MECÂNICA CLÁSSICA

RUDI GAELZER (INSTITUTO DE FÍSICA - UFRGS)

Apostila preparada para a disciplina de Mecânica Clássica II, ministrada para os Cursos de Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre - RS.

Início: Fevereiro de 2014.

Impresso: 5 de outubro de 2023

Apostila escrita usando:
Processador de Documentos LyX
http://www.lyx.org/
http://wiki.lyx.org/LyX/LyX

SUMÁRIO

1 A Formulação Lagrangiana da Mecânica Clássica **1**

1.1 Revisão da mecânica Newtoniana . . . 1
1.1.1 Leis de Newton . . . 1
1.1.2 Teoremas de conservação . . . 2
1.1.2.1 Conservação do momentum linear . . . 3
1.1.2.2 Conservação do momentum angular . . . 4
1.1.2.3 Conservação de energia . . . 5
1.2 Introdução ao cálculo variacional . . . 7
1.2.1 Definições iniciais . . . 8
1.2.2 O problema básico do cálculo variacional . . . 10
1.2.3 A equação de Euler . . . 12
1.2.4 Diferenciação forte de funcionais . . . 15
1.2.5 Uma segunda forma para a equação de Euler . . . 18
1.2.6 Extensões ao problema básico do cálculo variacional . . . 19
1.2.6.1 Funcionais com diversas variáveis dependentes . . . 19
1.2.6.2 Funcionais dependendo de funções de diversas variáveis independentes . . . 21
1.2.6.3 Funcionais dependendo de derivadas de ordem superior . . . 21
1.2.6.4 Funcionais com condições de fronteira variáveis . . . 21
1.2.7 Equações de Euler com vínculos . . . 21
1.2.7.1 Vínculos algébricos entre as variáveis dependentes . . . 22
1.2.7.2 Equação de Euler com vínculo integral . . . 24
1.3 Vínculos na mecânica clássica . . . 27
1.3.1 Equações de vínculos . . . 27
1.3.2 Classificação dos vínculos . . . 28
1.4 O Princípio de Hamilton . . . 31
1.5 Coordenadas generalizadas . . . 34
1.6 Equações de Euler-Lagrange em coordenadas generalizadas . . . 37
1.7 Potenciais generalizados e forças dissipativas . . . 44
1.7.1 Forças e potenciais generalizados em vínculos holônomos . . . 44
1.7.2 Forças generalizadas dissipativas ou motrizes . . . 47
1.8 Formalismo lagrangiano com vínculos não holônomos . . . 49
1.8.1 Tratamento geral . . . 49
1.8.2 Sistemas holonômicos com multiplicadores de Lagrange . . . 52
1.8.3 Lagrangianas equivalentes . . . 53
1.8.4 Sistemas não holonômicos . . . 54
1.8.5 Forças de vínculo e forças generalizadas . . . 56
1.8.5.1 Vínculos não holônomos . . . 56
1.8.5.2 Vínculos holônomos . . . 57
1.9 Propriedades de simetria das equações de Euler-Lagrange e leis de conservação . . . 59
1.9.1 Invariância sob transformações de coordenadas . . . 59
1.9.2 Simetria e leis de conservação . . . 60
1.9.2.1 Constantes de movimento . . . 61
1.9.2.2 Translações e rotações virtuais . . . 61

1.9.2.3 Teoremas de conservação 62

2 A Formulação Hamiltoniana da Mecânica Clássica **69**
2.1 As equações canônicas de Hamilton 69
2.2 Simetrias e leis de conservação 74
2.2.1 Coordenadas cíclicas 74
2.2.2 Conservação dos *momenta* linear e angular totais 74
2.2.3 Conservação da Hamiltoniana e da energia total 74
2.3 Aplicações importantes do formalismo Hamiltoniano 79
2.3.1 Teorema do Virial 79
2.3.2 Teorema de Liouville 83

3 A Dinâmica dos Corpos Rígidos **89**
3.1 Referenciais para a dinâmica do corpo rígido 89
3.1.1 Rotações de eixos e transformações ortogonais 90
3.1.2 Propriedades da matriz de rotação 93
3.2 Cinemática dos corpos rígidos 96
3.2.1 Taxa de variação temporal de vetores dinâmicos 96
3.2.2 A matriz de rotações infinitesimais 97
3.2.3 A lei de transformação da taxa de variação temporal de um vetor e a velocidade angular 99
3.2.3.1 Vetores polares, axiais e a velocidade angular 100
3.2.3.2 A unicidade da velocidade angular 101
3.3 A dinâmica em referenciais não inerciais 103
3.4 Dinâmica de um corpo rígido. Equações fundamentais 104
3.4.1 O momentum angular de um corpo rígido e o seu tensor de inércia 104
3.4.2 Momentos e produtos de inércia 106
3.4.3 O tensor de inércia e sua lei de transformação 108
3.5 Energia cinética rotacional e o momento de inércia do corpo rígido 111
3.6 O teorema dos eixos paralelos 115
3.7 Diagonalização do tensor de inércia 117
3.8 A Lagrangiana de um corpo rígido 122
3.8.1 A energia cinética 122
3.8.2 A Energia potencial 124
3.8.3 A condição de rolamento 125
3.9 Os ângulos de Euler 130
3.9.1 Velocidade angular em termos dos ângulos de Euler 132
3.9.2 Integrabilidade da velocidade angular 134
3.10 O pião simétrico com um ponto fixo 134
3.11 Equações de Euler para um corpo rígido 140
3.11.1 Movimento livre de um pião simétrico 142
3.11.2 A construção de Poinsot 143
3.11.3 Estabilidade das rotações livres 145
3.12 Dinâmica de corpos rígidos sem pontos fixos 148
3.12.1 Precessões e oscilações do eixo de rotação da Terra 148
3.12.1.1 Precessão do eixo rotacional 149
3.12.1.2 A oscilação de Chandler 152
3.12.1.3 Determinação do terceiro momento principal de inércia 153
3.12.2 Esferas rolando sobre superfícies 154
3.12.3 O disco de Euler 156

4 Oscilações Acopladas **161**
4.1 Oscilações de pequena amplitude em sistemas com um grau de liberdade 161
4.1.1 Configurações de equilíbrio e critério de estabilidade 161
4.1.2 Oscilações de pequena amplitude em torno do ponto de equilíbrio 162
4.2 Oscilações em sistemas com vários graus de liberdade 164
4.3 Oscilações acopladas de pequena amplitude 166
4.3.1 Oscilações acopladas: modos normais de vibração 168
4.3.2 Coordenadas normais 172
4.4 Oscilações longitudinais em uma rede periódica unidimensional 175

4.5 Oscilações arbitrárias de pequena amplitude: a corda carregada . . . 184
4.6 A corda contínua: introdução a uma teoria de campos clássicos . . . 189
4.6.1 A densidade Lagrangiana . . . 189
4.6.2 A integral de ação e a equação do campo . . . 190
4.6.3 A equação da onda para uma corda homogênea . . . 191
4.6.4 Generalizações para uma teoria de campos clássicos . . . 191
4.7 Soluções da equação da onda para a corda homogênea . . . 193
4.7.1 Método de Fourier . . . 193
4.7.2 Solução geral: método de Cauchy . . . 195
4.8 Movimento forçado ou amortecido da corda homogênea . . . 196
4.9 Equação da onda em meios dispersivos . . . 200
4.9.1 Meio não dispersivo; método das transformadas integrais . . . 200
4.9.2 Ondas estacionárias a partir da solução geral . . . 204
4.9.3 Exemplos de meios dispersivos . . . 205
4.9.4 Propagação de um pulso em um meio dispersivo . . . 208
4.9.5 A velocidade de grupo em um meio dispersivo . . . 210
4.10 Equação da onda em meios não uniformes . . . 212
4.10.1 Tratamento geral . . . 213
4.10.2 Reflexão e transmissão na interface entre meios distintos . . . 214

Referências Bibliográficas **216**