagrangiana for invariante frente a uma translação rígida do sistema de partículas, então o *momentum* linear total do sistema é conservado na direção da translação.  $\square$

**Exemplo 1.20.** Considere a Lagrangiana de uma partícula movendo-se sob a ação da força peso,

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - mgx_3.$$

Esta Lagrangiana é claramente invariante frente a translação rígida

$$\delta \mathbf{r} = \epsilon (\cos \eta \hat{e}_1 + \sin \eta \hat{e}_2), \quad (0 \leq \eta \leq 2\pi).$$

Portanto, as componentes  $p_1 = m\dot{x}_1$  e  $p_2 = m\dot{x}_2$  do *momentum* da partícula são conservados. Este resultado é trivialmente estendido para um sistema de  $N > 1$  partículas movendo-se sob a ação de seus pesos.

## CONSERVAÇÃO DO MOMENTUM ANGULAR TOTAL

Agora será verificada a consequência da invariância da Lagrangiana frente a uma rotação rígida do sistema em torno de um determinado eixo de rotação. Esta transformação é realizada escolhendo-se inicialmente um eixo de rotação cuja direção e sentido serão dados pelo vetor unitário  $\hat{e}_n$ . Em torno desse eixo será então efetuada uma rotação de todos os vetores do sistema por um ângulo  $\delta\theta$ . Definindo o vetor axial  $\delta\boldsymbol{\theta} = \delta\theta \hat{e}_n$ , a rotação rígida é assim descrita por

$$\delta r_\alpha = \delta\boldsymbol{\theta} \times r_\alpha, \quad \delta v_\alpha = \delta\boldsymbol{\theta} \times v_\alpha. \quad (1.69)$$

A figura 1.22 ilustra a rotação do vetor  $r_\alpha$ . Nesta situação o seguinte teorema se aplica.

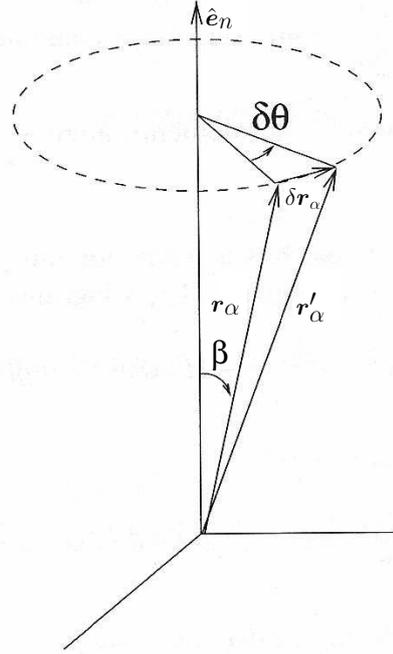


Figura 1.22: Rotação rígida de um sistema de partículas.

**Teorema 1.7 (Conservação do momentum angular total).** *Seja um sistema de partículas cuja dinâmica é descrita pela Lagrangiana (1.68). Se a Lagrangiana permanecer invariante frente a uma rotação rígida arbitrária, então a componente do momentum angular total do sistema ao longo do eixo de rotação é conservada.*

*Demonstração.* Se  $\mathcal{L}$  é invariante frente a uma rotação rígida, então de (1.67),

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^N \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{r}_\alpha} \cdot (\delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_\alpha) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{v}_\alpha} \cdot (\delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{v}_\alpha) \right] = 0.$$

Como  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$ , a expressão acima pode ser escrita

$$\delta\mathcal{L} = \delta\theta \hat{\mathbf{e}}_n \cdot \sum_{\alpha=1}^N \left( \mathbf{r}_\alpha \times \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{r}_\alpha} + \mathbf{v}_\alpha \times \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{v}_\alpha} \right) = 0.$$

O elemento de ângulo  $\delta\theta$  é arbitrário; além disso, já foi visto que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{v}_\alpha} = \mathbf{p}_\alpha, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{r}_\alpha} = \dot{\mathbf{p}}_\alpha.$$

Portanto,

$$\hat{\mathbf{e}}_n \cdot \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{r}_\alpha \times \dot{\mathbf{p}}_\alpha + \dot{\mathbf{r}}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha) = \hat{\mathbf{e}}_n \cdot \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha) = \hat{\mathbf{e}}_n \cdot \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^N \boldsymbol{\ell}_\alpha = \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{e}}_n \cdot \mathbf{L}) = 0,$$

sendo  $\mathbf{L} = \sum_{\alpha} \boldsymbol{\ell}_\alpha$  o *momentum* angular total do sistema.

Ou seja, se a Lagrangiana é invariante frente a uma rotação rígida do sistema de partículas, então o *momentum* angular total do sistema é conservado ao longo da direção do eixo de rotação.  $\square$

Lembrando do exemplo 1.19, a Lagrangiana de uma partícula submetida a uma força central é invariante a rotações em torno do eixo  $x_3$ . Por isso, a componente do *momentum* angular da partícula ao longo de  $x_3$  é conservada.

## CONSERVAÇÃO DA ENERGIA TOTAL

Por fim, será discutida a conservação da energia total do sistema. Neste caso, serão empregadas novamente as coordenadas e velocidades generalizadas, mas os vínculos serão considerados holônomos, para simplificar a discussão. Assim, a Lagrangiana do sistema será aqui um funcional do tipo

$$L = L \{q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t\}, \quad (n = 3N - m).$$

Neste caso, o seguinte teorema se aplica.

**Teorema 1.8.** *Dada a Lagrangiana  $L \{q, \dot{q}; t\}$  que descreve a dinâmica de um sistema movendo-se sob vínculos holônomos. Se  $L$  não depende explicitamente do tempo, i. e., se  $\partial L / \partial t = 0$ , então a função  $h(q, \dot{q}, t)$ , definida por*

$$h(q, \dot{q}, t) = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \{q, \dot{q}; t\}, \quad (1.70)$$

é uma constante de movimento.

*Demonstração.* Para demonstrar este teorema, basta realizar a derivada total de  $h$  em relação ao tempo:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \sum_{j=1}^n \left[ \ddot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \dot{q}_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] - \frac{dL}{dt} \\ &= \sum_{j=1}^n \left[ \ddot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \dot{q}_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] - \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] - \frac{\partial L}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.71)$$

ou seja,

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Portanto, se  $L$  não possui dependência temporal explícita, a função  $h$  é conservada.  $\square$

A função  $h(q, \dot{q}, t)$  é com frequência denominada *integral de Jacobi*. Em certos casos particulares, esta função é justamente a energia total do sistema. Para verificar quando isto é verdade, considera-se o caso restrito em que a função energia potencial não depende das velocidades. Então, a função  $h$  em (1.70) fica

$$h(q, \dot{q}, t) = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - (T - U). \quad (1.72)$$

Considera-se agora a energia cinética total do sistema. Como estão sendo empregadas coordenadas generalizadas, de acordo com a lei de transformação (1.41a) pode-se escrever

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}_\alpha = \dot{\mathbf{r}}_\alpha = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t}.$$

Desta forma, a energia cinética total do sistema fica

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha (\dot{\mathbf{r}}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{r}}_\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t} \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t} \right),$$

a qual pode ser escrita como

$$T(q, \dot{q}, t) = M_0(q, t) + \sum_{j=1}^n M_j(q, t) \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n M_{jk}(q, t) \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (1.73a)$$

sendo

$$M_0 \doteq \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial t} \quad M_j \doteq \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial t} \quad M_{jk} \doteq \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_k}. \quad (1.73b)$$

Será suposto agora que a definição e o teorema abaixo são aplicáveis à energia cinética.

**Definição 1.11 (Função homogênea).** Uma função  $F = F(x_1, \dots, x_m) : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$  é dita *homogênea de grau  $p$*  se existe o número  $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que

$$F(\lambda x_1, \dots, \lambda x_m) = \lambda^p F(x_1, \dots, x_m),$$

para qualquer  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ .

**Teorema 1.9 (Teorema de Euler das funções homogêneas).** Se  $F : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$  é uma função diferenciável e homogênea de grau  $p$ , então

$$\sum_{k=1}^m x_k \frac{\partial F}{\partial x_k} = pF. \quad (1.74)$$

De forma recíproca, se  $F$  satisfaz (1.74), então esta é uma função homogênea de grau  $p$ .

*Demonstração.* Assumindo que  $F$  é função homogênea de grau  $p$ , define-se  $u_1 = \lambda x_1$ ,  $u_2 = \lambda x_2$ ,  $\dots$ ,  $u_m = \lambda x_m$ . Então,

$$F(u_1, \dots, u_m) = \lambda^p F(x_1, \dots, x_m).$$

Derivando a expressão acima em relação a  $\lambda$ , resulta

$$\sum_{k=1}^m x_k \frac{\partial F}{\partial u_k} = p\lambda^{p-1} F.$$

Fazendo agora  $\lambda = 1$ , resulta (1.74):

$$\sum_{k=1}^m x_k \frac{\partial F}{\partial x_k} = pF.$$

A condição recíproca é demonstrada assumindo que  $F$  satisfaz (1.74). Seja então a função

$$g(\lambda) = \lambda^{-p} F(u_1, \dots, u_m).$$

Derivando  $g$  em relação a  $\lambda$ ,

$$g'(\lambda) = -p\lambda^{-p-1} F + \lambda^{-p} \sum_{k=1}^m x_k \frac{\partial F}{\partial u_k} = \lambda^{-p-1} \left( -pF + \sum_{k=1}^m u_k \frac{\partial F}{\partial u_k} \right) = 0,$$

devido a (1.74). Portanto,  $g(\lambda) = \text{constante}$ . Porém, de sua definição, necessariamente  $g(1) = F(x_1, \dots, x_m)$ , o que implica que  $g(\lambda) = g(1) = F(x_1, \dots, x_m)$ . Segue então que

$$\lambda^{-p} F(u_1, \dots, u_m) = \lambda^{-p} F(\lambda x_1, \dots, \lambda x_m) = F(x_1, \dots, x_m),$$

mostrando que  $F$  é homogênea de grau  $p$ . □

Agora, se as leis de transformação (1.41a) não dependerem explicitamente do tempo, i. e., se  $\partial \mathbf{r}_{\alpha} / \partial t = 0 \forall \alpha$ , então  $M_0 = M_j = 0$  e

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k.$$

Observando que os elementos de matriz são  $M_{jk} = M_{jk}(\mathbf{q})$ , verifica-se que a energia cinética é uma função homogênea de grau 2 nas velocidades generalizadas, pois

$$T(\lambda \dot{q}_1, \dots, \lambda \dot{q}_n) = \frac{\lambda^2}{2} \sum_{j,k=1}^n M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = \lambda^2 T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n).$$

Retornando então à função  $h$  em (1.72), de (1.74) observa-se que

$$\sum_{j=1}^n \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T,$$

e, portanto,

$$h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 2T - (T - U) = T + U = E.$$

Ou seja, se (i) a energia potencial não depender das velocidades generalizadas e (ii) a lei de transformação de coordenadas não depender explicitamente do tempo, então a função  $h$  é igual à energia mecânica total do sistema. Adicionalmente, se (iii) a função  $h$  não depender explicitamente do tempo ( $U$  não depende de  $t$ ), então a energia é uma constante de movimento do sistema, ou seja, é conservada.

Deve-se ressaltar que a condição para que  $h$  seja conservada é independente das condições para que  $h = E$ . Por conseguinte,  $h$  pode ser conservada sem ser a energia mecânica, ou  $h = E$ , sem que estas quantidades sejam conservadas. Em geral, se os vínculos dependem explicitamente do tempo, a energia total não é conservada. Isso porque as forças de vínculo podem realizar trabalho sobre o sistema de uma forma tal que mesmo quando a trajetória do sistema for fechada sob a ação dos vínculos, o trabalho total não se anula, como ocorre, por exemplo, com forças dissipativas ou motrizes.

Aproveitando o ensejo, suponha que existam forças dissipativas e/ou motrizes atuando no sistema. Neste caso, o teorema 1.8 não é mais válido. Ao invés do cancelamento que ocorre em (1.71), deve-se usar (1.51) para obter

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j Q'_j - \frac{\partial L}{\partial t},$$

lembrando que  $Q'_j$  é a força generalizada obtida justamente a partir das forças não potenciais.

O resultado recém obtido passará agora por uma série de particularizações.

1. Primeiro, se as condições (i) e (ii) acima forem também satisfeitas, então  $h = E$  e

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j Q'_j - \frac{\partial L}{\partial t}$$

mostra como a energia mecânica do sistema varia devido às ações tanto das forças não potenciais (dissipativas e/ou motrizes) quanto das forças potenciais com dependência explícita no tempo.

2. Se adicionalmente a condição (iii) for satisfeita, então o potencial não depende do tempo e daí

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j Q'_j.$$

O sinal de  $dE/dt$  depende somente da prevalência ou das forças dissipativas ( $dE/dt < 0$ ) ou das forças motrizes ( $dE/dt > 0$ ).

3. Retornando agora em algumas suposições, se as forças não potenciais forem somente dissipativas e essas dependerem apenas das velocidades das partículas,  $Q'_j$  pode ser expressa pela função dissipativa  $\mathcal{F}$  através de (1.53), quando então resulta

$$\frac{dh}{dt} = - \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial t}.$$

No caso particular em que  $\mathcal{F}$  é a função de Rayleigh (expressão 1.55), é fácil perceber que esta também é uma função homogênea de grau 2 nas velocidades generalizadas. Portanto, neste caso,

$$\frac{dh}{dt} = -2\mathcal{F} - \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Se as condições (i) e (ii) acima forem também satisfeitas, então  $h = E$  e

$$\frac{dE}{dt} = -2\mathcal{F} - \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Finalmente, se a energia potencial não depender do tempo,

$$\frac{dE}{dt} = -2\mathcal{F},$$

o que descreve a taxa de perda de energia do sistema.

A função  $h$  é semelhante à Hamiltoniana do sistema, porém não é exatamente esta. A formulação Hamiltoniana da mecânica clássica será discutida a partir do capítulo 2.