SCIENTIA V.12Nº1 (2001) 35-48

TRANSFORMAÇÕES DE SIMETRIAS EXTERNAS–INTERNAS ACOPLADAS E SUA IMPLICAÇÃO NA ELETRODINÂMICA DE CAMPOS VETORIAIS FRACOS MÉDIOS

Bardo E. J. Bodmann[1], Fernando Haas[2] e João Goedert[1]

[1]Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Universidade do Vale do Rio dos Sinos – UNISINOS
Av. Unisinos, 950, 93022-000 São Leopoldo, RS
{bardo,goedert}@exatas.unisinos.br
[2]Laboratório Nacional de Computaçcão Científica – NLCC
Av. Getúlio Vargas, 333, 25651-07 Petrópolis, RJ
ferhaas@lncc.br

ABSTRACT

The combined external–internal symmetry of the Maxwell Lagrangian density for the classical electromagnetic field is studied by considering a generalized infinitesimal coordinate transformation that combines gauge and geometric degrees of freedom. A generalized metric equation depending on the electromagnetic vector field is derived by interpreting a symmetry constraint derived from Noether's theorem in terms of a Ricci curvature description. The resulting equation is solved in the "harmonic gauge" in the static spherically symmetric limit, and, the Coulomb potential is recovered by substituting the vector field in the Liénard-Wiechert vector potential by the mean field approximants.

KEYWORDS: External Symmetry, Internal Symmetry, Maxwell

RESUMO

A simetria interna-externa combinada da densidade Lagrangiana de Maxwell para o campo eletromagnético clássico é investigada considerando-se uma transformação infinitesimal generalizada de coordenadas, que acopla os graus de liberdades de calibre com os geométricos. Uma equação generalizada para a métrica dependente do campo vetorial eletromagnético é derivada a partir de vínculos de simetria, na forma de uma curvatura de Ricci, que, por sua vez, é determinada via o teorema de Noether. No caso de simetria esférica, a equação resultante é resolvida no "calibre harmônico", no limite estacionário. O potencial de Coulomb é obtido substituindo-se o campo vetorial no potencial central de Liénard-Wiechert dentro da aproximação de campos médios.

PALAVRAS CHAVE Simetria Externa, Simetria Interna, Teoria de Maxwell.

1 Introdução

Simetrias desempenham papel fundamental na descrição de sistemas físico, sejam eles clássicos ou quânticos. Isto é devido ao fato que elas se correlacionam diretamente com as leis de conservação inerentes ao sistema. Esta propriedade básica transforma as simetrias em verdadeiros esquemas universais de classificação da dinâmica (Connes (1994))-(Zin-Justin (1993)). Um dos sucessos mais bem estabelecidos da análise de simetrias manifesta-se na conexão entre a simetria local conservada e a estrutura dinâmica do sistema definido através de sua densidade Lagrangiana [illegible] exemplo, as referências (Gross (1993))-(Weinberg (1996)). Esta correlação é constatada tanto em sistemas de origem clássica

quanto quântica.

Uma série de estudos importantes (veja as referências (Applequist et al. (1987))-(Witten (1995))) considera sistemas com combinações de simetrias simultâneas de origem tanto puramente externas, como internas ou mistas. No caso ideal, a gravitação que representa a geometria do espaço-tempo e as teorias de calibre deveriam surgir de uma teoria de campos unificados que consequentemente se constituiria numa teoria de hierarquia mais alta. Este desafio ainda não resolvido, tem sido motivação para a elaboração de teorias no espírito dos estudos pioneiros de Kaluza e Klein (Kaku (1993)). Na presente abordagem, diferentemente da abordagem de Kaluza e Klein, ao invés de embutir a teoria de Maxwell na teoria de Einstein em forma covariante e penta-dimensional, toma-se como ponto de partida um espaço-tempo quadri-dimensional. Desta maneira evita-se a questão problemática de como manusear e interpretar a quinta dimensão. Conforme apresentado neste trabalho, um efeito semelhante – a contribuição dos campos vetoriais à métrica – é obtido sem a necessidade de recurso a qualquer dimensão adicional. Para manter este desafio em um nível tratável, estuda-se um sistema que contêm apenas o campo vetorial eletromagnético, na forma de um campo clássico no espaço-tempo. O objetivo principal deste estudo é a obtenção de uma justificativa baseada puramente em considerações de simetria, para a obtenção de uma equação constitutiva para a métrica a qual será definida em termos do campo eletromagnético vetorial. Este resultado, pode trazer indicações de como o "espaço de calibre", manifestado no campo vetorial pela sua simetria de calibre interna, pode ser associado ao espaço geométrico. Como resultado específico, o potencial de Coulomb é obtido a partir da solução da equação constitutiva da métrica, no limite de campos fracos médios.

[illegible] variáveis espaciais e de campos [illegible] na literatura (Obukov & Hehl (1999)). Entretanto [illegible] alternativa proposta por Obukov e Hehl refere-se [illegible] elétricas e magnéticas da matéria e, desta for- [illegible] da presente abordagem, que se aplica [illegible] derivada a partir de considerações de simetrias tão somente.

2 A Correspondência Transformacional

Para obter uma conexão entre as simetrias internas e externas, considera-se uma transformação infinitesimal generalizada de coordenadas onde os geradores, tanto das transformações de coordenadas de campos (externas) como das de calibre (internas), dependem simultaneamente das coordenadas e dos campos. Portanto, define-se uma transformação generalizada, geométrica e de calibre,

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \lambda^\mu_\nu(A,x)\varepsilon^\nu , \quad (1)$$

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \Lambda^\mu_\nu(A,x)\varepsilon^\nu , \quad (2)$$

que nos limites $(\lambda(A,x),\Lambda(A,x)) \rightarrow (\lambda(x),0)$, $\lambda(A,x) \rightarrow 0$ ou $(\lambda(A,x),\Lambda(A,x)) \rightarrow (\lambda(x),\Lambda(A,x))$ deve recuperar tanto as transformações convencionais de coordenadas, como as de calibre ou o conjunto das duas simultaneamente, como se mostra na referência (Gross (1993)). Note-se que Λ e λ são independentes das derivadas dos campos.

Como a densidade Maxwelliana para o vácuo depende apenas das divergências dos campos, o teorema de Noether implica, no caso de simetria, em

$$\delta S = \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \partial_\mu \left(\Lambda_{\nu\alpha} - \partial_\beta A_\nu \lambda^\beta_\alpha \right) + \mathcal{L}(\partial_\mu \lambda^\mu_\alpha + \frac{\partial \lambda^\mu_\alpha}{\partial A_\nu} \partial_\mu A_\nu) \right\} \varepsilon^\alpha \, d^4x = 0 . \quad (3)$$

Integrando por partes e utilizando as equações de Maxwell para o vácuo, obtém-se

$$\oint \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \left(\Lambda_{\nu\alpha} - \partial_\beta A_\nu \lambda^\beta_\alpha \right) + \mathcal{L}(\lambda^\mu_\alpha + \frac{\partial \lambda^\mu_\alpha}{\partial A_\nu} A_\nu) \varepsilon^\alpha \, dS_\mu = 0 . \right\} \quad (4)$$

onde S_μ representa uma hiper-superfície orientada que constitui o contorno do hiper-volume de integração. O termo entre chaves pode diferir de zero apenas por uma densidade tensorial de ordem dois G^μ_β, cuja integral de superfície se anula

$$\oint G^\mu_\beta \, \lambda^\beta_\alpha \, \varepsilon^\alpha \, dS_\mu = 0 . \quad (5)$$

Ao inserir a densidade Lagrangiana na condição de simetria (5) e usando o fato de que termos em potências distintas de $\partial_\mu A_\nu$ devem se anular, fornece as condições necessárias e suficientes para a simetria. Para os termos lineares em $\partial_\mu A_\nu$ o resultado é

$$\Lambda_{\mu\alpha} + \frac{1}{2}(\partial_\kappa A_\mu - \partial_\mu A_\kappa) A_\nu \frac{\partial \lambda^\kappa_\alpha}{\partial A_\nu} = 0 , \quad (6)$$

que determina a conexão entre os geradores das transformações de espaço-tempo e o potencial vetorial eletromagnético. Dado que a equação (6) tem validade em todo o domínio da integração, seu lado direito deve se anular. Para os termos quadráticos em $\partial_\mu A_\nu$ obtém-se uma forma explícita para a densidade tensorial (5) que depende apenas de termos na divergências dos campos,

$$(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)\partial_\beta A_\nu \lambda^\beta_\alpha - \frac{1}{2}(\partial^\gamma A^\nu - \partial^\nu A^\gamma)\partial_\gamma A_\nu \lambda^\mu_\alpha = {}_aG^\mu_\beta \lambda^\beta_\alpha . \quad (7)$$

O subíndice "a", à esquerda, indica que ${}_aG^\mu_\beta$ é uma forma não [illegible]. Identifica-se $(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)\partial_\beta A_\nu = {}_aR^\mu_\beta$ com uma [illegible] tensorial semelhante à de Ricci e reescreve-se a segunda [illegible] de simetria como uma equação equivalente à de Einstein. [illegible], a densidade tensorial similar à de Ricci passa [illegible] das divergências do campo vetorial que por sua vez [illegible] coordenadas espaciais e temporal. Adicionalmente, [illegible] o papel de uma densidade tensorial de Einstein [illegible]

$$\left({}_aR^\mu_\beta - \frac{1}{2} {}_aR \delta^\mu_\beta \right) \lambda^\beta_\alpha = {}_aG^\mu_\beta \lambda^\beta_\alpha . \quad (8)$$

A comparação deste resultado com as equações de Einstein sugere que o termo adicional λ^{β}_{α}, que manifesta o caráter de densidade tensorial da expressão tipo Ricci, permite estabelecer uma conexão entre o espaço-tempo e o campo vetorial eletromagnético A^{μ}. A origem desta conexão pode ser atribuída ao fato que para se ter curvatura as equações relevantes precisam apenas depender de informação local. A gravitação Einsteiniana porém, em virtude do princípio de equivalência, é uma teoria global e implica que efeitos locais de gravidade sempre possam ser "eliminados" por transformações (Finkelstein (1997)) adequadas. De fato ${}_{a}R$ e ${}_{a}R^{\nu}_{\mu}$ têm dimensão de densidade, fato este que exprime localidade e, portanto, representam o escalar densidade de curvatura e o tensor densidade de curvatura com peso $w = -1$.

A densidade tensorial tipo Ricci obtida acima, não está simetrizada como deveria ser. Pode-se transformar esta expressão noutra simétrica sob troca de índices, somando-lhe um termo $\partial_{\lambda} f^{\lambda\mu\nu}$, onde $f^{\lambda\mu\nu}$ é arbitrario, antisimétrico e satisfaz condição adicional (Ryder (1986)) $\partial_{\mu}\partial_{\lambda} f^{\lambda\mu\nu} = 0$. A densidade tensorial tipo Ricci é então

$$
\begin{aligned}
{}_{s}R^{\mu\nu} &= {}_{a}R^{\mu\nu} + \partial_{\lambda} f^{\lambda\mu\nu} && (9)\\
{}_{s}R &= {}_{a}R^{\mu}_{\mu} + \partial_{\lambda} f^{\lambda\mu}_{\mu} = {}_{a}R^{\mu}_{\mu} && (10)
\end{aligned}
$$

o que não altera a curvatura original. Desta expressão se calcula imediatamente

$$
\begin{aligned}
\partial_{\lambda} f^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\{&(\partial^{\nu} A^{\kappa} - \partial^{\kappa} A^{\nu})\partial^{\mu} A_{\kappa} \\
&-(\partial^{\mu} A^{\kappa} - \partial^{\kappa} A^{\mu})\partial^{\nu} A_{\kappa}\} \,, \qquad (11)
\end{aligned}
$$

bem como a densidade tensorial de curvatura devidamente simetrizada

$$
\begin{aligned}
{}_{s}R^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Big\{&(\partial^{\nu} A^{\lambda} - \partial^{\lambda} A^{\nu})\partial^{\mu} A_{\lambda} \\
&+(\partial^{\mu} A^{\lambda} - \partial^{\lambda} A^{\mu})\partial^{\nu} A_{\lambda}\Big\} \,. \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Por se tratarem, estas expressões, de densidades, a conexão [illegible] escalar de curvatura e o tensor Ricci pode ser construída [illegible]

de uma integral dupla, com elementos (invariantes) de linha contraídos nos seus índices. Isto é o tópico de seção que se segue.

3 Conexão da métrica com o campo vetorial electromagnético

Utilizando o tensor Ricci e o escalar de curvatura para curvatura infinitesimal definido em termos da métrica,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\partial_{\lambda} g^{\lambda}_{\nu} + \partial_{\nu}\partial_{\lambda} g^{\lambda}_{\mu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu} g^{\lambda}_{\lambda} - \partial^{\lambda}\partial_{\lambda} g_{\mu\nu}) \,, && (13)\\
\mathcal{R} &= \partial^{\mu}\partial_{\nu} g^{\nu}_{\mu} - \partial_{\nu}\partial^{\nu} g^{\mu}_{\mu} \,, && (14)
\end{aligned}
$$

determina-se a conexão entre as equações (13), (14) e (12) a qual possibilita a obtenção de uma equação para a métrica generalizada, que, juntamente com a dependência das coordenadas, inclui o campo vetorial eletromagnético. Note-se que é suficiente considerar o caso de curvatura fraca, desde que a comparação seja implementada utilizando termos semelhantes com origem nas transformações infinitesimal (seção 2). A equação para a densidade de curvatura pode ser convertida numa equação para a curvatura, mediante uma integração dupla sobre sua forma simetrizada (8). Note-se que o tensor de curvatura em unidades naturais tem a dimensão [illegible] e que, portanto, a integração dupla com elementos de linhas contraídos, converte a equação para a densidade de curvatura em uma equação para a curvatura propriamente dita. [illegible] fornece, para a equação para o tensor de Eins-

$$
[illegible] = \iint \left\{ {}_{s}R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\, {}_{s}R \right\} dx^{\kappa} dx_{\kappa} \,. \qquad (15)
$$

[illegible] constitutiva para a métrica pode ser obtida por [illegible] equação integro-diferencial (15) em uma forma [illegible] fato de se tratar aqui de curvatura infinite-[illegible] resulta que

$$
[illegible] \partial_{\lambda}\partial^{\lambda} g^{\mu\nu} \Big\} \, d^4x d^4x
$$

$$= \oint\oint g^{\nu\lambda} dS^{\mu} dS_{\lambda} + \oint\oint g^{\mu\lambda} dS^{\nu} dS_{\lambda} - \oint\oint g^{\lambda}_{\lambda} dS^{\mu} dS^{\nu} \,, \quad (16)$$

onde o último termo do lado esquerdo desaparece em virtude da limitação imposta pelo cone de luz. Um procedimento análogo para o campo vetorial eletromagnético fornece

$$\begin{aligned} &\iiiint \Big\{ (\partial^{\nu} A^{\lambda} - \partial^{\lambda} A^{\nu}) \partial^{\mu} A_{\lambda} + \\ &\quad + (\partial^{\mu} A^{\lambda} - \partial^{\lambda} A^{\mu}) \partial^{\nu} A_{\lambda} \Big\} dx^{\kappa} dx_{\kappa} d^4x d^4x \\ &= \oint\oint\iint A^{\lambda} A_{\lambda} dx^{\kappa} dx_{\kappa} dS^{\mu} dS^{\nu} - \oint\oint\iint A^{\nu} A^{\lambda} dx^{\kappa} dx_{\kappa} dS^{\mu} dS_{\lambda} \\ &- \oint\oint\iint A^{\mu} A^{\lambda} \, dx^{\kappa} dx_{\kappa} \, dS^{\nu} dS_{\lambda} \,. \end{aligned} \quad (17)$$

Comparando, nesta altura, termos com integração sobre correspondentes hiper-superfícies orientadas, resulta que

$$g^{\mu\nu} + \iint A^{\mu} A^{\nu} \, dx^{\kappa} dx_{\kappa} = \Xi^{\mu\nu} \,, \quad (18)$$

onde $\Xi^{\mu\nu}$ é um tensor arbitrário de ordem dois cuja integral de superfície se anula,

$$\oint\oint \Xi^{\mu\lambda} \, dS^{\nu} dS_{\lambda} = \oint\oint \Xi^{\lambda}_{\lambda} \, dS^{\mu} dS^{\nu} = 0 \,. \quad (19)$$

Na ausência de campos, a integral (18) deve se anular e $\Xi^{\mu\nu}$ deve recuperar a métrica de Minkowski. Então, de forma exata no limite de campos nulos e de forma aproximada no limite de campos fracos, devemos ter $\Xi^{\mu\nu} \to \eta^{\mu\nu}$. Consequentemente a equação (18) representa o vínculo causal sobre as soluções possíveis de A_{μ}.

4 Aproximação para campos fracos médios

No limite de campos fracos, a métrica pode ser considerada linearmente dependente dos termos de campos. Isto sugere uma aproximação da equação (18) em termos da métrica de Minkowski, com

um termo de correção $h^{\mu\nu}$, que tem sua origem no termo integral

$$|h^{\mu\nu}| = \left| \iint A^{\mu} A^{\nu} \, dx_{\kappa} dx^{\kappa} \right| << 1 \,. \quad (20)$$

Portanto, numa aproximação de primeira ordem, o tensor de Ricci pode ser escrito (Damiański (1985)) como

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{(weak)}_{\mu\nu} &\approx \partial_{\nu} \Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \left(\partial^{\lambda} \partial_{\lambda} h_{\mu\nu} - \partial_{\lambda} \partial_{\mu} h^{\lambda}_{\nu} - \partial_{\lambda} \partial_{\nu} h^{\lambda}_{\mu} + \partial_{\mu} \partial_{\nu} h^{\lambda}_{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

com

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left\{ \partial_{\mu} h_{\rho\nu} + \partial_{\nu} h_{\rho\mu} - \partial_{\rho} h_{\mu\nu} \right\} + \mathcal{O}^2(h) \,, \quad (22)$$

onde $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ é o símbolo de Christoffel. Tomando a divergência do tensor de Ricci e utilizando o fato de que a divergência do tensor de Einstein é nula, resulta em

$$\partial_{\mu} \mathcal{R}^{\mu(weak)}_{\nu} = \frac{1}{2} \partial_{\nu} \left(\partial^{\kappa} \partial_{\kappa} h^{\lambda}_{\lambda} - \partial_{\lambda} \partial_{\nu} h^{\lambda\nu} \right) = \frac{1}{2} \partial_{\nu} \mathcal{R}^{\mu(weak)}_{\mu} \,. \quad (23)$$

Uma vez que a equação (21) preserva a liberdade de calibre, pode-se escolher convenientemente o calibre que vincula a métrica impondo que a mesma obedeça a composição harmônica (Nakahara (1990); Steffani (1990)), daqui por diante denominada "calibre harmônico",

$$g^{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0 \,, \quad (24)$$

o que reduz a equação (21) a

$$\partial_{\mu} h^{\mu}_{\nu} = \frac{1}{2} \partial_{\nu} h^{\mu}_{\mu} \,. \quad (25)$$

As equações de campos não homogêneas, com $\Psi_{\mu\nu}$ denominado o tensor fonte de Ricci no calibre harmônico, se tornam agora

$$\partial_{\lambda} \partial^{\lambda} h_{\mu\nu} = -2\Psi_{\mu\nu} \,. \quad (26)$$

Seguindo o procedimento padrão (Steffani (1990)), para resolver a equação de onda em termos da função de Green retardada obtém-se

$$h_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\Psi_{\mu\nu}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \,. \quad (27)$$

Substituindo explicitamente $h^{\mu\nu}$ pela integral dos campos fracos,

$$\iint A^{\mu}A^{\nu}\, dx^{\kappa}dx_{\kappa} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\Psi^{\mu\nu}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x' \,, \tag{28}$$

e aproximando, adicionalmente, o campo vetorial eletromagnético por seu valor médio $\bar{A}^{\mu}$ torna-se a equação auto consistente

$$\bar{A}^{\mu} = \frac{1}{2\pi\tau^2}\frac{\bar{A}_{\nu}}{\bar{A}^{\lambda}\bar{A}_{\lambda}}\int \frac{\Psi^{\mu\nu}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x' \,, \tag{29}$$

onde τ^2 é o elemento de linha invariante.

Da equação (29) obtém-se imediatamente

$$\eta^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi\tau^2}\frac{1}{\bar{A}^{\lambda}\bar{A}_{\lambda}}\int \frac{\Psi^{\mu\nu}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x' \,, \tag{30}$$

onde foi utilizado o limite de campos fracos, $g^{\mu\nu} \to \eta^{\mu\nu}$. Com o objetivo de determinar que tipo de soluções podem ser obtidas para o propagador, pode-se resolver a equação no caso estacionário com simetria esférica. Retendo-se apenas a componente zero conclui-se que o campo vetorial eletromagnético se reduz ao termo de Coulomb sendo que, neste limite, a equação define um potencial central tipo Liénard–Wiechert (Marion (1995)) para $t = 0$,

$$1 = \frac{1}{\tau^2}\frac{(4\pi)^2\rho^2}{q^2}\int 2\Psi^{00}r'dr' \,. \tag{31}$$

Ψ^{00} pode ainda ser simplificado, utilizando o propagador livre de interação $q\Phi\delta(r-r')$, onde Φ é uma função de r. Para $\tau^2 = 4\pi\rho^2$, o resultado é o potencial de Coulomb

$$2\Phi = \frac{\tau^2}{4\pi\rho^2}\times\frac{q}{4\pi r} \,. \tag{32}$$

É interessante notar que o elemento de linha invariante está [illegible]tado à fonte da interação eletromagnética. Devido ao fato de terem sido utilizados campos médios e portanto, de terem sido [illegible]zadas as flutuações, é improvável que se obtenha uma [illegible] mais abrangente, pelo menos no contexto atual, o clássico [illegible]

5 Conclusão

A conexão de uma simetria conservada localmente com a estrutura dinâmica associada a um sistema clássico de Maxwell foi estendida mediante uma abordagem combinada de calibre–geométrica, onde os geradores das transformações para as coordenadas e o campo vetorial podem depender tanto das coordenadas como do campo vetorial. Uma equação constitutiva para a métrica, que fornece a conexão entre o espaço interno de calibre e o espaço externo geométrico, foi derivada sistematicamente, em termos do campo vetorial eletromagnético. Através da aplicação do teorema de Noether, uma equação equivalente à equação de Einstein foi identificada envolvendo densidades, a densidade escalar de curvatura e a densidade de curvatura de Ricci, as quais descrevem a curvatura local em termos do campo vetorial eletromagnético. Para o espaço de coordenadas puramente, as curvaturas podem ser eliminadas através de uma transformação adequada que respeita o princípio de equivalência de Einstein. No presente caso porém, [illegible] uma densidade de curvatura, isto é uma manifestação explícita de curvatura local.

Ao integrar a densidade de Einstein ao longo de um elemento de linha contraído nos seus índices e comparar o escalar de curvatura e o tensor Ricci com o termo integral correspondente do campo vetorial, é estabelecida uma equivalência entre a métrica e [illegible] bilinear do campo vetorial. Na ausência de campos ou, [illegible] no limite de campos fracos, o termo integral [illegible], recuperando, desta forma a métrica de Minkowski. [illegible] fracos, a métrica, numa aproximação razoável, é in[illegible] das contribuições dos campos e portanto não leva a [illegible] com a teoria eletromagnética convencional. [illegible] campos fortes porém, a densidade de curvatura lo[illegible] consequência das contribuições dos campos [illegible] a métrica reflete propriedades de causalidade, [illegible] sobre as soluções para o campo veto[illegible]. Uma solução explícita foi construída para o [illegible] simétrico, no limite de campos [illegible] harmônico[1], isto é, no calibre onde a conexão afim contraída pela métrica se anula. Este procedimento recupera o potencial de Coulomb da função de Green retardada. Isto demonstra ser possível derivar o potencial de Coulomb a partir de uma equação para densidade tipo Einstein, no limite de campos fracos médios, da mesma forma como o potencial de Newton pode ser derivado puramente da geometria do espaço tempo. Estas considerações nos remetem à questão sobre qual deve ser o efeito de quantização na métrica nas abordagens quânticas e, alternativamente, sobre qual deve ser, nestes casos, a resposta da gravitação.

Agradecimentos

Agradecemos ao Instituto de Física da UFRGS pelo livre acesso à sua biblioteca e rede de computadores. Um dos autores (F. H.) agradece a hospitalidade do *Laboratoire de Physique des Milieux Ionisés* onde parte deste trabalho foi realizado e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

Referências

A. Connes, Non-commutative Geometry, Academic Press Inc., 539 (1994).

R. Haag, Local Quantum Physics, Springer Verlag, [illegible] (1996).

S. J. Joshua, Symmetry Principles and Magnetic Symmetry in Solid State Physics, Adam Hilger (1991).

E. Leader & E. Predazzi, An Introduction to Gauge Theories and Modern Particle Physics, Cambridge Univ. Press, 23 (1996).

W. Ludwig & C. Falter, Symmetries in Physics, Springer Verlag., 350 (1996).

R. E. Marshak, Conceptual Foundations of Modern Particle Physics, World Scientific, 91 & 199 (1993).

J. Zinn-Justin, Quantum Field Theory and Critical Phenomena, Clarendon Press, 356 & 431 & 470 (1993).

F. Gross, Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory, John Wiley & Sons Inc., 206 & 415 (1993).

M. Kaku, Quantum Field Theory, Oxford Univ. Press, 33 & 633 (1993).

S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields Vol. I, Cambridge Univ. Press, 339 (1995).

S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields Vol. II, Cambridge Univ. Press, 1 (1996).

T. Applequist et al., Modern Kaluza-Klein Theories, Addison Wesley (1987).

F. Haas, B. E. J. Bodmann, J. Goedert, Scientia **11,1**, 63 (1999).

G. Veneziano, in The Geometric Universe, ed S.A. Hugget et al.,Oxford Univ. Press, 235-243 (1998).

E. Witten, Nucl. Phys. **B 443**, 85-126 (1995).

Y. N. Obukhov & F. W. Hehl, Phys. Lett. **B 458,4**, 466 (1999).

H. Friedrich, in The Geometric Universe, ed. S. A. Hugget et al., Oxford Univ. Press, 81 (1998).

[illegible], Quantum Relativity, Springer Verlag., [illegible]

[illegible] Quantum Field Theory, Cambridge Univ. Press, [illegible]

[illegible] Relativistic Astrophysics, Pergamon Press, [illegible]

[illegible] Topology and Physics, Institute of [illegible]

H. Steffani, General Relativity, Cambridge Univ. Press, 114 (1990).

H. Marion, Classical Electromagnetic radiation, Saunders College Publishing, 257 (1995).

SCIENTIA V.12Nº1 (2001) 49-61

UM MODELO FRACTAL PARA A GERAÇÃO DE SONS PULMONARES DE ALTA FREQÜÊNCIA

B.E.J. Bodmann, A.L. Cechin e L.P.L. de Oliveira

Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Universidade do Vale do Rio dos Sinos – UNISINOS
Av. Unisinos 950, 93022-000 São Leopoldo, RS
bardo,cechin,luna@exatas.unisinos.br

ABSTRACT

In this paper, we propose a model for the high frequency lung sound generation based on the bronquial tree fractal properties. The model results from a simple discrete formalism adopted inspired/expirated air, is in accordance with the spectral properties usually observed in normal lung sounds.

RESUMO

[illegible] propomos um modelo para o processo de geração [illegible] de alta freqüência baseado nas proprieda- [illegible] árvore brônquica. O modelo resulta da adoção [illegible] formalismo discreto para o ar inspirado/expirado, [illegible] com as propriedades espectrais usualmente [illegible] pulmonares normais.

[illegible] CHAVE: Fractais, Sons pulmonares e Árvore brôn-