MOVIMENTO NÃO RELATIVÍSTICO DE PARTÍCULA CARREGADA EM CAMPO MAGNÉTICO VARIÁVEL NO TEMPO – SOLUÇÕES EXATAS

Fernando Haas
Joo Goedert

Resumo

É considerada a equação de movimento não relativística para uma partcula carregada sob ação de campo magnético variável no tempo. A solução exata do problema é obtida por intermédio de uma constante de movimento associada, o invariante de Lewis-Ermakov. Esta solução exata é analizada em detalhe em um caso no qual o campo magnético decresce no tempo.

Abstract

We analyze the non-relativistic equation of motion for a charged particle under a time-dependent magnetic field. The exact solution for the problem is obtained by use of a constant of motion, the Lewis-Ermakov invariant. The exact solution is considered in detail in the case where the magnetic field decrease in time.

1 Introdução

A análise do movimento de partículas carregadas sob ação de campos eletromagnéticos é de importância numa variedade de circunstâncias. Uma lista completa de situações físicas nas quais o movimento de partículas carregadas tem algum papel seria realmente muito longa. Basta, entretanto, o problema da fusão termonuclear controlada para evidenciar a relevância do estudo do movimento de partículas carregadas sob diferentes tipos de campos eletromagnéticos.

Neste trabalho, consideramos o movimento não relativístico de uma partícula carregada sob a ação de um campo magnético externo do tipo

$$\mathbf{B} = B(t)\hat{z}\,, \tag{1}$$

sendo $B(t)$ uma função do tempo com forma arbitrária e $\hat{z}$ um vetor unitário numa dada direção fixa. Para nossos propósitos, esta direção será o eixo z num sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z). O campo magnético (1) é um campo uniforme espacialmente e com direção fixa, porém de intensidade variável ao longo do tempo. Um solenóide longo pelo qual passa uma corrente variável produz campos do tipo (1). Além disso, a classe de campos magnéticos considerada encontra aplicação em aceleradores de partículas do tipo cíclotron.

Uma partícula carregada, sob um campo magnético do tipo (1) com $B(t)$ constante no tempo, executa órbitas helicoidais. Isto é, o movimento se decompõe numa translação simples na direção do campo magnético e num movimento circular em torno das linhas de campo, com a chamada freqüência de cíclotron [16]. Para campos magnéticos dependentes do tempo, entretanto, os tipos de movimento que podem ocorrer são bem mais variados. Uma conseqüência do caráter não estático do campo $\mathbf{B}$ é o aparecimento de um campo elétrico induzido, de acordo com a lei de Faraday. Este campo elétrico induzido traz dificuldades extras à resolução das equações de movimento. Normalmente, os livros-texto limitam-se a um tratamento aproximado das equações de movimento, para os casos em que o campo magnético é lentamente variável [2, 3, 16, 18, 19]. Nosso objetivo aqui é apresentar a solução exata para as equações de movimento, o que é conseguido através da determinação de uma constante de movimento pertinente ao problema. Esta constante de movimento, o invariante de Lewis-Ermakov [8, 22], tem importância não apenas no movimento de partículas carregadas, mas também em várias outras áreas, como cosmologia, hidrodinâmica e ótica [13]. O presente trabalho, portanto, é de utilidade para ilustrar, com um exemplo simples, o surgimento do invariante de Lewis-Ermakov num contexto físico de interesse aplicado. Para a derivação do invariante de Ermakov-Lewis, será utilizada a técnica de reescalonamento das variáveis dinâmicas e do tempo [4, 9, 27], a ser descrita adiante. A solução exata obtida é dada em termos de uma solução particular para a equação de Pinney [28], a qual surge de modo natural em nosso tratamento. Equações de Pinney aparecem numa série de problemas físicos com dependência temporal explícita [8, 20, 22].

Sumarizando, o presente trabalho tem por objetivo ilustrar o uso de várias técnicas de resolução exata das equações de movimento para sistemas físicos explicitamente dependentes do tempo. Para tanto, é considerado um sistema físico frequentemente analizado apenas de modo aproximado em sala de aula, constituído por uma partícula carregada sob ação de um campo magnético dependente do tempo. Aqui, entretanto, não é feita nenhuma hipótese sobre a natureza da variação temporal do campo magnético. Na seção 5, para efeito de exemplificação, a teoria é aplicada a um caso particular de campo magnético decrescente no tempo.

O artigo organiza-se como segue. Na seção 2, é escrita a equação de Lorentz não relativística para o movimento de uma partícula carregada sob ação de um campo magnético dependente do tempo e do campo elétrico induzido associado. Na seção 3, é derivado o invariante de Lewis-Ermakov correspondente. Na seção 4, é utilizado o invariante de Ermakov-Lewis para obter a solução exata do problema, em termos de uma solução particular da equação de Pinney. Na seção 5, a dinâmica é descrita com detalhes no caso de um campo magnético de intensidade decrescente. A seção 6 dedica-se as conclusões.

2 Equações básicas

O movimento de uma partícula carregada, que tomaremos como sendo um elétron, na presença de um campo eletromagnético externo é descrito, no regime de baixas velocidades considerado aqui, pela equação de Lorentz não relativística,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e\mathbf{E} - e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}\,, \tag{2}$$

onde $\mathbf{r} = (x, y, z)$ é o vetor posição, $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ é o campo elétrico, $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ é o campo magnético, $-e$ é a carga e m é a massa do elétron. Além disso, na equação (2) e ao longo deste artigo, o ponto representa derivada temporal. No presente caso, o campo magnético é especificado, de acordo com (1), por

$$B_1 = 0\,, \qquad B_2 = 0\,, \qquad B_3 = B(t)\,. \tag{3}$$

O caráter não estático do campo magnético implica no aparecimento de um campo elétrico induzido, que satisfaz a lei de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,. \tag{4}$$

O campo elétrico induzido, de acordo com as equações (3-4), é dado por

$$E_1 = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\dot{B}}{2}y\,,\ E_2 = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\dot{B}}{2}x\,,\ E_3 = -\frac{\partial \phi}{\partial z}\,, \tag{5}$$

sendo $\phi = \phi(x, y, z, t)$ um potencial escalar arbitrário. Conseqüentemente, de acordo com as equações de Maxwell, existe uma família infinita de campos elétricos compatíveis com cada campo magnético do tipo (3). Para nossos propósitos, é suficiente escolher

$$\phi = 0\,, \tag{6}$$

com o que o campo elétrico toma a forma

$$E_1 = \frac{\dot{B}}{2}y\,, \qquad E_2 = -\frac{\dot{B}}{2}x\,, \qquad E_3 = 0\,, \tag{7}$$

Constata-se que, no caso estático $\dot{B} = 0$, o campo elétrico induzido (7) anula-se, conforme esperado.

Utilizando o campo eletromagnético externo especificado por (3) e (7), escreve-se a equação de Lorentz não relativística, componente a componente, de acordo com

$$m\ddot{x} = -e\dot{B}y/2 - e\dot{y}B\,, \tag{8}$$
$$m\ddot{y} = e\dot{B}x/2 + e\dot{x}B\,, \tag{9}$$
$$m\ddot{z} = 0\,. \tag{10}$$

Verifica-se que o elétron, em conseqüência de (10), executa movimento livre na direção z, uma vez que não há força ao longo das linhas de campo magnético. No que segue, não se fará mais nenhuma menção à dinâmica ao longo da direção z, que é trivial. Vamos nos restringir ao estudo da parte não trivial da dinâmica, que se dá no plano de coordenadas x e y.

Ao invés de coordenadas cartesianas (x, y), é mais conveniente utilizar coordenadas plano-polares (r, θ), tais que

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\sin\theta\,. \tag{11}$$

Definindo também

$$B(t) = f(t)B_0\,, \tag{12}$$

sendo B_0 um valor constante de referência do campo magnético e $f(t)$ uma função adimensional do tempo, reescreve-se as equações de movimento conforme

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\Omega\, f(t) r\dot{\theta}\,, \tag{13}$$
$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{2}\Omega\dot{f}(t)r + \Omega\, f(t)\dot{r}\,. \tag{14}$$

No sistema (13-14), definiu-se uma freqüência típica Ω, de acordo com

$$\Omega = \frac{eB_0}{m} \tag{15}$$

Quando não há dependência temporal explícita, Ω é a freqüência de cíclotron. No que segue, continuaremos chamando Ω de freqüência de cíclotron, embora seja admitida dependência temporal explícita.

No caso estático, no qual $f = 1$, é simples verificar que o sistema (13-14) tem solução

$$r = r_0\,, \qquad \theta = \Omega\, t + \theta_0\,, \tag{16}$$

para a condição inicial $r(0) = r_0$, $\dot r(0) = 0$, $\dot\theta(0) = \Omega$ e $\theta(0) = \theta_0$. Observe-se que uma escolha de condição inicial distinta não alteraria substancialmente o caráter do movimento. A forma (16) descreve um movimento circular uniforme em torno do eixo z, com freqüência angular Ω, que neste caso é a freqüência de cíclotron. Este movimento circular uniforme, tendo em conta também o movimento retilíneo uniforme ao longo das linhas de campo magnético, leva às trajetórias helicoidais mencionadas na introdução. No caso não estático, entretanto, as trajetórias são bem mais complexas. O seu tratamento detalhado é apresentado nas seções 3 e 4.

3 Invariante de Lewis-Ermakov

Um sistema de equações diferenciais sempre é solúvel quando se conhece um número suficiente de invariantes. Estes invariantes ou constantes de movimento, em geral correspondem a leis de conservação usuais, tais como a conservação da energia ou do momentum linear. Em casos especiais, contudo, uma constante de movimento pode não corresponder a uma lei de conservação clássica. Para familiarizar o leitor com o conceito de invariante tal como o entendemos neste trabalho, vamos considerar o oscilador harmônico simples

$$\dot x = v\,, \qquad \dot v = -\omega_0^2\, x\,, \tag{17}$$

com freqüência ω_0 constante. O oscilador harmônico simples admite, por exemplo, o invariante

$$I = v \cos \omega_0 t + \omega_0\, x \sin \omega_0 t\,, \tag{18}$$

como se pode facilmente testar usando

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial x}\dot x + \frac{\partial I}{\partial v}\dot v + \frac{\partial I}{\partial t}\,, \tag{19}$$

que frente a (17) fornece

$$\frac{dI}{dt} = v\frac{\partial I}{\partial x} - \omega_0^2\, x\frac{\partial I}{\partial v} + \frac{\partial I}{\partial t} = 0\,. \tag{20}$$

Nesta seção é deduzida uma constante de movimento exata para o sistema de equações (13-14), conhecida como invariante de Lewis-Ermakov. Por invariante, entende-se qualquer função $I(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, t)$ satisfazendo

$$dI/dt = 0 \tag{21}$$

ao longo das trajetórias do sistema. Exemplos clássicos de constantes de movimento são a energia para sistemas sob potenciais independentes do tempo, o momentum linear para sistemas invariantes sob translações espaciais e o momentum angular para sistemas invariantes sob rotações.

No caso do movimento de partículas carregadas, os livros-texto [2, 3, 16, 18, 19] consideram normalmente apenas a constância aproximada do momentum magnético. Este tipo de lei de conservação é conhecido por invariância adiabática, para sistemas sob ação de forças que variam lentamente no tempo. No presente trabalho, entretanto, não é feita nenhuma hipótese sobre o tipo de variação temporal do campo magnético. Em outras palavras, a função $f(t)$ em (12) é arbitrária. Na seção 5, entretanto, é analizado um caso particular de comportamento do campo magnético, no qual a função $f(t)$ decresce ao longo do tempo.

Para a dedução do invariante de Lewis-Ermakov, note-se, inicialmente, que a equação (14) admite a constante de movimento exata

$$p_\theta = mr^2(\dot{\theta} - \frac{1}{2}\Omega\, f(t))\,. \tag{22}$$

O leitor pode verificar diretamente que $dp_\theta/dt = 0$ se a equação de movimento (14) é válida. Logo, p_θ é uma constante de movimento do problema. No formalismo Lagrangiano [12], não considerado aqui, pode-se mostrar que a quantidade p_θ é o momentum canonicamente conjugado ao ângulo θ. Nota-se, em (22), que p_θ é composto de uma contribuição vinda do momentum angular usual, $mr^2\dot{\theta}$, somada a uma contribuição originada pelo campo magnético, $-\frac{1}{2}mr^2\Omega\, f(t)$.

Da equação (22), decorre que

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2}\Omega\, f(t) + \frac{p_\theta}{mr^2}\,. \tag{23}$$

Esta última equação, substituída na equação (13) para a variável radial, resulta em

$$\ddot{r} + \omega^2(t) r = \frac{p_\theta^2}{m^2 r^3}\,, \tag{24}$$

onde foi definida uma função freqüência $\omega(t)$, de acordo com

$$\omega(t) = \frac{1}{2}\Omega\, f(t)\,. \tag{25}$$

A equação (24), que é a conhecida equação de Pinney [28], tem uma longa história na literatura dos sistemas não lineares [8, 20, 22]. A equação de Pinney descreve oscilações harmônicas com freqüência explicitamente dependente do tempo, sujeitas a uma força repulsiva extra no caso em que $p_\theta \neq 0$.

Sabendo-se resolver a equação de Pinney para a variável radial, é possível determinar a variável angular através da equação (23). De fato, seja $r = r(t)$ a solução da equação de Pinney. A solução $\theta = \theta(t)$ para a variável angular é dada, de acordo com (23) e a definição da freqüência $\omega(t)$, pela integral

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega(\lambda)\, d\lambda + \frac{p_\theta}{m}\int_0^t \frac{d\lambda}{r^2(\lambda)}\,, \tag{26}$$

onde $\theta(0) = \theta_0$ é o valor inicial do ângulo. Conseqüentemente, a dificuldade essencial que temos que enfrentar é a resolução da equação de Pinney. É na solução desta questão que se revela essencial o invariante de Lewis-Ermakov, deduzido no que segue.

Para construir o invariante de Lewis-Ermakov, pode-se utilizar a chamada técnica de reescalonamento [4, 9, 27], aplicada à variável radial e ao tempo. Na verdade, a técnica de reescalonamento tem importância não apenas no presente contexto, mas numa série de problemas envolvendo astrofísica [27], física de plasma [24, 25] e mecânica quântica [26]. O reescalonamento que utilizaremos é descrito pela transformação de coordenadas

$$\bar{r} = r/\rho(t)\,, \qquad \bar{t} = \int_0^t d\lambda/\rho^2(\lambda) \quad . \tag{27}$$

Na equação (27), $\bar{r}$ é a nova coordenada radial, $\bar{t}$ a nova coordenada temporal e $\rho(t)$ uma função do tempo com forma a ser fixada de acordo com a conveniência futura.

A equação de Pinney, reescrita em termos das novas variáveis, pode ser encontrada utilizando as derivadas

$$\bar{r}' = \rho\dot{r} - \dot{\rho}\, r\,, \qquad \bar{r}'' = \rho^2(\rho\ddot{r} - \ddot{\rho}r)\,, \tag{28}$$

onde a linha representa derivação em relação a $\bar{t}$. Usando (24) e (28), resulta que

$$\bar{r}'' + \rho^3(\ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho)\bar{r} = \frac{p_\theta^2}{m^2\bar{r}^3}. \tag{29}$$

A função $\rho(t)$ foi introduzida na transformação de reescalonamento para ser utilizada convenientemente. Faremos isto escolhendo $\rho(t)$ de modo a eliminar a dependência temporal de (29). Isto é, por definição tomaremos $\rho(t)$ como sendo qualquer solução particular para uma segunda equação de Pinney,

$$\ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho = \Omega_0^2/\rho^3\,, \tag{30}$$

sendo Ω_0 uma constante a ser escolhida como positiva para garantir maior estabilidade [17] no tratamento numérico de (30). Temos agora duas equações de Pinney, uma delas a própria equação de movimento para a coordenada radial e a segunda dada por (30), referida, na continuação, como equação de Pinney auxiliar.

Escolhendo $\rho(t)$ como solução da equação de Pinney auxiliar, reduz-se (29) à equação

$$\bar{r}'' + \Omega_0^2\bar{r} = \frac{p_\theta^2}{m^2\bar{r}^3}\,, \tag{31}$$

descrevendo movimento harmônico com freqüência constante Ω_0, na presença de uma força repulsiva extra (para $p_\theta \neq 0$). A equação de movimento para a variável radial reescalonada não depende explicitamente do novo parâmetro temporal, o que permite escrever

$$\bar{r}'' = -\frac{dV(\bar{r})}{d\bar{r}}\,, \tag{32}$$

onde $V(\bar{r})$ é uma função potencial independente de $\bar{t}$,

$$V(\bar{r}) = \frac{1}{2}\Omega_0^2\bar{r}^2 + \frac{p_\theta^2}{2m^2\bar{r}^2}\,. \tag{33}$$

A equação (32) está na forma da equação de movimento para uma partícula de massa unitária executando movimento unidimensional sob influência de um potencial $V(\bar{r})$ que não depende explicitamente do tempo. Conseqüentemente [12], há a conservação da energia,

$$I = \frac{\bar{r}'^2}{2} + V(\bar{r})\,. \tag{34}$$

Considerando as equações (27) e (28) que descrevem o reescalonamento e a forma (33) do potencial, obtém-se I como função das coordenadas originais,

$$I = \frac{1}{2}(\rho\dot{r} - \dot{\rho}r)^2 + \frac{\Omega_0^2 r^2}{2\rho^2} + \frac{p_\theta^2\rho^2}{2m^2r^2}\,. \tag{35}$$

Este é o invariante de Lewis-Ermakov para o problema. O leitor pode verificar diretamente a constância de I ao longo das trajetórias do sistema (13-14), para qualquer $\rho(t)$ satisfazendo uma equação de Pinney auxiliar. A existência da constante de movimento I é decorrência direta do fato das equações dinâmicas reduzirem-se à equação para uma partícula de massa unitária que executa movimento unidimensional sob um potencial independente do tempo. Esta redução, por sua vez, é conseqüência do reescalonamento (27) e do fato de $\rho(t)$ satisfazer uma equação de Pinney. Convm ressaltar que a constante de movimento (35) é exata, não aproximada. Pode-se demonstrar [22] que, no caso de um campo magnético lentamente variável, o invariante de Lewis-Ermakov recai, a menos de um fator numérico irrelevante, no momentum magnético do sistema. Como dito na introdução, o momentum magnético é um invariante adiabático do problema, e não uma constante de movimento exata como é o invariante de Lewis-Ermakov.

O sistema de equações (24, 30) é um caso particular dos chamados sistemas de Ermakov [8, 22], que são pares de equações diferenciais de segunda ordem admitindo um invariante exato. As aplicações dos sistemas de Ermakov vão desde modelos para a criação cosmológica de partículas [29] até a descrição do movimento de partícula carregadas em aceleradores do tipo cíclotron [6]. Entretanto, o grande impulso para o interesse em torno dos sistemas de Ermakov foi dado por Lewis e Riesenfeld [23], que utilizaram um sistema do tipo (24, 30) e a constante de movimento (35) para obter a solução exata do oscilador harmônico quântico dependente do tempo. Recentemente, tem-se registrado novos avanços no entendimento da estrutura matemática dos sistemas de Ermakov [1, 5], [10]– [11], [13]–[15], [21]. Uma revisão dos sistemas de Ermakov pode ser encontrada em [13].

Na seção que segue, mostra-se a resolução das equações de movimento (13–14) fazendo uso do invariante de Lewis-Ermakov (35). A estratégia seguida baseia-se no fato do invariante de Lewis-Ermakov do problema ter a forma de uma energia no espaço das variáveis reescalonadas.

4 Solução exata

O invariante de Lewis-Ermakov na forma (34) expressa a conservação da energia nas variáveis reescalonadas. Deste modo, é natural recorrer ao método da energia [12] usado no tratamento de sistemas conservativos. Segundo esta abordagem, interpreta-se (34) como uma equação diferencial ordinária de primeira ordem separável,

$$\frac{d\bar{r}}{\sqrt{2(I - V(\bar{r}))}} = d\bar{t}\,. \tag{36}$$

Esta classe de equações sempre pode ser resolvida em termos de uma quadratura,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int^{\bar{r}} \frac{d\lambda}{(I - V(\lambda))^{1/2}} = \bar{t} + c\,, \tag{37}$$

onde c é uma constante numérica arbitrária. Observe-se que, na última equação, o invariante de Lewis-Ermakov cumpre o papel de uma constante numérica. Além disso, para potenciais $V(\bar{r})$

gerais, nem sempre é possível efetuar a quadratura (37) de forma fechada, em termos de funções conhecidas. Em nosso caso, como o potencial é dado pela relação (33), a integral no lado esquerdo de (37) não apresenta maior dificuldade. Calculando a integral e invertendo a expressão obtida para encontrar $\bar{r}$ em termos de $\bar{t}$, chega-se ao resultado

$$\bar{r} = \frac{1}{\Omega_0}\left(I + \left(I^2 - \frac{\Omega_0^2 p_\theta^2}{m^2}\right)^{1/2} \sin(2\Omega_0 \bar{t} + c)\right)^{1/2} . \tag{38}$$

Esta é a solução para a variável radial reescalonada em função do novo parâmetro temporal.

O reescalonamento (27) foi introduzido apenas como um artifício matemático para o tratamento das equações de movimento, culminando no invariante de Lewis-Ermakov e na expressão (38). Nosso objetivo, entretanto, é obter a solução para a variável original r em termos do parâmetro temporal original t. Para isto, basta utilizar as fórmulas (27) e (38), as quais implicam

$$r(t) = \frac{\rho(t)}{\Omega_0}\left(I + \left(I^2 - \frac{\Omega_0^2 p_\theta^2}{m^2}\right)^{1/2} \sin\left(2\Omega_0 \int_0^t \frac{d\lambda}{\rho^2(\lambda)} + c\right)\right)^{1/2} . \tag{39}$$

Esta é a solução final para a variável radial, em termos de três constantes numéricas arbitrárias, a saber, I, p_θ e c e da função $\rho(t)$. Esta função é qualquer solução particular para a equação de Pinney (30), a qual nem sempre pode ser resolvida de modo exato. De fato, não se conhece uma fórmula analítica fechada da solução de (30) para freqüências $\omega(t)$ arbitrárias. Não obstante, sempre se pode construir numericamente uma solução particular na aproximao desejada.

Para completar a solução, é preciso ainda encontrar a dinâmica da coordenada angular θ. Isto pode ser feito utilizando a relação (26), que fornece diretamente a expressão $\theta(t)$ para a evolução temporal do ângulo, substituindo $r(t)$ de (39). Deste procedimento resulta

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega(\lambda)\, d\lambda + \frac{\Omega_0^2 p_\theta}{m} \int_0^t \frac{d\lambda}{\rho^2(\lambda)} \times$$

$$\left(I + \left(I^2 - \frac{\Omega_0^2 p_\theta^2}{m^2}\right)^{1/2} \sin\left(2\Omega_0 \int_0^\lambda \frac{d\mu}{\rho^2(\mu)} + c\right)\right)^{-1}, \qquad (40)$$

onde $\theta(0) = \theta_0$ é o valor inicial do ângulo.

A solução final envolve quatro constantes numéricas arbitrárias, I, p_θ, c e θ_0. Esta solução , portanto, geral pois as equações de movimento (13-14) são constituídas de um par de equações de segunda ordem. Em conseqüência, para encontrar a solução geral das equações de movimento, basta o conhecimento de uma única solução particular da equação de Pinney (30). Esta estratégia de solução geral de uma equação a partir de uma solução particular de uma equação auxiliar, é denominada superposição não linear [30]. A denominação vem da analogia com as equações lineares ordinárias, para as quais um número suficiente de soluções particulares é suficiente para a construção da solução geral. Esta solução é obtida simplesmente somando (superpondo) as diversas soluções particulares. No caso dos sistemas não lineares, entretanto, a possibilidade de estabelecer leis de superposição raramente existe. De fato, os sistemas de Ermakov são dos poucos sistemas dinâmicos não lineares com uma lei de superposição associada [30]. A fim de exemplificar a lei de superposição não linear obtida, na próxima seção, a solução (39–40) será construída explicitamente considerando um caso particular de campo magnético decrescente ao longo do tempo.

5 Um exemplo de aplicao

Soluções exatas para a equação (30) podem ser obtidas [7] para várias formas da função freqüência $\omega(t)$. De acordo com (25), a forma da freqüência vai depender do tipo de campo magnético considerado. Trataremos aqui de um campo magnético com intensidade

$$B(t) = \frac{B_0}{(1 + \alpha\, t)^2}\,, \qquad (41)$$

onde α é uma constante positiva. Este campo tem valor inicial $B(0) = B_0$ e decresce ao longo do tempo. Assintoticamente, para grandes valores de t, $B(t) \sim t^{-2}$. A classe de campos magnéticos considerada permite encontrar, de modo exato, uma solução particular da equação de Pinney auxiliar.

Para escrever a equação de Pinney auxiliar, note-se que a função $f(t)$, de acordo com (12) e (41), é dada por

$$f(t) = 1/(1+\alpha\, t)^2\,. \tag{42}$$

Isto implica que a equação de Pinney auxiliar tem a forma

$$\ddot{\rho} + \frac{\Omega^2}{4(1+\alpha\, t)^4}\;\rho = \frac{\Omega_0^2}{\rho^3}\,. \tag{43}$$

Uma solução particular de (43) é dada por

$$\rho(t) = \left(\frac{2\Omega_0}{\Omega}\right)^{1/2}(1+\alpha\, t)\,, \tag{44}$$

que cresce linearmente com o tempo. A solução particular (44) é suficiente, já que as equações (39–40) não requerem a solução geral da equação de Pinney auxiliar. De fato, utilizando (39), obtém-se

$$r(t) = \left(\frac{2}{\Omega\Omega_0}\right)^{1/2}(1+\alpha\, t)\left(I + \left(I^2 - \frac{\Omega_0^2 p_\theta^2}{m^2}\right)^{1/2}\sin\!\left(\frac{\Omega\, t}{1+\alpha\, t} + c\right)\right)^{1/2}, \tag{45}$$

para a evolução temporal da variável radial, e

$$\begin{aligned}\theta(t) = \theta_0 + \frac{\Omega\, t}{2(1+\alpha\, t)} + \frac{\Omega_0\Omega\, p_\theta}{2m}\int_0^t \frac{d\lambda}{(1+\alpha\lambda)^2}\times \\ \left(I + \left(I^2 - \frac{\Omega_0^2 p_\theta^2}{m^2}\right)^{1/2}\sin\!\left(\frac{\Omega\lambda}{1+\alpha\lambda} + c\right)\right)^{-1},\end{aligned} \tag{46}$$

para a evolução temporal da variável angular. Observe-se que a solução (45–46) é geral, pois envolve quatro constantes numéricas arbitrárias, conforme mencionado anteriormente.

É possível representar de maneira mais compacta a solução obtida, introduzindo novas variáveis reescalonadas

$$R = \left(\frac{\Omega_0 \Omega}{2I}\right)^{1/2} r\,, \qquad\qquad T = \Omega\, t \tag{47}$$

e os parâmetros numéricos

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{\Omega}\,, \qquad\qquad S = \frac{\Omega_0 p_\theta}{mI}\,. \tag{48}$$

Na nova descrição, R faz o papel de variável radial, enquanto T faz o papel de variável temporal. T é o tempo medido em unidades de período de oscilações cíclotron.

Com as definições (47–48), reescreve-se a solução na forma compacta

$$R(T) = (1+\varepsilon\, T)\left(1+\sqrt{1-S^2}\sin\left(\frac{T}{1+\varepsilon\, T}+c\right)\right)^{1/2}, \tag{49}$$

$$\theta(T) = \theta_0 + \frac{T}{2(1+\varepsilon\, T)} + \frac{S}{2}\int_0^T \frac{d\lambda}{R^2(\lambda)}\,. \tag{50}$$

As equações (49–50) permitem identificar claramente os parâmetros importantes do problema. Enquanto c e θ_0 não têm maior relevância, estando relacionados apenas a posição inicial do elétron, os parâmetros ε e S são essenciais. A taxa de decaimento do campo magnético é medida pelo parâmetro ε, o qual é nulo no caso estático. Já S é uma medida do momentum angular do sistema. Observe-se que, por construção, $0 \leq S^2 \leq 1$, o que pode ser demonstrado levando em conta as formas do invariante de Lewis–Ermakov e do momentum angular p_θ. Desta forma, garante-se que as expressões (49–50) assumem apenas valores reais.

6 Conclusão

No presente trabalho, obteve-se a solução exata das equações de movimento não relativísticas de um elétron na presença de um campo magnético de amplitude variável no tempo e do respectivo campo elétrico induzido, consistente com as equações de Maxwell. Utilizando a constância do momentum canônico p_θ associado à variável angular θ, deduziu-se que a variável radial r tem evolução temporal descrita pela equação de Pinney (24). Para o tratamento da equação de Pinney, introduziu-se reescalonamento das coordenadas radial e temporal, o que eliminou a dependência temporal explícita da dinâmica. Nas coordenadas reescalonadas, verifica-se conservao da energia, a qual é o invariante de Lewis-Ermakov do sistema. O conhecimento do invariante de Lewis-Ermakov, possibilita a obteno da solução exata do problema, em termos de uma solução particular da equação de Pinney auxiliar. A eficácia do método reside no fato de ser requerida apenas uma solução *particular* da equação de Pinney auxiliar, para construção da solução *geral* do problema. Os resultados obtidos podem ser sumarizados pelas equações (39–40), que descrevem a evolução temporal das variáveis radial e angular. A solução obtida é exata, não aproximada, dada em termos de qualquer solução particular da equação de Pinney auxiliar (30). A teoria geral foi ilustrada na seção 5, no caso de um campo magnético decrescente. Outros tipos de campo magnético para os quais a equação de Pinney auxiliar admite uma solução particular exata podem ser abordados de modo similar. Entretanto, deve-se enfatizar a importância do uso de métodos numéricos para o tratamento da equação de Pinney auxiliar, nas situações em que não há solução analítica facilmente identificável.

Uma possibilidade não considerada aqui é a análise do efeito na dinâmica de um potencial eletrostático $\phi = \phi(x, y, z, t)$ não nulo. De fato, de acordo com (5), existe uma família infinita de campos elétricos que podem ser superpostos, sem violar as equações de Maxwell, a um campo magnético homogêneo no espaço mas, variável no tempo. Cada elemento desta família infinita de campos elétricos é caracterizada por um potencial eletrostático particular. No presente caso foi considerado $\phi = 0$, basicamente por razões de simplicidade. Como resultado, foi obtida uma categoria de equações de Lorentz que admite resolução exata, conforme apresentado na seção 4. Na presença de um potencial eletrostático não nulo, entretanto, no mais se garante a existncia do invariante de

Lewis–Ermakov e a dinâmica pode tornar-se irregular, com trajetórias caóticas.

Finalizando, mostrou-se a relevância dos sistemas de Ermakov e das constantes de movimento, através de um exemplo relativamente simples e de interesse prático. Na verdade, o estudo das constantes de movimento associadas a sistemas físicos constitui-se numa área de pesquisa intensa, tanto a nível clássico quanto a nível quântico [13]. Espera-se que avanços nesta área devam se dar pela combinação de técnicas analíticas e computacionais.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (Fapergs).

Referências

[1] Athorne, C., Rogers, C., Ramgulam, U. & Osbaldestin, A. *On linearization of the Ermakov system.* Phys. Lett. A **143** (1990) 207-212.

[2] Akhiezer, A. I, Akhiezer, I. A., Polovin, R. V., Sitenko, A. G. & Stepanov, K. N. *Plasma electrodynamics.* Oxford: Pergamon Press, 1975.

[3] Bittencourt, J. A. *Fundamentals of plasma physics.* São José dos Campos: INPE, 1995.

[4] Bouquet, S. *Intégrales premières, symétries et intégrabilité. Applications aux systèmes Hamiltoniens, à l'astrophysique et à la physique des plasmas.* CEA – Centre d'Etudes de Vaujours–Moronvilliers, 1993.

[5] Common, A. K. & Musette, M. *Two discretisations of the Ermakov-Pinney equation.* Phys. Lett. A **235** (1997) 574-580.

[6] Courant, E. D. & Snyder, H. D. *Theory of the alternating-gradient synchroton.* Ann. Phys. **3** (1958) 1-48.

[7] Eliezer, C. J. & Gray, A. *A note on the time–dependent harmonic oscillator.* SIAM J. Appl. Math. **30** (1976) 463-468.

[8] Ermakov, V. P. Univ. Isv. Kiev **20** (1880) 1.

[9] Feix, M. R. *Self Similarity and rescaling methods in nonlinear physics.* Lecture Notes, UFRGS, 1986.

[10] Goedert, J. *Second constant of motion for generalized Ermakov systems.* Phys. Lett. A, **136** (1989) 391-394.

[11] Goedert & J., Haas, F. *On the Lie symmetries of a class of generalized Ermakov systems.* Phys. Lett. A **239** (1998) 348-352.

[12] Goldstein, H. *Classical mechanics.* Reading: Addison–Wesley, 1980.

[13] Haas, F. *Sistemas de Ermakov generalizados, simetrias e invariantes exatos.* UFRGS, 1998: Tese de Doutorado em Física.

[14] Haas, F. & Goedert, J. *On the Hamiltonian structure of Ermakov systems.* J. Phys. A: Math. Gen. **29** (1996) 4083-4092.

[15] Haas, F. & Goedert, J. *Linearization of a class of generalized Ermakov systems.* Aceito para publicação em J. Phys. A: Mathematical and General.

[16] Jackson, J. D. *Classical electrodynamics.* New York: John Wiley and Sons, 1962.

[17] Korsch, H. J., Laurent, H. & Möhlenkamp, R. *Milne's differential equation and numerical solutions of the Schrödinger equation II. Complex energy resonance states.* J. Phys. B: At. Mol. Phys., **15** (1982) 1-15.

[18] Krall, N. A. & Trivelpiece, A. *Principles of plasma physics.* New York: McGraw-Hill, 1973.

[19] Landau, L. & Lifchitz, E. *Théorie du champ.* Moscou: Mir, 1966.

[20] Leach, P. G. L. *Differential equations, symmetries and integrability.* Lecture Notes, Université d'Orléans, Orlans, 1996.

[21] Leach, P. G. L. *Generalized Ermakov systems.* Phys. Lett. A **158** (1991) 102-106.

[22] Lewis Jr., H. R. *Classical and quantum systems with time–dependent harmonic–oscillator–type Hamiltonians.* Phys. Rev. Lett. **18** (1967) 510-512.

[23] Lewis Jr., H. R. & Riesenfeld, W. B. *An Exact quantum theory of the time–dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time–dependent electromagnetic field.* J. Math. Phys. **10** (1969) 1458-1473.

[24] Manfredi, G., Mola, S. & Feix, M. R., *Rescaling methods and plasma expansions into vacuum.* Phys. Fluids B **5** (1993) 388-401.

[25] Mola, S., Manfredi & G., Feix, M. R. *Expansion of a quantum electron gas.* J. Plasma Phys. **50** (1993) 145-162.

[26] Munier, A., Burgan, J. R., Feix, M. R. & Fijalkow, E. *Schrödinger equation with time-dependent boundary conditions.* J. Math. Phys. **22** (1981) 1219-1223.

[27] Munier, A., Burgan, J. R., Feix, M. & Fijalkow, E. *Asymptotic solutions for a variable mass two-body problem.* Astron. Astrophys. **94** (1981) 373-376.

[28] Pinney, E. *The nonlinear differential equation $y'' + p(x)y + cy^{-3} = 0$.* Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950) 681.

[29] Ray, J. R. *Cosmological particle creation.* Phys. Rev. D, **20** (1979) 2632-2633.

[30] Reid, J. L.& Ray, J. R. *Ermakov systems, nonlinear superposition, and solutions of nonlinear equations of motion.* J. Math. Phys., **21** (1980) 1583-1587.